数理解析研究所講究録
第752巻1991年149-163

ヒルベルトモジュラースキームの局所ゼータ函数

岐阜大学教育学部数学 畑田一幸 (Kazuyuki Hatada)

序. Hatada [7, Theorem 1], [8, Theorems 4 and 5], [9, Theorems 4 and 5] において，高次元（即，任意次元）モジュラー多様体の適当なsmooth compact化の，任意次数の，$\mathbb{Z}$係数特異ホモロジー群とℓ-進コホモロジー群に，ヘッケ環が自然に作用する事を示した。この講演では，総実代数体Kに関するヒルベルトモジュラースキームの，smooth compact化に対して，これらの作用素を用いて，それの素点pにおける局所ゼータ函数（ここでpは good reduction な素数pで，pはKで remain prime であるとする）が書き表せた事と，それらの作用素の任意の固有値のアルキメデス的絶対値による評価を与えた事を，主として話した。(cf. Hatada [11])

§1.

K：総実代数体； $g=[K:\mathbb{Q}]$； 記法を簡単にする為，Kのstrictな類数を1とこの講演では仮定したが，以下に記した諸結果はこの条件なしに成立する事を，我々は示す事ができる。 $\mathcal{O}_K$：Kの代数的整数全体の環； N：3以上の任意整数； ζ_N：1の原始N乗根；
$\Gamma(1)_K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2,2}(\mathcal{O}_K)\,\middle|\, ad-bc \text{ は } \mathcal{O}_K \text{の総正単数}\right\}$；
$\Gamma(N)_K=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \Gamma(1)_K\,\middle|\, a-1\equiv d-1\equiv b\equiv c\equiv 0 \pmod{N\mathcal{O}_K}\right\}$；
$\mathfrak{h}$：複素上半平面； $\mathfrak{h}^g$：$\mathfrak{h}$のg個の直積；
$GL^+(2,K)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in M_{2,2}(K)\,\middle|\, ad-bc \text{ は 総正}\right\}$；
$GL^+(2,K)$を$\mathfrak{h}^g$に通常の様に作用させる（cf. Shimizu [16]）。 $\Gamma(N)_K\backslash\mathfrak{h}^g$：複素解析商空間（*Hilbert modular*多様体）； φ：*Euler phi*函数； *level N* 構造付の，$\mathcal{O}_K$によるreal multiplicationを持つ *Abel*多様体のmoduliの理論により，次の性質を備えた$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$上のmoduliのscheme $\mathfrak{M}(N)$が存在する：

$$\mathfrak{M}(N)\underset{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}{\times}\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}=\bigcup_{i=1}^{\varphi(N)}\Gamma(N)_K\backslash\mathfrak{h}^g \quad (\text{disjoint}),$$

右辺は 1の原始N乗根と1対1に対応している。（cf. Rapoport [15]）.
半群 $G_2^+(\mathcal{O}_K)\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}GL^+(2,K)\cap M_{2,2}(\mathcal{O}_K)$； $HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ $\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ 群$\Gamma(N)_K$と半群$G_2^+(\mathcal{O}_K)$に関するHecke環。

Toroidal Compact 化を考える。族 $\{\Gamma(N)_K \backslash \mathfrak{H}_g\}_{N \geq 3}$ の同時 toroidal compact 化の為に、regular かつ projective な $\Gamma(1)_K$-admissible family $\Sigma = \{\Sigma_\alpha\}_{F_\alpha : \text{rational components}}$ of polyhedral cone decomposition をひとつ定めておく。$M(N)_{\mathbb{C}} = (\Gamma(N)_K \backslash \mathfrak{H}_g)^\sim$ でこの Σ に関する Spec $\mathbb{C}$ 上の toroidal compact 化を表す。$M(N) = \mathfrak{M}(N)^\sim$ でこの Σ に関する Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の toroidal compact 化を表す。morphism $M(N) \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ は proper かつ smooth となる。この時次の結果が成立する。

$M(N) \underset{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]}{\times} \operatorname{Spec} \mathbb{C} = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} M(N)_{\mathbb{C}}$ (disjoint);

$M(N) \underset{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]}{\times} \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N] = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} B(N)$ (disjoint);

$B(N)$ は Spec $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]$ 上で絶対既約;

$B(N) \underset{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]}{\times} \operatorname{Spec} \mathbb{C} = M(N)_{\mathbb{C}}$;

今 p を $p \nmid N$ をみたす任意素数とする。$\mathfrak{P}$ を $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]$ の素イデアルで $\mathfrak{P} | p$ なるものとし、$D(N) \underset{def.}{\Longleftarrow} B(N) \underset{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N, \zeta_N]}{\times} \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]/\mathfrak{P})$ と定める。(この $D(N)$ は $D_p(N)$ と書いた方が正確。) ここで $\overline{\mathbb{F}_p} = \overline{\mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \zeta_N]/\mathfrak{P}}$。$D(N)$ $(= D_p(N))$ は Spec $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上 proper かつ smooth となる。この時、

$M(N) \underset{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/N]}{\times} \operatorname{Spec} \overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{i=1}^{\varphi(N)} D(N)$ (disjoint)

が成立する。

まず次の２つの定理を得る。

定理１(Hatada [7]). There is a natural ring homomorphism $f_n : HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \to \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z})$ for each integer $n \geqq 0$.

定理２(Hatada [8], [9]). Let ℓ and p be prime numbers with $p \nmid (\ell N)$. There is a natural anti-ring homomorphism $\mathfrak{f}^{(n)} : HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell} H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_\ell)$ (resp. $\mathfrak{f}_p^{(n)} : HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_\ell} H^n(D(N), \mathbb{Q}_\ell)$) for each integer $n \geqq 0$.

各々の整数 $n \geqq 0$ に対して，$H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}_\ell) \cong H^n(D(N), \mathbb{Q}_\ell)$ が成立する。この同型の下で $\mathfrak{f}^{(n)} = \mathfrak{f}_p^{(n)}$ とみなせる。標準的同型 $H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \cong H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ により，$h \in HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ に対して，$f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id.} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ を得る。Kronecker index による complete duality $H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \times H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ に関する $f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id.}$ の転置写像 ${}^t(f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id.}) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ が得られる。よって，次の様にして自然な anti-ring homomorphism $f^{(n)} : HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K)) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\ H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ が定義される。

<u>定義</u>. nを $0 \leqq n \leqq 2\dim_{\mathbb{C}} M(N)_{\mathbb{C}} = 2g$ を満たす整数とする。上記の記号の下で, $f^{(n)}(h) = {}^t(f_n(h) \otimes_{\mathbb{Z}} id.)$ for all $h \in HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$, により $f^{(n)}$ を定義する。

さて, $M(N)_{\mathbb{C}}$ は smooth な projective variety なので, その上に少なくともひとつは Hodge metric が存在する。この Hodge metric に関して, よく知られている様に,

Hodge 分解: $H^n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{\substack{u+v=n \\ u \geqq 0 \\ v \geqq 0}} H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$

が成立している。次の定理3と定理4は, この $f^{(n)}$ が具体的に, 調和形式の空間にどう作用するのかを示すものである。$\Gamma = \Gamma(N)_K$ とおく。$HR(\Gamma, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ に属する任意の double coset $\Gamma\alpha\Gamma$ $(\alpha \in G_2^+(\mathcal{O}_K))$ に対し, $\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_\nu \Gamma\alpha_\nu$ (disjoint union) と書く。Ωを$M(N)_{\mathbb{C}}$上のひとつの Hodge metric とする(必ず存在する)。$H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$ で, $M(N)_{\mathbb{C}}$ 上の type (u,v) の, Ωに関する, 調和形式の空間を表す。ωを $H^{(u,v)}(M(N)_{\mathbb{C}})$ の任意の元とし, $\omega_0 =$ the pull back of $\omega|_{\Gamma\backslash\mathfrak{H}^g}$ to $\mathfrak{H}^g$ と書く。

定理3 (cf. Hatada [7]). 上記の記号を用いる。$\mathfrak{H}^g$上の

微分形式 $\sum_\nu \omega_0 \circ \alpha_\nu$ は，$\Gamma\backslash \mathfrak{H}^g$ 上の微分形式とみなせるが，更に，これは $M(N)_{\mathbb{C}}$ 全体上での $type\,(u,v)$ の連続微分形式として，一意的に拡張される。

定理3における $M(N)_{\mathbb{C}}$ 上の微分形式を今 $\langle\omega\rangle$ で書き表す。$\mathbb{G}$ を Ω に関する $M(N)_{\mathbb{C}}$ 上の Green 作用素とする。$id. = \mathbb{H} + d\delta\mathbb{G} + \delta d\mathbb{G}$ をポテンシャル理論における直交分解とする。上記及び定理3における記号の下で次の定理4を得る。定理4において，u と v は任意の非負整数を表す。

定理4 (cf. Hatada [7]).

$(f^{(u+v)}(\Gamma\alpha\Gamma))(\omega) = \mathbb{H}\langle\omega\rangle$ が成立する。

この講演記録において，以後すべて，p で $p\mathcal{O}_K$ が素イデアルである様な任意の素数を表すものとする。集合 $S(p\mathcal{O}_K)$ と $S(p\mathcal{O}_K)(N)$ を次の様に定める。

$$S(p\mathcal{O}_K) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathcal{O}_K) \,\middle|\, \frac{ad-bc}{p} \text{ は } \mathcal{O}_K \text{ の総正な単数} \right\},$$

$$S(p\mathcal{O}_K)(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in S(p\mathcal{O}_K) \,\middle|\, a-1 \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod{N\mathcal{O}_K} \right\}.$$

$S(p\mathcal{O}_K)(N)$ を cosets の disjoint な union として書く：

$$S(p\mathcal{O}_K)(N) = \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma(N)_K \alpha_i = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma(N)_K \beta_j \Gamma(N)_K .$$

この時 Hecke 環 $HR(\Gamma(N)_K, G_2^+(\mathcal{O}_K))$ の元 $T(p\mathcal{O}_K)$ を

$T(p\mathcal{O}_K)=\sum_{j=1}^{\nu}\Gamma(N)_K\beta_j\Gamma(N)_K$ により定める。 $p\nmid N$ の時，$SL(2,\mathbb{Z})$ の元 σ_p で $\sigma_p\equiv\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p\end{pmatrix} \pmod N$ を満たすものが存在する。σ_p は $\Gamma(1)_K$ の元として $\Gamma(N)_K\backslash\mathfrak{H}^g$ の isomorphism $\hat{\sigma}_p$ を引き起こす。またこの σ_p は一意的に次の4つの isomorphisms を引き起こす。

$$\tilde{\sigma}_p : M(N)_{\mathbb{C}} \longrightarrow M(N)_{\mathbb{C}} \qquad (\mathbb{C}\text{ 上}),$$
$$\tilde{\sigma}_p : M(N) \longrightarrow M(N) \qquad (\mathbb{Z}[\tfrac{1}{N}]\text{ 上}),$$
$$\tilde{\sigma}_p : D(N) \longrightarrow D(N) \qquad (\overline{\mathbb{F}}_p\text{ 上}),$$
$$\tilde{\sigma}_p : M(N)\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p \longrightarrow M(N)\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}\mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p .$$

これらの4つの $\tilde{\sigma}_p$ は別々の記号を用いるべきだが簡略して同じ記号で書いた。これらの $\tilde{\sigma}_p$ 達は皆素体上で定義されている。各々の整数 n に対して，$\tilde{\sigma}_{p,n}\in GL(H^n(M(N)_{\mathbb{C}},\mathbb{Q}_\ell))$ (resp. $[\tilde{\sigma}_{p,n}]\in GL(H^n(D(N),\mathbb{Q}_\ell))$) を，$\tilde{\sigma}_p$ より引きおこされる標準的同型とする。

次の命題1と定理5を得る。

命題1 (Hatada [11, prop. 1]). $T(p\mathcal{O}_K)$ の correspondence である，$\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$ 上の $M(N)\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}M(N)$ の subscheme $\mathfrak{Z}(p\mathcal{O}_K)$ が構成される。そして，$(M(N)\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}M(N))\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ の各々の component $M(N)_{\mathbb{C}}\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}}M(N)_{\mathbb{C}}$ 上で，$\mathfrak{Z}(p\mathcal{O}_K)\times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]}\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}$ は，Hatada [8, p. 63の下から4行

目とp.65のRemark 2]と[9]に書いたものと同じ方法で定義されるcorrespondenceと一致する。

定理5(Hatada[11]). 合同関係式。$p \nmid N$とする。
$(M(N) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} M(N)) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}_p}$ 上のcorrespondenceとして次の等式を得る。
$\mathfrak{Z}(p\mathcal{O}_K) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}_p} = \mathrm{Frob}(p) + p^{g-1}\langle\tilde{\sigma}_p\rangle \circ {}^t(\mathrm{Frob}(p))$.
ここで，$\langle\tilde{\sigma}_p\rangle = M(N) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の各々の成分$D(N)$上でのmorphism $\tilde{\sigma}_p : D(N) \longrightarrow D(N)$のcorrespondence;
$\mathrm{Frob}(p) = M(N) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}_p}$ の各々の成分$D(N)$上でのFrobenius(p-th power) endomorphismのcorrespondence;
${}^t(\mathrm{Frob}(p)) = \mathrm{Frob}(p)$のtransposed correspondence;
である。

次の定理6とその系を得る。

定理6(Hatada[11]). $p \nmid N$とする。nを$0 \leqq n \leqq 2g$を満足する任意整数とし，λ_pで$\mathfrak{f}^{(n)}(T(p\mathcal{O}_K))$の任意の固有値を表す。($\mathfrak{f}^{(n)}$は定理2において定義された写像である。)この時，任意のアルキメデス的絶対値$|\cdot|$ with $|2|=2$に対して，$|\lambda_p| \leqq p^{n/2} + p^{(2g-n)/2}$が成立する。

定理2と定理6により次の系を得る。

系6.1. 定理6におけると同じ記号を用いる。mを正整数で，素因子分解 $m=p_1p_2\cdots p_r$ した時 各々の素数 p_i は「$p_i\mathcal{O}_K$ は $\mathcal{O}_K$ の素イデアル」である様な，任意の素数とする。この時，$\left| f^{(n)}(T(m\mathcal{O}_K))\text{の任意の固有値}\right| \leqq \prod_{i=1}^{r}(p_i^{n/2}+p_i^{(2g-n)/2})$ が 成立する。

下記の定理7，定理8と定理9において，$f^{(n)}$ は定理2における写像を表す。次の定理7と定理8をまず得る。

定理7 (Hatada[11]). $p\nmid(\ell N)$ と仮定する。nを $0\leqq n\leqq 2g$ を満たす任意の整数とする。変数Xの多項式 $P_n(M(N)_{\mathbb{C}},X)$ を次の式により定める。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}},X)\underset{\mathrm{def}}{\Leftarrow} \det(X^2-f^{(n)}(T(p\mathcal{O}_K))X+\tilde{\sigma}_{p,n}\,p^g).$$

この $P_n(M(N)_{\mathbb{C}},X)$ は $\mathbb{Z}[X]$ に含まれるmonic多項式であり，ℓのとり方に依存しない。更に，$P_n(M(N)_{\mathbb{C}},X)$の満たす次の式を得る。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}},X)=\det(X-[\mathrm{Frob}(p)]_n)\cdot\det(X-p^g[\tilde{\sigma}_{p,n}][\mathrm{Frob}(p)]_n^{-1}).$$

ここで，$\mathrm{Frob}(p)=D(N)$のFrobenius (p-th power) endomorphism; $[\mathrm{Frob}(p)]_n=\mathrm{Frob}(p)$によって引き起こされる$H^n(D(N),\mathbb{Q}_\ell)$の

endomorphism; である。

定理7の系7.1. $n \neq g$と仮定する。$P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \prod_{\gamma}(X - \rho_\gamma)$ と書く。この時，$\det(X - [\mathrm{Frob}(p)]_n) = \prod_{\gamma'}(X - \rho_{\gamma'})$ が成立する。但しここで γ' は $|\rho_\gamma| = p^{n/2}$ を満たすすべての γ 全体を動く。

定理8 (Hatada [11]). 定理7におけると同じ記法を用いる。nを$0 \leqq n \leqq 2g$ を満たす任意の整数とする。次の等式を得る。

$$P_n(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(X - [\mathrm{Frob}(p)]_n) \cdot \det(X - [\mathrm{Frob}(p)]_{2g-n}).$$

定義. $0 \leqq n \leqq 2g$を満たす各々の整数nに対して$P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X)$を，$P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(1 - f^{(n)}(T(p\mathcal{O}_K))X + \tilde{\sigma}_{p,n}p^g X^2)$により，定める。

Vを有限体k上定義された非特異射影的代数多様体(smooth projective variety)とする。$Z(V, X)$で Vのゼータ函数を表す。[即: $V_0 = V^{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$とおく時，$V_0$は Spec k 上の variety になる。k_jを$[k_j : k] = j$ を満たすkの拡大体とする。θ_j = 体k_jに係数を持つV_0の geometric points の個数，とおく。$Z(V, X)$

は変数Xの形式的巾級数 $\exp(\sum_{j=1}^{\infty}\theta_j j^{-1}X^j)$ として定義される。これがXの有理式になる事はよく知られている。]

Smooth projective variety $D(N)$ (resp. $M(N)_{\mathbb{C}}$) は素体 $\mathbb{F}_p$ (resp. $\mathbb{Q}$) 上定義されている。グロタンディクの定理を用いれば, Spec $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の variety $D(N)$ のゼータ函数 $Z(D(N), X)$ は次の等式を満たす事がわかる。

$$Z(D(N), X) = \prod_{n=0}^{2g} (\det(1 - [\mathrm{Frob}(p)]_n X))^{(-1)^{n+1}}$$

ここで $[\mathrm{Frob}(p)]_n$ は定理7において説明したものを表す。

$D(N)$ のゼータ函数 $Z(D(N), X)$ について次の等式(定理9)を得る。

定理9 (Hatada [11]). $p \nmid N$ と仮定する。次の等式を得る。

$$Z(D(N), X) = \sqrt{\prod_{n=0}^{2g} P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X)^{(-1)^{n+1}}}$$

ここで右辺の定数項は1とする。

(この $Z(D(N), X)$ は X の有理式になる。)

定理9の系9.1 (Hatada [11]). $p \nmid N$ と仮定する。次の

等式を得る。

$$Z(M(N) \times_{\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[1/N]} \mathrm{Spec}\,\overline{\mathbb{F}}_p, X) = Z(D(N), X)^{\varphi(N)}.$$

注1. $f^{(n)}$ を定理2における写像とする。各々の整数 n に対して, $\tilde{\sigma}_{p,n} = f^{(n)}(\Gamma(N)_K \sigma_p \Gamma(N)_K)$ を得る。

注2. 標準的同型 $H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong H_n(M(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q})$ の下で, 次の等式を得る。n を $0 \leqq n \leqq 2g$ をみたす任意の整数とする。f_n を定理1における写像とする。

$$P_n^*(M(N)_{\mathbb{C}}, X) = \det(1 - (f_n(T(p\mathcal{O}_K)) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id.})X + (f_n(\Gamma(N)_K \sigma_p \Gamma(N)_K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id.})p^g X^2).$$

モジュラー曲線のゼータ函数は、多くの数学者により詳しく研究されてきた。しかし高次元のモジュラー多様体のゼータ函数については, モジュラー曲線の場合程は, 充分によく研究が未だなされていない。本研究では, 筆者は, ヒルベルトモジュラースキームの場合に, Hatada [7], [8], [9] で与えた方法を用いて, それらの性質を研究した。

REFERENCES

[1] Artin, M., Grothendieck, A., and Verdier, J. L.:

Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4). Lect. Notes in Math, v. 269, 270, 305, Springer, Berlin Heidelberg (1972-1973).

[2] Ash, A., Mumford, D., Rapoport, M., and Tai, Y.: Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties. Math. Sci. Press, Brookline (1975).

[3] Deligne, P.: Formes modulaires et répresentations ℓ-adiques. Sém. Bourbaki 1968/1969, exp. 355, Lect. Notes in Math., v. 179, Springer, Berlin Heidelberg, pp. 139-172 (1971).

[4] Deligne, P.: La Conjecture de Weil, I. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 43, 273-307 (1974).

[5] Eichler, M.: Quarternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktionen. Arch. Math., 5, 355-366 (1954).

[6] Hatada, K.: Siegel cusp forms as holomorphic differential forms on certain compact varieties. Math. Ann., 262, 503-509 (1983).

[7] Hatada, K.: Homology groups, differential forms and Hecke rings on Siegel modular varieties. (1986-1987). Topics in Mathematical Analysis (A volume dedicated to the memory of

A. L. Cauchy) (edited by Th. M. Rassias), World Scientific Pub., Singapore, pp. 371–409 (1989).

[8] Hatada, K.: Correspondences for Hecke rings and l-adic cohomology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. Proc. Japan Acad., 65A, 62–65 (1989).

[9] Hatada, K.: Correspondences for Hecke rings and (co-)homology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. Tokyo J. Math., 13, 37–62 and 493 (1990).

[10] Hatada, K.: On the action of Hecke rings on homology groups of smooth compactifications of Siegel modular varieties and Siegel cusp forms. Tokyo J. Math., 13, 191–205 (1990).

[11] Hatada, K.: On the local zeta functions of the Hilbert modular schemes. Proc. Japan Acad., 66A, 195–200 (1990).

[12] Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Ens Math., 71, 183–281 (1973).

[13] Namikawa, Y.: A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties,

I. Math. Ann., 221, 57-141 (1976); II. ibid., 201-241 (1976).

[14] Namikawa, Y.: Toroidal Compactification of Siegel Spaces. Lect. Notes in Math., v. 812, Springer, Berlin Heidelberg (1980).

[15] Rapoport, M.: Compactifications de l'espace de modules de Hilbert-Blumenthal. Comp. Math., 36, 255-335, (1978).

[16] Shimizu, H.: On discontinuous groups operating on the product of upper half planes. Ann. Math., 77, 33-71 (1963).

[17] Shimura, G.: Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions. Iwanami, Tokyo (1971).

[18] Shimura, G.: On some arithmetic properties of modular forms of one and several variables. Ann. Math., 97, 491-515 (1976).

[19] Hatada, K.: Correction of Printing to: Correspondences for Hecke rings and (co-)homology groups on smooth compactifications of Siegel modular varieties. Tokyo J. Math., 13, p.493 (1990).

Kazuyuki Hatada, Dept. of Math., Fac. of Edu., Gifu Univ.