数理解析研究所講究録
第753巻 1991年 88-95

Painlevéの方程式Iに関連する数式処理の一例について

笠嶋友美 (Tomomi Kasajima)
上智大学理工学部

木村俊房 (Toshifusa Kimura)
東京理科大学理工学部

1 目的

この講演の目的は次のように述べられる. 5変数 t, x, y, u, v の多項式

$$
\begin{aligned}
f &= 9(2y(u-x)+3)v^2+18yv-72y(u-x)(u^3-x^3) \\
&\quad -108(u+2x)(u-x)^2-36ty(u-x)^2-2y^3(u-x)+3y^2, \\
p &= (u-x)(9v^2-36(u^3-x^3)-18t(u-x)-y^2)^2+6(3v+y) \\
&\quad \times(9v^2-36(u^3-x^3)-18t(u-x)-y^2)+324(u-x)^2
\end{aligned}
$$

を考え, d を

$$d=(f_x g_y - f_y g_x)-(f_u g_v - f_v g_u)$$

で定義する. そのとき,

(A) $\qquad f=0, \quad p=0 \Longrightarrow d=0$

を示すことである.

代数的には次のように言いかえられる.

(B) $\qquad d$ は f, p で生成される $\mathbf{C}[t,x,y,u,v]$ のイデアルの根基に含まれる.

2 f, p の素性と d の意味

Painlevé の方程式といわれる6個の2階非線形常微分方程式

$$
\begin{aligned}
I \qquad & \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 6\lambda^2 + t \\
\vdots \qquad & \\
VI \qquad & \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda-1} + \frac{1}{\lambda-t}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

がある．これらの方程式が 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y$$

からモノドロミ保存変形方程式として得られることが知られていた．これに対し，岡本和夫氏は次のことを示した．

1) Painlevé の方程式はすべて 2 連立 1 階微分方程式のハミルトン系

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\lambda}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \mu} \\
\dfrac{d\mu}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \lambda}
\end{cases}
$$

に変換される．ここで H は λ,μ の多項式で，係数は t の有理関数である．これらの 6 個の方程式系を Painlevé 系 $P_J(J = I, II, \cdots, VI)$ と呼ぶことにする．

2) Painlevé 系 P_J は 2 階線形常微分方程式

$$L_J: \qquad y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$$

に対するモノドロミ保存変形方程式として得られる．

L_J は $x = \lambda$ を見掛けの特異点として持ち，そこにおける指数は $0, 2$ である．L_J は λ, μ, H をパラメータとして含むが，H は $x = \lambda$ が見掛けの特異点であるという条件から t, λ, μ の関数として定まる．

L_I と L_{VI} とのみを書いておく．

$$
\begin{aligned}
L_I: \qquad & \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x-\lambda}\frac{dy}{dx} + \left(-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda}\right)y = 0, \\
L_{VI}: \qquad & \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{1}{x-\lambda}\right)\frac{dy}{dx} \\
& + \left(\frac{\chi}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)}\right)y = 0.
\end{aligned}
$$

L_J に対し，見掛けの特異点 $x = \lambda$ における指数を 0,　$n+1$ とした方程式

$$L_I^n: \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{n}{x-\lambda}\frac{dy}{dx} + (-4x^3 - 2tx - 2H + \frac{\mu}{x-\lambda})y = 0,$$

$$L_{VI}^n: \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{1-\kappa_0}{x} + \frac{1-\kappa_1}{x-1} + \frac{1-\theta}{x-t} - \frac{n}{x-\lambda})\frac{dy}{dx}$$
$$+(\frac{\chi}{x(x-1)} - \frac{t(t-1)H}{x(x-1)(x-t)} + \frac{\lambda(\lambda-1)\mu}{x(x-1)(x-\lambda)})y = 0.$$

を考える．Hは$t=\lambda$が見掛けということからt,λ,μの関係として定まる．このHを使い，Hamilton 系

$$P_J^n \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda}{dt} &= \dfrac{\partial H}{\partial \mu} \\ \dfrac{d\mu}{dt} &= -\dfrac{\partial H}{\partial \lambda} \end{cases}$$

を対応させる．もちろん，L_J^1はL_Jと，P_J^1はP_Jと一致する．$n=2$ならば，Hはt,λ,μの有理関数，$n>2$ならば，Hはt,λ,μの代数関数となる．$J=I,II,\ldots,VI, n=2,3$に対し，P_J^nはL_J^nのモノドロミ保存変形方程式であることが示される．このことは，L_J^nのモノドロミ・データを考えると，このデータが generic であれば，$n=1$でも$n=2,3$でも実現されることを示していると考えられる．ただし，nにより線形方程式に含まれるパラメータ，例えばλ,μは異なる値を取るとしなければならい．L_J^1, L_J^nを

$$L_J^1: \qquad y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$$
$$L_J^n: \qquad z'' + B_1(x)z' + B_2(x)z = 0$$

と書いておく．L_J^1とL_J^nが同じモノドロミ・データを持つことと，変換

$$z = P_1(x)y' + P_2(x)y \qquad (P_1, P_2 : x \text{ の有理関数})$$

によってL_J^1とL_J^nが移り合うことは同値である．

L_I^2を

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{2}{x-l}\frac{dz}{dx} + (-4x^3 - 2tx - 2h + \frac{m}{x-l})z = 0$$

とすると，これが$L_I = L_I^1$と同じモノドロミを持つという仮定から

$$\lambda = -2l + \frac{(6l^2+t)^2}{m^2}, \qquad \mu = -\frac{m}{2} + \frac{6l(6l^2+t)}{m} - \frac{2(6l^2+t)^3}{m^3}$$

が得られる．これに対し

$$\text{(J)} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial l}\frac{\partial\mu}{\partial m}-\frac{\partial\lambda}{\partial m}\frac{\partial\mu}{\partial l}=1$$

が成り立つ．

同様なことを $L_{VI}=L_{VI}^1$ と L_{VI}^2 に対して考えると，λ,μ は t,l,m の有理関数として表され，(J) が成り立つ．しかし (J) の手による検算は手におえない．金田康正氏に数式処理でやってもらった（"数学" **37**,1985）．

この講演の目的は $L_I=L_I^1$ と

$$L_I^3: \qquad \frac{d^2z}{dx^2}-\frac{3}{x-l}\frac{dz}{dx}+(-4x^3-2tx-2h+\frac{m}{x-l})z=0$$

に対し同様なことを考えて，(J) の成立を示すことである．ここで $P_1(x),P_2(x)$ は

$$P_1(x)=\frac{1}{x-\lambda},\quad P_2(x)=p(x-\lambda)+q-\frac{\mu}{x-\lambda}$$

ととれる．この場合，λ,μ は t,l,m の有理関数でなく，

$$\text{(I)} \qquad \left\{\begin{array}{lcl}\Phi(t,l,m,\lambda,\mu) &=& 0,\\ \Psi(t,l,m,\lambda,\mu) &=& 0\end{array}\right.$$

から定まる代数関数である．ここで

$$\begin{aligned}\Phi &= 9(2m(\lambda-l)+3)\mu^2+18m\mu-72(\lambda-l)(\lambda^3-l^3)\\ &\quad -108(\lambda+2l)(\lambda-l)^2-36tm(\lambda-l)^2-2m^3(\lambda-l)+3m^2,\\ \Psi &= (\lambda-l)(9\mu^2-36(\lambda^3-l^3)-18t(\lambda-l)-m^2)^2\\ &\quad +6(3\mu+m)(9\mu^2-36(\lambda^3-l^3)-18t(\lambda-l)-m^2)+324(\lambda-l)^2\end{aligned}$$

である．

一般に，(I) で与えられる陰関数に対し

$$\frac{\partial\lambda}{\partial l}\frac{\partial\mu}{\partial m}-\frac{\partial\lambda}{\partial m}\frac{\partial\mu}{\partial l}-1=\frac{1}{\begin{vmatrix}\Phi_\lambda & \Phi_\mu\\ \Psi_\lambda & \Psi_\mu\end{vmatrix}}\left(\begin{vmatrix}\Phi_l & \Phi_m\\ \Psi_l & \Psi_m\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\Phi_\lambda & \Phi_\mu\\ \Psi_\lambda & \Psi_\mu\end{vmatrix}\right)$$

が成り立つ．よって

$$\Delta=(\Phi_l\Psi_m-\Phi_m\Psi_l)-(\Phi_\lambda\Psi_\mu-\Phi_\mu\Psi_\lambda)$$

とおいたとき，

$$\Phi = 0, \Psi = 0 \Longrightarrow \Delta = 0$$

を示せばよい．

ここで

$$t \to t, l \to x, m \to y, \lambda \to u, \mu \to v, \Phi \to f, \Psi \to p, \Delta \to d$$

と置き換えたのが §1 で述べた f, p, d である．

3 方針

極めて素朴な方法をとった．

まず，v に注目すると，f, p は vについて，それぞれ，2 次，4 次である．fを使って，p の vについての次数を下げて，vの 1 次式 p_1 にする:

$$\begin{aligned} p_1 &= (216y(2y^3 + 162x^2 + 27t)u^2 + \cdots)v \\ &\quad +(-1944y(-4xy^2 + 108x^4 + 36tx^2 + 3t^2)u^4 + \cdots) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} p_1 &= -(2y(u-x)+3)^3 p + (9(2y(u-x)+3)^2(u-x)v^2 \\ &\quad +(9(2y(u-x)+3)^2 + 27(2y(u-x)+3))v + \cdots)f. \end{aligned}$$

d は vの 6 次式で，

$$d = 1458(u-x)v^6 - 2916(y(u-x)-2)v^5 + \cdots$$

ある．$y^4 d$ に対し，f, p を使って，vの次数を下げていくと，

$$\begin{aligned} d_1 &= (-11664(4y^4 - 648x^3y^2 + \cdots)u + \cdots)v \\ &\quad +(104976(16x^2y^4 + \cdots)u^3 + \cdots) \end{aligned}$$

となる．

p_1, d_1はともに $u - x$ で割れて，

$$\begin{aligned} p_1 &= 36(u-x)((6y(2y^3 + \cdots)u + \cdots)v + 54y(4xy^2 + \cdots)u^3 + \cdots), \\ d_1 &= 1296(u-x)(-9(4y^4 - \cdots)v + 81(16x^2y^4 + \cdots)u^2 + \cdots) \end{aligned}$$

となる．

$$p_1 = 36(u-x)(g_1(t,x,y,u)v + g_2(t,x,y,u)),$$

$$d_1 = 1296(u-x)(h_1(t,x,y)v + h_2(t,x,y,u))$$

とおいて，p_1, d_1 から vを消去する:

$$\begin{aligned} s &= g_1(t,x,y,u)d_1 - 36h_1(t,x,y)p_1 \\ &= 1296(u-x)((6\cdot 2\cdot 81\cdot 16x^2y^8+\cdots)u^3+\cdots) \\ &= 1296\cdot 12y^4(u-x)^2(81(16x^2y^4+\cdots)u^2+\cdots). \end{aligned}$$

一方，fと p との vに関する終結式 rは

$$\begin{aligned} r &= 6198727824(16x^2y^4+\cdots)u^6+\cdots \\ &= 76527504(u-x)^4(81(16x^2y^4+\cdots)u^2+\cdots) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで

$$19683(u-x)^2 s = 4y^4 r$$

が成り立つ．これから (A) がいえる．

4 計算の実行

計算は数式処理 Macsyma, Mathematica も利用したが，REDUCE が主役をなした．REDUCE での演算の使用機種は PC9801VX (B.U.G.，REDUCE on SPARK のためにボードを増設,2 メガバイト）および東大大型計算機センターの汎用計算機 VOS3 である．入出力の例として f と p との v についての終結式 r を求める途中段階を示す．§1 の f,p を，それぞれ

$$\begin{aligned} f &= 9av^2+bv+c \\ p &= Av^4+Bv^3+Cv^2+Dv+E \end{aligned}$$

とおくと，

$$r = \begin{vmatrix} 9a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9a & b & c \\ A & B & C & D & E & 0 \\ 0 & A & B & C & D & E \end{vmatrix}$$

である．多項式 p_1 は

$$p_1 = -a^3 p + \left(9a^2(u-x)v^2 + \cdots\right) f$$

と書ける．§3 におけるように

$$p_1 = 36(u-x)(g_1 v + g_2)$$

とおくと，

$$a^6 r = 36^2(u-x)^2 \begin{vmatrix} 9a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & g_1 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_1 & g_2 \end{vmatrix}$$

$$= 36^2 \cdot 9^3 \cdot a^3 (u-x)^2 (9ag_{22} + cg_{12} - bg_1 g_2)$$

が得られる．これから

$$r = 4^2 \cdot 9^5 \cdot a^{-3} (u-x)^2 (9ag_{22} + cg_{12} - bg_1 g_2)$$

となる．ここで計算例として，次の式のデータを示す．

$$r1 = 9ag_{22} + cg_{12} - bg_1 g_2$$

1 回の入力は,MS-DOS 上の REDUCE では，256 バイト迄である．(ちなみに，UNIX 上では，512 バイトまで可能である．) データは細かく分けた方が確実であった．修正を見つける為にも役立った．r1 の出力の方は 10 インチ巾のプリンタ用紙にぎっしり 4 枚分であるため，極く，始めの部分だけを掲げる．

なお r_1 は，さらに $(u-x)^2$ で割り切れることが分る．

ところで，REDUCE のパッケージの中に resultant.red のファイルがあるので，f と p の vに関しての resultant を直接求めてみるとコンピュータの方は，因数分解をしていない．さらに fと d の vに関する resultant の計算時間は，東大の大型計算機センターの REDUCE では 575ms であったが，p と d の vに関する resultant は,3 メガでは，次のメッセージ:
"V-HEAP の領域が不足しました．(SYSTEM:BIGNUM+), 変数 SHOWTIME は値を持っていません．(HLISP)"
が現れて DEBUG に移行した．

✪ f と p との v についての終結式を求める途中段階

```
% 1990 .      r1.dat;
on echo;
pause;
on ratarg;
off allfac;
% order v,u,y,x,t;
clear(a,b,c,u,x);
% ------------------------------------------ a,b,c ------ ;
a:=2*y*u-2*x*y+3 $
b:=18*y $
c1:=-72*y*(u**4)+(72*x*y-108)*(u**3)-36*t*y*(u**2) $
c2:=(-2*y**3+72*x**3*y+72*t*x*y+324*x**2)*u $
c3:=2*x*y**3+3*y**2-72*x**4*y-36*t*x**2*y-216*x**3 $
c:=c1+c2+c3 $
% ------------------------------------------- g1 ---------- ;
g11:=6*y*(2*y**3+162*x**2+27*t)*u $
g12:=-3*(4*x*y**4-12*y**3+324*x**3*y+54*t*x*y-486*x**2-81*t) $
g1:=g11+g12 $
% ------------------------------------------- g2 ---------- ;
g21:=54*y*(4*x*y**2-108*x**4-36*t*x**2-3*t**2)*u**3 $
g22:=9*(-48*x**2*y**3+4*t*y**3+108*x*y**2+1944*x**5*y+648*t*x**3*y)*u**2 $
g23:=9*(54*t**2*x*y-18*y-972x**4-324*t*(x**2)-27*(t**2))*u**2 $
g24:=(4*y**5+216*x**3*y**3-72t*x*y**3-972*x**2*y**2+162*t*y**2)*u $
g25:=(-17496*(x**6)*y-5832*t*(x**4)*y-486*t**2*x**2*y+1296*x*y)*u $
g26:=(17496*x**5+5832*t*x**3+486*t**2*x-243)*u $
g27:=-4*x*y**5+12*y**4+36*t*x**2*y**3-162*t*x*y**2+5832*x**7*y $
g28:=1944*t*x**5*y+162*t**2*x**3*y-648*x**2*y+81*t*y-8748*x**6 $
g29:=-2916*t*x**4-243*t**2*x**2+243*x $
g221:=g21+g22+g23 $
g222:=g24+g25+g26 $
g223:=g27+g28+g29 $
g2:=g221+g222+g223 $
% ------------------------------------------- r1 -------- ;
rr1:=9*a*g2**2 $
rr2:=c*g1**2 $
rr3:=(-b*g1)*g2 $
r1:=rr1+rr2+rr3 $
```

$$\text{r1 u**7} = 52488 Y^3 (9 T^4 + 216 T^3 X^2 + 1944 T^2 X^4 - 24 T^2 X Y^2 + 7776 T X^6 - 288 T X^3 Y^2 + 11664 X^8 - 864 X^5 Y^2 + 16 X^2 Y^4)$$

$$\text{r1 u**6} = -324 Y^2 (10206 T^4 X Y - 6561 T^4 + 244944 T^3 X^3 Y - 104976 T^3 X^2 + 648 T^3 Y^3 + 2204496 T^2 X^5 Y - 787320 T^2 X^4 - 15552 T^2 X^2 Y^3 - 52812 T^2 X^2 + 29160 T^2 X Y^2 + 2916 T^2 Y + 8817984 T X^7 Y - 3779136 T X^6 - 256608 T X^4 Y^3 - 633744 T X^4 + 279936 T X^3 Y^2 + 34992 T X^2 Y - 864 T X Y^5 + 864 T Y^4 + 13226976 X^9 Y - 8503056 X^8 - 839808 X^6 Y^3 - 1901232 X^6 + 1049760 X^5 Y^2 + 104976 X^4 Y + 12960 X^3 Y^5 + 70416 X^3 Y^2 - 22032 X^2 Y^4 + 3888 X Y^3 + 32 Y^7)$$

✪ 以下略