数理解析研究所講究録
第753巻 1991年 18-21

行列の有理標準形の一計算法

竹島 卓 (Taku TAKESHIMA)
富士通（株） 横山 和弘 (Kazuhiro YOKOYAMA)
野呂 正行 (Masayuki NORO)

1990年12月27日

1 まえがき

行列 A $\in \mathbf{Q}^{n\times n}$ が与えられた時、A の有理標準形を求める問題を考える。行列の固有値問題、特に固有多項式を求める問題に対しては、計算効率上高価につく代数拡大体上の演算を回避できる Danilevskii の算法が極めて有利であることを文献 [竹島 & 横山 1990] において指摘した。しかしながら固有多項式については問題ないが、最少多項式や固有ベクトルを求める問題においては、Danilevskii の算法そのままでは不都合なところがあり、有理標準形を求める必要が生じる。

2 Frobenius 行列と Danilevskii の算法

2.1 Frobenius 行列

次の形の行列は Frobenius 行列と呼ばれる。

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & p_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & p_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & p_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & p_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Frobenius 行列 F の最少多項式 ψ_F は固有多項式 ϕ_F に一致し、

$$\psi_F = \phi_F = x^n - p_{n-1}x^{n-1} - \cdots - p_1 x - p_0 \tag{2}$$

となる。また、固有ベクトルは λ を固有多項式の根として、

$$\mathbf{v}_F = \begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - p_{n-1}\lambda^{n-2} - \cdots - p_2\lambda - p_1 \\ \lambda^{n-2} - p_{n-1}\lambda^{n-3} - \cdots - p_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda^2 - p_{n-1}\lambda - p_{n-2} \\ \lambda - p_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

と表わされる。行列 A が相似変換によって $F = S^{-1}AS$ と表わされる場合には、A の最少多項式 ψ_A、固有多項式 ϕ_A は共に ϕ_F に一致し、A の固有ベクトル $\mathbf{v}_A$ は

$$\mathbf{v}_A = S\mathbf{v}_F \tag{4}$$

と表わすことができる。

2.2 Danilevskii の算法

数値的算法ではなく代数的算法において固有値問題を解くには、まず何らかの方法で固有多項式 $\phi(x)$ を計算してからその根 λ を求め、しかるのち線形方程式 $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$ を解いて、λ に対応する固有ベクトル $\mathbf{v}$ を求めること

が基本的である。しかし、このような教科書的なアルゴリズムは少なくとも次の二つの理由によって、効率的とはいえない。第一は、固有多項式の根の数だけ線形方程式を解くことを繰り返す点であり、第二は、より深刻な問題であるが、根がもとの係数体の中にはいらない場合、代数拡大体上の演算が不可避となることである。第一の理由によりアルゴリズムの計算量は $O(n^4)$ になる。第二の理由を考慮すると、計算量が $O(n^5)$ 程度になってしまう。代数的拡大体上の乗算は定義多項式の次数の 2 乗程度の計算量、除算は、定義多項式を使用した GCD 演算が主要部となるため、定義多項式の次数の 4 乗程度の計算量となるからである。さらに代数的算法では固有多項式を求めることが前提となっているため、効率良い固有多項式算法も必要である。

Danilevskii の算法では、適当な 1 個のベクトルで生成される巡回基底の定める相似変換によって、与えられた行列 A を Frobenius 形の行列に変換し、固有多項式、最少多項式、固有ベクトルを計算するよう試みる。条件が良い場合、すなわち巡回基底が唯 1 個のベクトルから生成される場合には、Danilevskii の算法は $O(n^3)$ でこれらの式を計算する。しかし、一般には複数個のベクトル $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, ..., \mathrm{f}_r$ で生成される巡回基底 $< \mathrm{f}_1, \mathrm{Af}_1, ..., \mathrm{A}^{n_1-1}\mathrm{f}_1; \mathrm{f}_2, \mathrm{Af}_2, ..., \mathrm{A}^{n_2-1}\mathrm{f}_2; ...; \mathrm{f}_r, \mathrm{Af}_r, ..., \mathrm{A}^{n_r-1}\mathrm{f}_r >$ が得られ、自然基底[1] $< \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, ..., \mathrm{e}_n >$ からの基底の変換行列を S として、$\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$ が次の形をした行列になる場合がある。

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} \mathrm{F}_1 & \mathrm{D}_{1,2} & \mathrm{D}_{1,3} & \cdots & \mathrm{D}_{1,r} \\ \mathrm{O} & \mathrm{F}_2 & \mathrm{D}_{2,3} & \cdots & \mathrm{D}_{2,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{F}_{r-1} & \mathrm{D}_{r-1,r} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \cdots & \mathrm{O} & \mathrm{F}_r \end{pmatrix} \tag{5}$$

ここに、各 F_i $(i = 1, 2, ..., r)$ は Frobenius 行列で、各 $\mathrm{D}_{i,j}$ は次の形をした行列である。

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d_0^{(i,j)} \\ 0 & \cdots & 0 & d_1^{(i,j)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n_i-1}^{(i,j)} \end{pmatrix} \tag{6}$$

固有多項式を求めるためならば 式（5） の形で十分である。しかし最少多項式や固有ベクトルを求めるためには 式（5） の形では不十分である。そこで以下では 式（5） においてすべての $\mathrm{D}_{i,j}$ が O 行列となり、同時に全ての $i = 1, 2, ..., r-1$ について、

$$\psi_{i+1} | \psi_i \tag{7}$$

が成り立っているような形の行列[2]を具体的に計算する方法を考察する。

3　最少多項式とその生成ベクトル

先ず次の良く知られた定理を引用しておく。

定理 1 (良く知られた定理) 行列 $\mathrm{A} \in \mathrm{Q}^{n\times n}$ の最少多項式 ψ をとする。あるベクトル $\mathrm{g} \in \mathrm{Q}^n$ があって、g の最少多項式が ψ と一致する。

定理 1にいうベクトル g を A の（最少多項式の）生成ベクトルと呼ぶことにする。
我々の目標は、

1. 生成ベクトルを具体的に求めること。

2. ついで、それを利用して式 （5）の $\mathrm{D}_{i,j}$ を O 行列にすること、

[1]
$$\mathrm{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{第 } i \text{ 要素}$$

[2] 有理標準形、[Gantmacher1959] では First natural normal form.

の二つである。以下では簡単のために $r=2$ の場合について述べる。一般の場合は $r=2$ の場合を帰納的に適用することによって目的が達成できる。

$\mathrm{F}=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{AS}$ が既に求まり、F が2つの Frobenius ブロックを持つとする。

$$\mathrm{F}=\begin{pmatrix}\mathrm{F}_1 & \mathrm{D}\\ \mathrm{O} & \mathrm{F}_2\end{pmatrix} \tag{8}$$

ただし、Frobenius 行列 F_1 、F_2 のサイズをそれぞれ n_1 、n_2 とし、

$$\mathrm{D}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & d_0\\ 0 & \cdots & 0 & d_1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & 0 & d_{n_1-1}\end{pmatrix} \tag{9}$$

と置く。

F_1 の最少多項式を ψ_1 、F_2 の最少多項式を ψ_2 とする。さらに、

$$\delta=d_{n_1-1}x^{n_1-1}+\cdots+d_1x+d_0 \tag{10}$$

と置く。次の式が成り立つことを注意しておく。[3]

$$\psi_2(\mathrm{F})\mathbf{f}_2=\delta(\mathrm{F})\mathbf{f}_1. \tag{11}$$

最少多項式とその生成元について次の定理を得る。

定理 2 (最少多項式とその生成元)

$$\gamma_0=\gcd(\psi_2,\delta,\psi_1) \tag{12}$$

と置く。[4]すると、

$$\psi=\frac{\psi_1\psi_2}{\gamma_0} \tag{13}$$

は F の最少多項式である。さらに、最少多項式の生成元 g は

$$\mathbf{g}=g_1(\mathrm{F})\mathbf{f}_1+g_2(\mathrm{F})\mathbf{f}_2 \tag{14}$$

で与えられる。ただし、g_1 と g_2 とは式 (*12*) の拡張 gcd により、

$$g_0\psi_1+g_1\psi_2+g_2\delta=\gamma_0 \tag{15}$$

が成立するような多項式である。ここに g_0 も多項式である。

証明は省略する。

4 ブロック対角化

次に非対角部分 $\mathrm{D}_{i,j}$ を O にする方法を考える。行列が既に (8) の形で得られており、しかも F_1 の最少多項式 ψ_1 が F 全体の最少多項式 ψ に一致するものとする。(すなわち、$\mathbf{f}_1$ が最少多項式の生成元である。) これより、式 (13) で $\psi=\psi_1$ とおいて、

$$\gamma_0=\psi_2 \tag{16}$$

を得る。これから

$$\delta'=\frac{\delta}{\gamma_0}=\frac{\delta}{\psi_2} \tag{17}$$

と置き、さらに

$$\mathbf{f}_2'=\mathbf{f}_2-\delta'(\mathrm{F})\mathbf{f}_1 \tag{18}$$

[3] F_1 部分の巡回基底の生成元は e_1 、F_2 部分のそれは e_{n_1+1} であるが、便宜上それらを $\mathbf{f}_1$ 、$\mathbf{f}_2$ と置いた。

[4] gcd は主係数が 1 に正規化されるものとする。

と置く。すると

$$\psi_2(F)f_2' = \psi_2(F)f_2 - [\psi_2 \cdot \delta'](F)f_1 \tag{19}$$

となるが、式（17）により $\psi_2\delta' = \delta$ であるから

$$\psi_2(F)f_2' = \psi_2(F)f_1 - \delta(F)f_1 \tag{20}$$

となる。この右辺は式（11）により0であるから

$$\psi_2(F)f_2' = 0 \tag{21}$$

となる。よって、基底を $< f_1, Ff_1, ..., F^{n_1-1}f_1; f_2, Ff_2, ..., F^{n_2-1}f_2 >$ から $< f_1, Ff_1, ..., F^{n_1-1}f_1; f_2', Ff_2', ..., F^{n_2-1}f_2' >$ に取り替える行列をSとすれば

$$S^{-1}FS = \begin{pmatrix} F_1 & O \\ O & F_2 \end{pmatrix} \tag{22}$$

となり、準対角化が達成される。[5]

先に最少多項式とその生成元について述べたことから、

$$\psi_2 = \gcd(\psi_2, \delta, \psi_1) \tag{23}$$

が成立すれば ψ_1 はFの最少多項式であり、$g = f_1$ であるから、その場合は直ちに非対角部分Dの消去を実施すれば良いことが分かる。

5 あとがき

前節3および4に述べた方法を、Fの一対の対角ブロックに対して次次と適用することにより有理標準形が得られることは、若干の補足を要するがここでは省略する。

本来の目的は、代数的拡大体上の演算を回避して固有ベクトルを求めることであったが、計算量的にはあまり得にはなっていないようである。（今のところ正確な計算量を把握していない。）しかし、有理標準形を求める計算方法としては意味があると考える。実用的にどうであるかは実際にプログラミングして較べてみる必要がある。

6 References

竹島 卓、横山 和弘, 連立代数方程式の一解法－剰余環上の線形写像の固有ベクトルの利用, 数式処理通信, 24, pp.27-36 (1990).

Gantmacher, F. R., The theory of matrices, volume one, Chelsea Publishing Company, New York(1959).

線形代数の計算法（上）, 古屋 茂 校閲, 小国 力 訳, 産業図書 (1970).

[5] この方法は、[Gantmacher1959] に述べられている。