数理解析研究所講究録
第 753 巻 1991 年 115-128

二変数超幾何関数の偏微分方程式系の変換と数式処理

山梨大（工）　河西 和明 (Kazuaki Kasai)
栗原 光信 (Mitsunobu Kurihara)

1. はじめに

2変数の超幾何関数等が満たす，次の偏微分方程式を考える．

$$\phi r = A_1 s + B_1 p + C_1 q + D_1 z \tag{1.1}$$

$$\psi t = A_2 s + B_2 p + C_2 q + D_2 z \tag{1.2}$$

ただし，$\phi, \psi, A_i, B_i, C_i, D_i\ (i=1,2)$ は x と y の有理式とし，

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \tag{1.3}$$

であるとする．

小野寺[1]は，(1.1), (1.2) から完全積分可能条件を満足する全微分方程式系を導き，さらに，この全微分方程式系を1変数を定数とした断面における常微分方程式に変換するアルゴリズムを研究した ([2]参考)．変換に際して，いくつかの場合分けを行い，REDUCE を用いてアルゴリズムを実現しているが，完成していない場合や，アルゴリズムは出来ていても，ハード的制約から，ある種の方程式については求められていないものがある（後述）．

本稿では，未完成な部分を補い，求められていない方程式についても変換出来るよう，MACSYMA を用いて実験した様子について述べる．

2. 変換について

(1.1) を y で偏微分し，(1.2) を x で偏微分して得られる方程式を次のようにおく．

$$\phi\frac{\partial r}{\partial y} - A_1\frac{\partial s}{\partial y} = \left(\frac{\partial A_1}{\partial y} + B_1\right)s + C_1 t - \frac{\partial \phi}{\partial y} r + \frac{\partial B_1}{\partial y} p + \left(\frac{\partial C_1}{\partial y} + D_1\right) q + \frac{\partial D_1}{\partial y} z \tag{2.1}$$

$$\psi\frac{\partial t}{\partial x} - A_2\frac{\partial s}{\partial x} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} + C_2\right)s - \frac{\partial \psi}{\partial x} t + B_2 r + \left(\frac{\partial B_2}{\partial x} + D_2\right) p + \frac{\partial C_2}{\partial x} q + \frac{\partial D_2}{\partial x} z \tag{2.2}$$

これらの式の左辺が，$\dfrac{\partial s}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial s}{\partial y}$ の線形形式になっていることに注意する．この線形形式の係数の行列式は，

$$\Delta = \phi\psi - A_1 A_2 \tag{2.3}$$

となる．ここで，$\Delta = 0$(*Case 1*)，$\Delta \neq 0$(*Case 2*) のように場合分けする．*Case 2* では次の4通りにさらに場合分けする．

$$\begin{array}{lll} A_1 \neq 0, & A_2 \neq 0 & (\textit{Case 2-1}) \\ A_1 = 0, & A_2 \neq 0 & (\textit{Case 2-2}) \\ A_1 \neq 0, & A_2 = 0 & (\textit{Case 2-3}) \\ A_1 = 0, & A_2 = 0 & (\textit{Case 2-4}) \end{array}$$

2.1. *Case 1*

Case 1 はよく知られている ([3])．$\Delta = 0$ であるから，(2.1), (2.3) から $\dfrac{\partial s}{\partial x}$ と $\dfrac{\partial s}{\partial y}$ を消去でき，この式と (1.1), (1.2) から

$$\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ z \end{pmatrix} \tag{2.1.1}$$

のように解ける．したがって，全微分方程式は直ちに

$$d\begin{pmatrix} z \\ p \\ q \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} dx + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \beta_3 & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix} dy \right\} \begin{pmatrix} z \\ p \\ q \end{pmatrix} \tag{2.1.2}$$

となる．ここで，(2.1.2) が完全積分可能条件を満足すれば，$dy = 0$（または $dx = 0$）として，SECTION における常微分方程式が求められる．

2.2. *Case 2* の全微分方程式系

Case 2 では，次の形の全微分方程式系を導く．

$$dz_i = \sum_{k=1}^{4} \omega_{i\,k} z_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{2.2.1}$$

ただし，

$$\omega_{i\,k} = f_{i\,k}(x, y)dx + g_{i\,k}(x, y)dy \tag{2.2.2}$$

である．

Case 2-1 では，$z_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ を次のようにおく．

$$\begin{cases} z_1 = & z \\ z_2 = & \phi p + \phi_1 z \\ z_3 = & \psi q + \psi_1 z \\ z_4 = & \Delta s + \xi p + \zeta q + \eta z \end{cases} \tag{2.2.3}$$

$\phi_1, \psi_1, \xi, \zeta, \eta$ は未定係数であるが，これらは以下のように決定する．

$$dz_2 = pd\phi + \phi dp + zd\phi_1 + \phi_1 dz \tag{2.2.4}$$

のうち，$\phi dp + \phi_1 dz$ の部分について，(1.1), (2.2.3) を用いて r, s, p を消去し

$$\begin{aligned} \phi dp + \phi_1 dz = \frac{1}{\Delta}(A_1 dx + \phi dy)\, z_4 + \Bigg[& \underbrace{\left(C_1 - \frac{A_1}{\Delta}\zeta\right) q}_{(1)} \\ & + \left\{ \left(D_1 - \frac{A_1}{\Delta}\eta\right) - \frac{\phi_1}{\phi}\left(B_1 - \frac{A_1}{\Delta}\xi + \phi_1\right) \right\} z_1 \\ & + \frac{1}{\phi}\left(B_1 - \frac{A_1}{\Delta}\xi + \phi_1\right) z_2 \Bigg] dx \\ & + \left\{ \underbrace{\left(\phi_1 - \frac{\phi}{\Delta}\zeta\right) q}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\xi}{\Delta}\phi_1 - \frac{\phi}{\Delta}\eta\right) z_1}_{(3)} - \frac{\xi}{\Delta} z_2 \right\} dy \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

のように計算する．同様に

$$dz_3 = qd\psi + \psi dq + zd\psi_1 + \psi_1 dz \qquad (2.2.6)$$

の $\psi dq + \psi_1 dz$ について，(1.2), (2.2.3) を用いて t, s, q を消去すると

$$\begin{aligned}\psi dq + \psi_1 dz = \frac{1}{\Delta}(A_2 dy + \psi dx) z_4 + \Bigg[& \underline{\left(B_2 - \frac{A_2}{\Delta}\xi\right)p}_{(4)} \\ & + \left\{\left(D_2 - \frac{A_2}{\Delta}\eta\right) - \frac{\psi_1}{\psi}\left(C_2 - \frac{A_2}{\Delta}\zeta + \psi_1\right)\right\} z_1 \\ & + \frac{1}{\psi}\left(C_2 - \frac{A_2}{\Delta}\zeta + \psi_1\right) z_3 \Bigg] dy \\ & + \left\{ \underline{\left(\psi_1 - \frac{\psi}{\Delta}\xi\right)p}_{(5)} + \underline{\left(\frac{\zeta}{\Delta}\psi_1 - \frac{\psi}{\Delta}\eta\right)z_1}_{(6)} - \frac{\zeta}{\Delta} z_3 \right\} dx \qquad (2.2.7)\end{aligned}$$

ここで，(2.2.5), (2.2.7) の下線部を 0 とおいて，未定係数を決定する．すなわち，下線部 (1) より ζ を定め，(2) より ϕ_1 を定める．また，下線部 (4) より ξ を定め，(5) より ψ_1 を定める．このとき，(3) と (6) は同じ関係式になり，これから η が定まる．こうして求められた $\phi_1, \psi_1, \xi, \zeta, \eta$ を (2.2.3) に代入して微分すると (2.2.1) の形の全微分方程式系が導かれる．

Case 2-2 では，

$$\begin{cases} z_1 = & z \\ z_2 = & \phi p + \phi_1 z + \phi_2 q \\ z_3 = & \psi q + \psi_1 z \\ z_4 = & \Delta s + \xi p + \zeta q + \eta z \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

のようにおく． $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \xi, \zeta, \eta$ は未定係数である．

$$dz_3 = qd\psi + \psi dq + zd\psi_1 + \psi_1 dz \qquad (2.2.9)$$

のうち $\psi dq + \psi_1 dz$ について，(1.1), (1.2), (2.2.8) を用いて r, t, s, q を消去し，$p\,dy$ の係数，$p\,dx$, $z\,dx$ の係数を 0 とおく．

$$dz_2 = pd\phi + \phi dp + zd\phi_1 + \phi_1 dz + qd\phi_2 + \phi_2 dq \qquad (2.2.10)$$

のうち，$\phi dp + \phi_1 dz + \phi_2 dq$ について，(1.1), (1.2), (2.2.8) を用いて r, t, s, p を消去し，$q\,dx$ の係数を 0，$\zeta q\,dy$, $q\,dy$ の係数を 0 とおく．以上から得られる方程式を連立させて，未定係数を決定する．後は，(2.2.3) に代入して微分する．

Case 2-3 では，

$$\begin{cases} z_1 = & z \\ z_2 = & \phi p + \phi_1 z \\ z_3 = & \psi q + \psi_1 z + \psi_2 \\ z_4 = & \Delta s + \xi p + \zeta q + \eta z \end{cases} \qquad (2.2.11)$$

とおく． $\phi_1, \psi_1, \psi_2, \xi, \zeta, \eta$ は未定係数である．

$$dz_2 = pd\phi + \phi dp + zd\phi_1 + \phi_1 dz \tag{2.2.12}$$

のうち，$\phi dp + \phi_1 dz$ について，(1.1), (1.2), (2.2.11) を用いて r, t, s, p を消去し，$q\,dx, q\,dy, z\,dy$ の係数を 0 とおく．

$$dz_3 = qd\psi + \psi dq + zd\psi_1 + \psi_1 dz + pd\psi_2 + \psi_2 dp \tag{2.2.13}$$

のうち $\psi dq + \psi_1 dz + \psi_2 dp$ について，(1.1), (1.2), (2.2.11) を用いて r, t, s, q を消去し，$p\,dy$ の係数を 0，$\xi p\,dx, p\,dx$ の係数を 0 とおく．以上から得られる方程式を連立させて，未定係数を決定し，(2.2.3) に代入して微分する．

Case 2-4 では，

$$\begin{cases} z_1 = & z \\ z_2 = & \phi p \\ z_3 = & \psi q \\ z_4 = & \Delta s \end{cases} \tag{2.2.14}$$

とおけばよい．

2.3. *Case 2* の各 SECTION における方程式

2.2. で述べたように，全微分方程式系 (2.2.1), (2.2.2) が求められたとする．このとき，(2.2.1) において $dy = 0$ として得られる右辺の係数行列は *Case 2-4* を除いて

$$f = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

なる形をしている ($*$ は 0 になるとは限らない部分)．また，*Case 2-4* の場合には，要素を適当に並べかえることにより，(2.3.1) のようにできる．したがって，f_{12}, f_{24}, f_{43} が 0 でなければ，x について 4 階の常微分方程式が得られることになる．

同様に，(2.2.1) において $dx = 0$ として得られる右辺の係数行列は *Case 2-4* を除いて

$$g = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & * \\ * & 0 & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \tag{2.3.2}$$

なる形をしている．*Case 2-4* の場合には，要素を適当に並べかえることにより，やはり (2.3.2) のようにできる．したがって，g_{13}, g_{34}, g_{42} が 0 でなければ，y について 4 階の常微分方程式が得られることになる．

3. 実験

実験は，Sun3/60(Sun OS 3.5, メモリ: 8MB) 上の MACSYMA によって行った．実験の対象は，Horn's list([4]) に載っている方程式である．小野寺の行った方程式は，$F_1 \sim F_4; G_1, G_2, \Phi_1 \sim \Phi_3, \Psi_1, \Xi_1, \Xi_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \mathrm{H}_4, \mathrm{H}_5, \mathrm{H}_8, \mathrm{H}_9, \mathrm{H}_{11}$ である．このうち，

F_4, G_1, H_8 については，SECTION における方程式が求められていなかった．今回実験を行ったのは，上記以外に Ψ_2 と $\mathrm{H}_1 \sim \mathrm{H}_{11}$ のうち，取り上げられなかったものである．

実験の結果は，表 1 にまとめた．表の一番左の欄に記入されているのが， 2 変数の超幾何関数の名前である．この超幾何関数が満たす (1.1), (1.2) の形の偏微分方程式について，(2.3) を計算し，Δ が 0 となる場合には，Δ の欄に 0 が入っている．そうでない場合には，A1, A2 の欄に，A_1, A_2 が 0 になる場合に 0 が入っている．Tota の欄には MACSYMA で変換したときの CPU Total Time(sec) が，GC の欄には Garbage collection(単位 sec) にかかった時間が記入されている．ただし，F_4 については，$dy=0$ における常微分方程式に変換する部分までに要した時間が記入されている（変換全体にかかる時間が膨大であることと，x, y に関して F_4 が対称であることから，$dx=0$ の場合を省略したため）．最高階係数の欄には，各 SECTION における常微分方程式の最高階の係数がそれぞれ記入されている．ただし，*Case 2-2* の場合には $dy=0$ における SECTION，*Case 2-3* の場合には $dx=0$ における SECTION を求めていない（斜線部）．右端の欄は，SECTION における常微分方程式の係数に分母がある場合に，○ が記入されている．これは，常微分方程式の最高階の係数が分母を払った形になるように係数を書いているので，最高階以外の係数には分数が現れる場合がある．

発表の時点（11/26）では，$\mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \mathrm{H}_7$ が完全積分可能条件を満足しないと述べたが，偏微分方程式をチェックしなおしたところ，[4] に誤植が見つかった．正しいと思われる方程式で計算しなおすと，完全積分可能条件を満足したので，この結果を表 1 に付け足してある．また，[4] で $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ と書かれているのをそれぞれ a, b, c, d と書き直してある．同様に，α', β', γ' 等も，a', b', c' のように書き直している．

具体的な例として，F_4 の結果を示してある．Coeff of F として，(2.2.2) の f の要素が，Coeff of G として，(2.2.2) の g の要素が，それぞれ書かれており，Case of dy=0 の $u_0, u_1, \ldots, u_4$ は，SECTION における常微分方程式の 0 階微分，1 階微分，…，4 階微分の係数をそれぞれ表している．

4. 参考文献

[1] 小野寺修:山梨大学計算機科学科修士論文 (1988)

[2] M.Kohno&T.Suzuki:Reduction of single Fuchsian differntial equations to hypergeometric systems,Kumamoto J. Sci.(Math)Vol.17,27-74 March(1987)

[3] T.Kimura:Hypergeometric function of two variables, Lecture notes of University of Minnesota(1973)

[4] A.Erdélyi et al:HIGHER TRANSCENDENTAL FUNCTIONS,Vol.1, McGrow-hill (1953)

表 1

	Δ	A1	A2	Tota	G C	最高階係数(dy=0)	最高階係数(dx=0)	分
F 1	0			100	56	$-(x-1)x(y-x)$	$(y-1)y(y-x)$	
F 2				225	124	$(x-1)x^2(y+x-1)$	$(y-1)y^2(y+x-1)$	
F 3				201	111	$(x-1)x^2(xy-x-y)$	$(y-1)y^2(xy-x-y)$	
F 4				4501	3003	$-2x^2\{y^2-2xy-2y+(x-1)^2\}$		○
G 1	0			1156	538	$-x(y+x+1)(4xy-1)\#_1$	$-y(y+x+1)(4xy-1)\#_2$	
G 2	0			136	75	$-x(x+1)(xy-1)$	$-y(y+1)(xy-1)$	
Φ 1	0			31	14	$-(x-1)x^2$	xy	
Φ 2	0			30	14	$-x(y-x)$	$y(y-x)$	
Φ 3	0			14	5	x^2	$-xy$	
Ψ 1			0	219	121	$(x-1)^2x^2$		
Ψ 2		0	0	40	17	x^2	y^2	
Ξ 1				80	40	$-(x-1)x^3$	xy^2	
Ξ 2				66	32	$-(x-1)x^3$	xy^2	
Γ 1	0			27	12	$x(x+1)$	y	
Γ 2	0			14	5	x	y	
H 1				359	198	$(x-1)x^2$	y^2	○
H 2				84	42	$(x-1)x^2$	y^2	
H 3				70	34	$(x-1)x^2$	y^2	
H 4		0		62	30		$-y^2$	
H 5		0		59	27		$-y^2$	
H 6				2304	1250	$-x^3(4x-1)$	xy^2	○
H 7			0	1124	621	$-4x^2(4x-1)^2$		○
H 8				782	430	$x^2(4x+1)$	$-2y^2$	○
H 9				270	149	$x^2(4x-1)$	y^2	○
H 10				267	146	$x^2(4x-1)$	y^2	○
H 11		0		151	81		$-y^2(y+1)^2$	

$$\#_1 = y\{(2b'x+2bx-b+a+1)y+(b'-a+1)x-b+2a+1\}+a$$

$$\#_2 = x\{(2b'x+2bx+b-a+1)y-(b'-a-1)x-b'+2a+1\}+a$$

F4

Coeff of F

$$f_{1,1} = (c' - b - a - 1)/(2x)$$
$$f_{1,2} = -1/(x(y + x - 1))$$
$$f_{1,3} = 0$$
$$f_{1,4} = 0$$
$$\begin{aligned} f_{2,1} =& ((c'^2 + (2c - 2b - 2a - 4)c' + (-2b - 2a - 2)c + b^2 + (2a + 4)b \\ & + a^2 + 4a + 3)y - c'^2 + (-2c + 2b + 2a + 4)c' + (2b + 2a + 2)c - b^2 + (-2a \\ & - 4)b - a^2 - 4a - 3)/(4x) + (c'^2 - 2c' - b^2 + 2ab - a^2 + 1)/4 \end{aligned}$$
$$f_{2,2} = 1/(y + x - 1) - (c' + 2c - b - a - 3)/(2x)$$
$$f_{2,3} = 0$$
$$f_{2,4} = 2/(y^2 + (-2x - 2)y + x^2 - 2x + 1)$$
$$f_{3,1} = 0$$
$$f_{3,2} = 0$$
$$f_{3,3} = 1/(y + x - 1) + (c' - b - a - 1)/(2x)$$
$$f_{3,4} = -(y + x - 1)/(x(y^2 + (-2x - 2)y + x^2 - 2x + 1))$$
$$\begin{aligned} f_{4,1} =& (((-c + b + a + 1)c' + (b + a + 1)c - b^2 - 2b - a^2 - 2a - 1)x^2 + ((c - b \\ & - a - 1)c' + (-b - a - 1)c + b^2 + 2b + a^2 + 2a + 1)x)/(y + x - 1) + ((c - b - a - 1)c' \\ & + (-b - a - 1)c + b^2 + 2b + a^2 + 2a + 1)y/2 + ((-c + b + a + 1)c' + (b + a + 1)c - b^2 \\ & - 2b - a^2 - 2a - 1)y + ((c - b - a - 1)c' + (-b - a - 1)c + b^2 + 2b + a^2 + 2a + 1)x \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_{4,2} =& (((-c + b + a + 1)c' + (b + a + 1)c - b^2 - 2b - a^2 - 2a - 1)x + (c - b \\ & - a - 1)c' + (-b - a - 1)c + b^2 + 2b + a^2 + 2a + 1)/(y + x - 1) - ((2c - 2b - 2a - 2)c' \\ & + c^2 + (-2b - 2a - 4)c + b^2 + (2a + 4)b + a^2 + 4a + 3)/2 + (c - b - a - 1)c' \\ & + (-b - a - 1)c + b^2 + 2b + a^2 + 2a + 1 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_{4,3} =& ((c'^2 + (2c - 2b - 2a - 4)c' + (-2b - 2a - 2)c + b^2 + (2a + 4)b \\ & + a^2 + 4a + 3)y - c'^2 + (-2c + 2b + 2a + 4)c' + (2b + 2a + 2)c - b^2 + (-2a \\ & - 4)b - a^2 - 4a - 3)/(4x) + (c'^2 - 2c' - b^2 + 2ab - a^2 + 1)/4 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_{4,4} =& ((-2c' - 2c + 2b + 2a + 3)y + (2c' + 2c - 2b - 2a - 3)x - 2c' - 2c \\ & + 2b + 2a + 3)/(y^2 + (-2x - 2)y + x^2 - 2x + 1) + 1/(y + x - 1) - (c' + 2c - b - a - 3)/(2x) \end{aligned}$$

Coeff of G

$$g_{1,1} = (c-b-a-1)/(2\,y)$$

$$g_{1,2} = 0$$

$$g_{1,3} = 1/((x-1)\,(y+x-1)) - 1/((x-1)\,y)$$

$$g_{1,4} = 0$$

$$g_{2,1} = 0$$

$$g_{2,2} = 1/(y+x-1) + (c-b-a-1)/(2\,y)$$

$$g_{2,3} = 0$$

$$g_{2,4} = (y-3\,x-1)/((x-1)\,(y^2+(-2\,x-2)\,y+x^2-2\,x+1)) - 1/((x-1)\,y)$$

$$\begin{aligned} g_{3,1} = {} & (((2\,c-2\,b-2\,a-2)\,c' + c^2 + (-2\,b-2\,a-4)\,c + b^2 + (2\,a+4)\,b \\ & + a^2 + 4\,a + 3)\,x + (-2\,c + 2\,b + 2\,a + 2)\,c' - c^2 + (2\,b+2\,a+4)\,c - b^2 + (-2\,a-4)\,b \\ & - a^2 - 4\,a - 3)/(4\,y) + (c^2 - 2\,c - b^2 + 2\,a\,b - a^2 + 1)/4 \end{aligned}$$

$$g_{3,2} = 0$$

$$g_{3,3} = 1/(y+x-1) - (2\,c' + c - b - a - 3)/(2\,y)$$

$$g_{3,4} = 2/(y^2 + (-2\,x-2)\,y + x^2 - 2\,x + 1)$$

$$\begin{aligned} g_{4,1} = {} & (((2\,c-2\,b-2\,a-2)\,c' + (-2\,b-2\,a-2)\,c + 2\,b^2 + 4\,b + 2\,a^2 + 4\,a \\ & + 2)\,y + ((-c+b+a+1)\,c' + (b+a+1)\,c - b^2 - 2\,b - a^2 - 2\,a - 1)\,x)/2 + (((-c+b+a \\ & + 1)\,c' + (b+a+1)\,c - b^2 - 2\,b - a^2 - 2\,a - 1)\,x^2 + ((c-b-a-1)\,c' + (-b-a-1)\,c \\ & + b^2 + 2\,b + a^2 + 2\,a + 1)\,x)/(y+x-1) + ((-c+b+a+1)\,c' + (b+a+1)\,c - b^2 - 2\,b \\ & - a^2 - 2\,a - 1)\,y + ((c-b-a-1)\,c' + (-b-a-1)\,c + b^2 + 2\,b + a^2 + 2\,a + 1)\,x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{4,2} = {} & (((2\,c-2\,b-2\,a-2)\,c' + c^2 + (-2\,b-2\,a-4)\,c + b^2 + (2\,a+4)\,b \\ & + a^2 + 4\,a + 3)\,x + (-2\,c + 2\,b + 2\,a + 2)\,c' - c^2 + (2\,b+2\,a+4)\,c - b^2 + (-2\,a-4)\,b \\ & - a^2 - 4\,a - 3)/(4\,y) + (c^2 - 2\,c - b^2 + 2\,a\,b - a^2 + 1)/4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{4,3} = {} & ((c-b-a-1)\,c' + (-b-a-1)\,c + b^2 + 2\,b + a^2 + 2\,a + 1)\,x/(y+x-1) \\ & - (c'^2 - 2\,c' - b^2 + 2\,a\,b - a^2 + 1)/2 + (-c+b+a+1)\,c' + (b+a+1)\,c - b^2 - 2\,b - a^2 \\ & - 2\,a - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{4,4} = {} & ((2\,c' + 2\,c - 2\,b - 2\,a - 3)\,y + (-2\,c' - 2\,c + 2\,b + 2\,a + 3)\,x - 2\,c' - 2\,c \\ & + 2\,b + 2\,a + 3)/(y^2 + (-2\,x-2)\,y + x^2 - 2\,x + 1) + 1/(y+x-1) - (2\,c' + c - b - a - 3)/(2\,y) \end{aligned}$$

Case of $dy = 0$

$$u_4 = -2x^2(y+x-1)(y(y-2x-2)+(x-1)^2)$$

$$\begin{aligned}
u_3 = &-4x(y+x-1)(y(y((c+1)(c'-b-a-1)(c'+2c-b-a-3)y+(c'(c'(c'\\
&+2c-3(b+a)-9)-c(2(c+b+a)+11)+b(3b+6a+19)+3a^2+19a+24)\\
&+c(2(b+a+1)c+(4a+9)b+9a+9)-b(b(b+3a+10)+3a^2+18a+25)\\
&-(a+1)(a^2+9a+16))x-3(c+1)c'(c'+2c-2(b+a)-4)+3(b+a\\
&+1)c(2c-b-a-1)-3b(b+2a+4)-3(a+1)(a+3))-x((c'((3c\\
&-2(b+a)-2)c'-(4(b+a)+13)c+b(4(b+a)+15)+(a+1)(4a+11))\\
&+(b(b+6a+11)+(a+1)(a+10))c-b(b(2(b+a)+13)+2(a^2+4a+10))\\
&-(a+1)^2(2a+9))x+(2c+1)(c'-2)c'-2(b-a-1)(b-a+1)c-(b-a)^2\\
&+1)+3(c+1)c'(c'+2c-2(b+a)-4)-3(b+a+1)c(2c-b-a-1)+3b(b\\
&+2a+4)+3(a+1)(a+3))-x(x((c'-b-a-4)(c'-b+a-1)(c'+b-a-1)x\\
&-c'(c'(2c'+c-4(b+a)-15)-(4(b+a)+9)c+b(2b+8a+19)+2a^2\\
&+19a+31)-(b(3b+2a+11)+(a+1)(3a+8))c+2(a+1)b(2(b+a)+11)\\
&+2(a+1)(2a+9))+c'(c'(c'-3(b+a)-10)-c(2(c+b+a)+7)+b(3b\\
&+6a+19)+(a+2)(3a+13))+c(2(b+a+1)c+(b+1)(2b+7)+a(2a+9))\\
&-b(b(b+3a+9)+(a+5)(3a+5))-(a+1)(a^2+8a+17))-(c+1)c'(c'\\
&+2c-2(b+a)-4)+(b+a+1)c(2c-b-a-1)-b(b+2a+4)-(a+1)(a+3))\\
&/(c'^2y+2cc'y-2bc'y-2ac'y-4c'y-2bcy-2acy-2cy\\
&+b^2y+2aby+4by+a^2y+4ay+3y+c'^2x-2c'x-b^2x+2abx\\
&-a^2x+x-c'^2-2cc'+2bc'+2ac'+4c'+2bc+2ac+2c-b^2-2ab\\
&-4b-a^2-4a-3)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_2 = -2(y+x-1)(&c^2 c'^2 y^3 + c c'^2 y^3 + 2c^3 c' y^3 - 2bc^2 c' y^3 \\
&- 2ac^2 c' y^3 - 2c^2 c' y^3 - 2bcc' y^3 - 2acc' y^3 - 4cc' y^3 \\
&- 2bc^3 y^3 - 2ac^3 y^3 - 2c^3 y^3 + b^2 c^2 y^3 + 2abc^2 y^3 \\
&+ 2bc^2 y^3 + a^2 c^2 y^3 + 2ac^2 y^3 + c^2 y^3 + b^2 c y^3 + 2abcy^3 \\
&+ 4bcy^3 + a^2 cy^3 + 4acy^3 + 3cy^3 + 2cc'^3 xy^2 + bc'^3 xy^2 \\
&+ ac'^3 xy^2 + 3c'^3 xy^2 + 5c^2 c'^2 xy^2 - 4bcc'^2 xy^2 \\
&- 4acc'^2 xy^2 - 9cc'^2 xy^2 - 3b^2 c'^2 xy^2 - 4abc'^2 xy^2 \\
&- 15bc'^2 xy^2 - 3a^2 c'^2 xy^2 - 15ac'^2 xy^2 - 22c'^2 xy^2 \\
&- 8bc^2 c' xy^2 - 8ac^2 c' xy^2 - 20c^2 c' xy^2 + 2b^2 cc' xy^2 \\
&+ 8abcc' xy^2 + 12bcc' xy^2 + 2a^2 cc' xy^2 + 12acc' xy^2 \\
&+ 10cc' xy^2 + 3b^3 c' xy^2 + 5ab^2 c' xy^2 + 21b^2 c' xy^2 \\
&+ 5a^2 bc' xy^2 + 32abc' xy^2 + 53bc' xy^2 + 3a^3 c' xy^2 \\
&+ 21a^2 c' xy^2 + 53ac' xy^2 + 47c' xy^2 + 3b^2 c^2 xy^2 \\
&+ 10abc^2 xy^2 + 18bc^2 xy^2 + 3a^2 c^2 xy^2 + 18ac^2 xy^2 \\
&+ 15c^2 xy^2 - 4ab^2 cxy^2 - 3b^2 cxy^2 - 4a^2 bcxy^2 \\
&- 14abcxy^2 - 6bcxy^2 - 3a^2 cxy^2 - 6acxy^2 - 3cxy^2 \\
&- b^4 xy^2 - 2ab^3 xy^2 - 9b^3 xy^2 - 2a^2 b^2 xy^2 - 17ab^2 xy^2 \\
&- 31b^2 xy^2 - 2a^3 bxy^2 - 17a^2 bxy^2 - 54abxy^2 - 51bxy^2 \\
&- a^4 xy^2 - 9a^3 xy^2 - 31a^2 xy^2 - 51axy^2 - 28xy^2 - 3c^2 c'^2 y^2 \\
&- 3cc'^2 y^2 - 6c^3 c' y^2 + 6bc^2 c' y^2 + 6ac^2 c' y^2 + 6c^2 c' y^2 \\
&+ 6bcc' y^2 + 6acc' y^2 + 12cc' y^2 + 6bc^3 y^2 + 6ac^3 y^2 \\
&+ 6c^3 y^2 - 3b^2 c^2 y^2 - 6abc^2 y^2 - 6bc^2 y^2 - 3a^2 c^2 y^2 \\
&- 6ac^2 y^2 - 3c^2 y^2 - 3b^2 cy^2 - 6abcy^2 - 12bcy^2 - 3a^2 cy^2 \\
&- 12acy^2 - 9cy^2 + c'^4 x^2 y + 4cc'^3 x^2 y - 4bc'^3 x^2 y \\
&- 4ac'^3 x^2 y - 11c'^3 x^2 y - 10bcc'^2 x^2 y - 10acc'^2 x^2 y \\
&- 30cc'^2 x^2 y + 7b^2 c'^2 x^2 y + 18abc'^2 x^2 y + 40bc'^2 x^2 y \\
&+ 7a^2 c'^2 x^2 y + 40ac'^2 x^2 y + 49c'^2 x^2 y + 6b^2 cc' x^2 y \\
&+ 24abcc' x^2 y + 50bcc' x^2 y + 6a^2 cc' x^2 y + 50acc' x^2 y \\
&+ 68cc' x^2 y - 6b^3 c' x^2 y - 18ab^2 c' x^2 y - 47b^2 c' x^2 y \\
&- 18a^2 bc' x^2 y - 96abc' x^2 y - 118bc' x^2 y - 6a^3 c' x^2 y \\
&- 47a^2 c' x^2 y - 118ac' x^2 y - 89c' x^2 y - 12ab^2 cx^2 y \\
&- 18b^2 cx^2 y - 12a^2 bcx^2 y - 60abcx^2 y - 60bcx^2 y
\end{aligned}
$$

$$- 18a^2cx^2y - 60acx^2y - 42cx^2y + 2b^4x^2y + 4ab^3x^2y$$
$$+ 18b^3x^2y + 12a^2b^2x^2y + 48ab^2x^2y + 68b^2x^2y$$
$$+ 4a^3bx^2y + 48a^2bx^2y + 122abx^2y + 102bx^2y + 2a^4x^2y$$
$$+ 18a^3x^2y + 68a^2x^2y + 102ax^2y + 50x^2y - c'^4xy - 2cc'^3xy$$
$$+ 2bc'^3xy + 2ac'^3xy + 7c'^3xy - 2c^2c'^2xy + 2bcc'^2xy$$
$$+ 2acc'^2xy + 8cc'^2xy - 4abc'^2xy - 9bc'^2xy$$
$$- 9ac'^2xy - 15c'^2xy + 4c^2c'xy + 2b^2cc'xy - 4abcc'xy$$
$$- 4bcc'xy + 2a^2cc'xy - 4acc'xy - 10cc'xy - 2b^3c'xy$$
$$+ 2ab^2c'xy - 3b^2c'xy + 2a^2bc'xy + 14abc'xy$$
$$+ 12bc'xy - 2a^3c'xy - 3a^2c'xy + 12ac'xy + 13c'xy$$
$$+ 2b^2c^2xy - 4abc^2xy + 2a^2c^2xy - 2c^2xy - 2b^3cxy$$
$$+ 2ab^2cxy - 4b^2cxy + 2a^2bcxy + 8abcxy + 2bcxy$$
$$- 2a^3cxy - 4a^2cxy + 2acxy + 4cxy + b^4xy + 5b^3xy$$
$$- 2a^2b^2xy - 5ab^2xy + 3b^2xy - 5a^2bxy - 10abxy - 5bxy$$
$$+ a^4xy + 5a^3xy + 3a^2xy - 5axy - 4xy + 3c^2c'^2y + 3cc'^2y$$
$$+ 6c^3c'y - 6bc^2c'y - 6ac^2c'y - 6c^2c'y - 6bcc'y$$
$$- 6acc'y - 12cc'y - 6bc^3y - 6ac^3y - 6c^3y + 3b^2c^2y$$
$$+ 6abc^2y + 6bc^2y + 3a^2c^2y + 6ac^2y + 3c^2y + 3b^2cy$$
$$+ 6abcy + 12bcy + 3a^2cy + 12acy + 9cy + c'^4x^3 - 3bc'^3x^3$$
$$- 3ac'^3x^3 - 10c'^3x^3 + 6abc'^2x^3 + 15bc'^2x^3 + 15ac'^2x^3$$
$$+ 31c'^2x^3 + 3b^3c'x^3 - 3ab^2c'x^3 + 6b^2c'x^3 - 3a^2bc'x^3$$
$$- 24abc'x^3 - 21bc'x^3 + 3a^3c'x^3 + 6a^2c'x^3 - 21ac'x^3$$
$$- 36c'x^3 - b^4x^3 - 2ab^3x^3 - 9b^3x^3 + 6a^2b^2x^3 + 9ab^2x^3$$
$$- 13b^2x^3 - 2a^3bx^3 + 9a^2bx^3 + 32abx^3 + 9bx^3 - a^4x^3$$
$$- 9a^3x^3 - 13a^2x^3 + 9ax^3 + 14x^3 - 2c'^4x^2 + 6bc'^3x^2$$
$$+ 6ac'^3x^2 + 20c'^3x^2 + 6bcc'^2x^2 + 6acc'^2x^2 + 12cc'^2x^2$$
$$- 7b^2c'^2x^2 - 22abc'^2x^2 - 51bc'^2x^2 - 7a^2c'^2x^2$$
$$- 51ac'^2x^2 - 76c'^2x^2 - 10b^2cc'x^2 - 16abcc'x^2 - 42bcc'x^2$$
$$- 10a^2cc'x^2 - 42acc'x^2 - 44cc'x^2 + 4b^3c'x^2 + 20ab^2c'x^2$$
$$+ 42b^2c'x^2 + 20a^2bc'x^2 + 114abc'x^2 + 134bc'x^2$$
$$+ 4a^3c'x^2 + 42a^2c'x^2 + 134ac'x^2 + 120c'x^2 + 4b^3cx^2$$
$$+ 8ab^2cx^2 + 28b^2cx^2 + 8a^2bcx^2 + 40abcx^2 + 56bcx^2$$

$$+4a^3cx^2+28a^2cx^2+56acx^2+32cx^2-b^4x^2-4ab^3x^2$$
$$-11b^3x^2-14a^2b^2x^2-55ab^2x^2-57b^2x^2-4a^3bx^2$$
$$-55a^2bx^2-148abx^2-109bx^2-a^4x^2-11a^3x^2-57a^2x^2$$
$$-109ax^2-62x^2+c'^4x-3bc'^3x-3ac'^3x-10c'^3x-3c^2c'^2x$$
$$+2bcc'^2x+2acc'^2x+cc'^2x+3b^2c'^2x+8abc'^2x$$
$$+24bc'^2x+3a^2c'^2x+24ac'^2x+37c'^2x+8bc^2c'x$$
$$+8ac^2c'x+16c^2c'x-4b^2cc'x-4abcc'x-8bcc'x$$
$$-4a^2cc'x-8acc'x-b^3c'x-7ab^2c'x-18b^2c'x-7a^2bc'x$$
$$-46abc'x-65bc'x-a^3c'x-18a^2c'x-65ac'x-60c'x$$
$$-5b^2c^2x-6abc^2x-18bc^2x-5a^2c^2x-18ac^2x-13c^2x$$
$$+2b^3cx+2ab^2cx+7b^2cx+2a^2bcx+6abcx+4bcx$$
$$+2a^3cx+7a^2cx+4acx-cx+2ab^3x+4b^3x+4a^2b^2x$$
$$+22ab^2x+28b^2x+2a^3bx+22a^2bx+64abx+56bx+4a^3x$$
$$+28a^2x+56ax+32x-c(c+1)(c'-b-a-1)(c'+2c-b-a-3))$$
$$/(c'^2y+2cc'y-2bc'y-2ac'y-4c'y-2bcy-2acy-2cy+b^2y$$
$$+2aby+4by+a^2y+4ay+3y+c'^2x-2c'x-b^2x+2abx-a^2x$$
$$+x-c'^2-2cc'+2bc'+2ac'+4c'+2bc+2ac+2c-b^2-2ab-4b$$
$$-a^2-4a-3)$$
$$u_1=-2(y+x-1)(bcc'^3y^2+acc'^3y^2+cc'^3y^2+2bc^2c'^2y^2$$
$$+2ac^2c'^2y^2+2c^2c'^2y^2-3b^2cc'^2y^2-4abcc'^2y^2$$
$$-9bcc'^2y^2-3a^2cc'^2y^2-9acc'^2y^2-6cc'^2y^2$$
$$-4b^2c^2c'y^2-4abc^2c'y^2-10bc^2c'y^2-4a^2c^2c'y^2$$
$$-10ac^2c'y^2-6c^2c'y^2+3b^3cc'y^2+5ab^2cc'y^2$$
$$+15b^2cc'y^2+5a^2bcc'y^2+20abcc'y^2+23bcc'y^2$$
$$+3a^3cc'y^2+15a^2cc'y^2+23acc'y^2+11cc'y^2+2b^3c^2y^2$$
$$+2ab^2c^2y^2+8b^2c^2y^2+2a^2bc^2y^2+8abc^2y^2$$
$$+10bc^2y^2+2a^3c^2y^2+8a^2c^2y^2+10ac^2y^2+4c^2y^2$$
$$-b^4cy^2-2ab^3cy^2-7b^3cy^2-2a^2b^2cy^2-11ab^2cy^2$$
$$-17b^2cy^2-2a^3bcy^2-11a^2bcy^2-22abcy^2-17bcy^2$$
$$-a^4cy^2-7a^3cy^2-17a^2cy^2-17acy^2-6cy^2+bc'^4xy$$
$$+ac'^4xy+c'^4xy+3bcc'^3xy+3acc'^3xy+3cc'^3xy$$
$$-3b^2c'^3xy-8abc'^3xy-13bc'^3xy-3a^2c'^3xy$$
$$-13ac'^3xy-10c'^3xy-5b^2cc'^2xy-12abcc'^2xy$$

$$- 21 b c c'^2 x y - 5 a^2 c c'^2 x y - 21 a c c'^2 x y - 16 c c'^2 x y$$
$$+ 3 b^3 c'^2 x y + 15 a b^2 c'^2 x y + 25 b^2 c'^2 x y + 15 a^2 b c'^2 x y$$
$$+ 62 a b c'^2 x y + 55 b c'^2 x y + 3 a^3 c'^2 x y + 25 a^2 c'^2 x y$$
$$+ 55 a c'^2 x y + 33 c'^2 x y + b^3 c c' x y + 15 a b^2 c c' x y + 21 b^2 c c' x y$$
$$+ 15 a^2 b c c' x y + 56 a b c c' x y + 47 b c c' x y + a^3 c c' x y$$
$$+ 21 a^2 c c' x y + 47 a c c' x y + 27 c c' x y - b^4 c' x y - 10 a b^3 c' x y$$
$$- 15 b^3 c' x y - 18 a^2 b^2 c' x y - 73 a b^2 c' x y - 63 b^2 c' x y$$
$$- 10 a^3 b c' x y - 73 a^2 b c' x y - 152 a b c' x y - 93 b c' x y - a^4 c' x y$$
$$- 15 a^3 c' x y - 63 a^2 c' x y - 93 a c' x y - 44 c' x y + b^4 c x y$$
$$- 6 a b^3 c x y - 3 b^3 c x y - 6 a^2 b^2 c x y - 31 a b^2 c x y - 23 b^2 c x y$$
$$- 6 a^3 b c x y - 31 a^2 b c x y - 58 a b c x y - 33 b c x y + a^4 c x y$$
$$- 3 a^3 c x y - 23 a^2 c x y - 33 a c x y - 14 c x y + 2 a b^4 x y + 2 b^4 x y$$
$$+ 6 a^2 b^3 x y + 24 a b^3 x y + 18 b^3 x y + 6 a^3 b^2 x y + 40 a^2 b^2 x y$$
$$+ 84 a b^2 x y + 50 b^2 x y + 2 a^4 b x y + 24 a^3 b x y + 84 a^2 b x y$$
$$+ 116 a b x y + 54 b x y + 2 a^4 x y + 18 a^3 x y + 50 a^2 x y + 54 a x y + 20 x y$$
$$- c c'^4 y - 2 c^2 c'^3 y + 2 b c c'^3 y + 2 a c c'^3 y + 7 c c'^3 y$$
$$+ 2 b c^2 c'^2 y + 2 a c^2 c'^2 y + 8 c^2 c'^2 y - 4 a b c c'^2 y - 9 b c c'^2 y$$
$$- 9 a c c'^2 y - 17 c c'^2 y + 2 b^2 c^2 c' y - 4 a b c^2 c' y$$
$$- 4 b c^2 c' y + 2 a^2 c^2 c' y - 4 a c^2 c' y - 10 c^2 c' y - 2 b^3 c c' y$$
$$+ 2 a b^2 c c' y - 3 b^2 c c' y + 2 a^2 b c c' y + 14 a b c c' y + 12 b c c' y$$
$$- 2 a^3 c c' y - 3 a^2 c c' y + 12 a c c' y + 17 c c' y - 2 b^3 c^2 y$$
$$+ 2 a b^2 c^2 y - 4 b^2 c^2 y + 2 a^2 b c^2 y + 8 a b c^2 y + 2 b c^2 y$$
$$- 2 a^3 c^2 y - 4 a^2 c^2 y + 2 a c^2 y + 4 c^2 y + b^4 c y + 5 b^3 c y$$
$$- 2 a^2 b^2 c y - 5 a b^2 c y + 5 b^2 c y - 5 a^2 b c y - 14 a b c y - 5 b c y$$
$$+ a^4 c y + 5 a^3 c y + 5 a^2 c y - 5 a c y - 6 c y + b c'^4 x^2 + a c'^4 x^2$$
$$+ c'^4 x^2 - b^2 c'^3 x^2 - 4 a b c'^3 x^2 - 7 b c'^3 x^2 - a^2 c'^3 x^2$$
$$- 7 a c'^3 x^2 - 6 c'^3 x^2 - b^3 c'^2 x^2 + 3 a b^2 c'^2 x^2 + 3 b^2 c'^2 x^2$$
$$+ 3 a^2 b c'^2 x^2 + 18 a b c'^2 x^2 + 17 b c'^2 x^2 - a^3 c'^2 x^2$$
$$+ 3 a^2 c'^2 x^2 + 17 a c'^2 x^2 + 13 c'^2 x^2 + b^4 c' x^2 + 2 a b^3 c' x^2$$
$$+ 5 b^3 c' x^2 - 6 a^2 b^2 c' x^2 - 9 a b^2 c' x^2 - b^2 c' x^2 + 2 a^3 b c' x^2$$
$$- 9 a^2 b c' x^2 - 28 a b c' x^2 - 17 b c' x^2 + a^4 c' x^2 + 5 a^3 c' x^2$$
$$- a^2 c' x^2 - 17 a c' x^2 - 12 c' x^2 - 2 a b^4 x^2 - 2 b^4 x^2 + 2 a^2 b^3 x^2$$

$$
\begin{aligned}
&-4ab^3x^2-6b^3x^2+2a^3b^2x^2+12a^2b^2x^2+8ab^2x^2\\
&-2b^2x^2-2a^4bx^2-4a^3bx^2+8a^2bx^2+16abx^2+6bx^2\\
&-2a^4x^2-6a^3x^2-2a^2x^2+6ax^2+4x^2-cc'^4x-bc'^4x\\
&-ac'^4x-c'^4x-bcc'^3x-acc'^3x+2cc'^3x+3b^2c'^3x\\
&+8abc'^3x+13bc'^3x+3a^2c'^3x+13ac'^3x+10c'^3x\\
&+5b^2cc'^2x+8abcc'^2x+14bcc'^2x+5a^2cc'^2x+14acc'^2x\\
&+7cc'^2x-3b^3c'^2x-15ab^2c'^2x-25b^2c'^2x-15a^2bc'^2x\\
&-62abc'^2x-55bc'^2x-3a^3c'^2x-25a^2c'^2x-55ac'^2x\\
&-33c'^2x-3b^3cc'x-13ab^2cc'x-22b^2cc'x-13a^2bcc'x\\
&-46abcc'x-39bcc'x-3a^3cc'x-22a^2cc'x-39acc'x\\
&-20cc'x+b^4c'x+10ab^3c'x+15b^3c'x+18a^2b^2c'x\\
&+73ab^2c'x+63b^2c'x+10a^3bc'x+73a^2bc'x+152abc'x\\
&+93bc'x+a^4c'x+15a^3c'x+63a^2c'x+93ac'x+44c'x\\
&+6ab^3cx+6b^3cx+4a^2b^2cx+28ab^2cx+24b^2cx+6a^3bcx\\
&+28a^2bcx+52abcx+30bcx+6a^3cx+24a^2cx+30acx\\
&+12cx-2ab^4x-2b^4x-6a^2b^3x-24ab^3x-18b^3x-6a^3b^2x\\
&-40a^2b^2x-84ab^2x-50b^2x-2a^4bx-24a^3bx-84a^2bx\\
&-116abx-54bx-2a^4x-18a^3x-50a^2x-54ax-20x+c(c'-b-a\\
&-2)(c'+2c-b-a-3)(c'(c'-b-a-3)+2(a+1)b+2a+2))\\
&/(c'^2y+2cc'y-2bc'y-2ac'y-4c'y-2bcy-2acy-2cy\\
&+b^2y+2aby+4by+a^2y+4ay+3y+c'^2x-2c'x-b^2x+2abx\\
&-a^2x+x-c'^2-2cc'+2bc'+2ac'+4c'+2bc+2ac+2c-b^2-2ab\\
&-4b-a^2-4a-3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_0 = &-2ab(c'-a-1)(c'-b-1)(y+x-1)((c'-b-a-3)(c'+2c-b-a-3)y\\
&+(c'-b+a-1)(c'+b-a-1)x-c'(c'+2c-2(b+a)-6)+2(b+a+3)c-b(b\\
&+2a+6)-(a+3)^2)/(c'^2y+2cc'y-2bc'y-2ac'y-4c'y-2bcy\\
&-2acy-2cy+b^2y+2aby+4by+a^2y+4ay+3y+c'^2x-2c'x\\
&-b^2x+2abx-a^2x+x-c'^2-2cc'+2bc'+2ac'+4c'+2bc+2ac\\
&+2c-b^2-2ab-4b-a^2-4a-3)
\end{aligned}
$$

Totaltime= 4501166 msec. GCtime= 3003350 msec.