数理解析研究所講究録
第 754 巻 1991 年 115-124

決定性２次元テープ受理機械と等価なアレイ文法のクラスについて

Isometric Array Grammars which are equivalent to Two-dimensional Deterministic Tape Acceptors

山本 泰則
Yasunori YAMAMOTO
国立民族学博物館
National Museum of Ethnology

森田 憲一
Kenichi MORITA
山形大学工学部
Faculty of Engineering, Yamagata University

1 はじめに

２次元記号配列 (２次元ディジタル図形) の集合を生成するような形式文法の枠組みとして, これまでに幾つかのものが考案されているが, アイソメトリック・アレイ文法 (IAG) はそのような枠組みの１つである [4, 6]. IAG の生成規則には, 左辺と右辺が幾何学的に同じ形 (*isometric*) でなければならないという条件がついており, それを満たすために, 空白を表す記号# を両辺に付加できる. これにより, 生成規則の適用によって配列が歪むのを防ぐことができる.

IAG のサブクラスとして提案されている文脈依存 (単調) アレイ文法 (CSAG), 文脈自由アレイ文法 (CFAG), 正規アレイ文法 (RAG) は, １次元の通常の文法に似た Chomsky 風階層構造を構成している [1]. この階層の最下位にある RAG の生成規則は極度に制限されており, 非空白記号を文脈として読み取ることはできないが, isometric という性質上, 空白記号を文脈として検出できる. そのため生成能力は予想以上に高く, 長方形や正方形のような幾何学図形を生成する能力を持つ [9]. その反面, 等価性判定問題や空問題は決定不能, 認識問題は NP 完全となることが判明している [5]. 特に後者の結果は, RAG の構文解析 (認識) を効率的に実行するのが一般的には不可能であることを示唆している. それゆえ, 生成能力がある程度高く, しかも解析が容易であるような他の文法族を見いだすことが望まれる.

著者らは先に, 一意解析アレイ文法 (Uniquely Parsable Array Grammar: UPAG) と呼ぶ IAG のサブクラスを提案した [10]. UPAG は, 構文解析をバックトラックなしに実行できるという特徴をもち, 効率的に解析できる文法の族を研究する上で有用な枠組みであると考えられる. そして, UPAG のサブクラスで, 実際に効率的に (線形時間で) 解析できる文法族として単調終端一意解析アレイ文法 (MTUPAG) を提案した [10]. MTUPAG は, 長方形や正方形集合などを含む興味ある幾何学的図形集合を生成できる能力を持っている.

ところで，こういった文法族の生成能力を特徴づける方法として，2次元テープ受理機械との関係を調べるやり方がある．著者らは文献 [11] において，UPAG とその各種サブクラスの諸性質を詳しく研究するための手始めとして，それらの1次元版と種々の1次元テープ受理機械との関係を研究した．その結果，1次元一意解析アレイ文法(1UPAG)，1次元文脈依存一意解析アレイ文法(1CSUPAG)，1次元単調終端一意解析アレイ文法(1MTUPAG)の生成能力が，それぞれ，Turing 機械，決定性線形有界オートマトン，有限オートマトンによって正確に特徴付けられることを示した．

本稿では，本来の(2次元の)UPAG, CSUPAG, MTUAPG について，それらの生成能力が種々の2次元テープ受理機械によってどのように特徴づけられるかを調べる．生成または受理される2次元言語として“長方形言語”(各要素が記号の長方形配列であるような言語)の族だけを考えた場合，UPAG と CSUPAG が，それぞれ，2次元決定性 Turing 機械(2DTM)，2次元決定性線形有界オートマトン(2DLAB)と等価になることを証明する．また，MTUPAG が生成する長方形言語の族が，2次元決定性オンラインテセレーション受理機(2DOTA) [3] が受理する言語族を包含することを示す．

2 諸定義

Σ を記号の空でない有限集合とする． Σ 上の(2次元の)語とは，Σ の記号の2次元有限連結配列である．Σ 上のすべての語の集合をΣ^{2+}で表す(ただし，空語はΣ^{2+}に含まれない)．

アイソメトリック・アレイ文法 (*Isometric Array Grammar: IAG*) とは，つぎの5項組である．

$$G = (N, T, P, S, \#)$$

ここで，N は非終端記号の空でない有限集合; T は終端記号の空でない有限集合; $N \cap T = \emptyset$; P は $\alpha \to \beta$ という形式の書き換え規則の有限集合．ただし，α と β は $N \cup T \cup \{\#\}$ 上の語で，次の条件をみたす:

1. α と β の形は，幾何学的に同じ形である．
2. α は少なくとも1つの非終端記号を含む．
3. α の終端記号は，書き換え規則 $\alpha \to \beta$ の適用によって書き換えられない．
4. 書き換え規則 $\alpha \to \beta$ を適用しても，適用を受けた配列の連結性は保存される．

$S\,(\in N)$ は開始記号; $\#\,(\notin N \cup T)$ は空白記号を表す．

通常の1次元の句構造文法と同様に，IAG においても，以下のような用語と記法をもちいる．詳しい定義については，文献 [7, 10] を参照のこと．文法 G による直接導出: $\underset{G}{\Rightarrow}$; 文法 G による長さ n の導出: $\overset{n}{\underset{G}{\Rightarrow}}$; 関係 $\underset{G}{\Rightarrow}$ の反射的かつ推移的閉包(導出): $\overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}}$; 文形式．また，語 $\xi \in (N \cup T)^{2+}$ を空白記号 $\#$ の2次元無限配列に埋め込んだものを $\xi_\#$ と書く．

G が生成する(2次元)言語を $L(G)$ で，文法のクラス $\mathcal{C}$ によって定められる言語のクラスを $\mathcal{L}(\mathcal{C})$ で表す．また，$L(G)$ の要素がすべて長方形配列のとき，$L(G)$ を長方形言語といい，文法のクラス $\mathcal{C}$ によって定められる長方形言語のクラスを $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathcal{C})$ と記す．

定義 2.1 $G = (N, T, P, S, \#)$ を IAG とする．P の規則 $\alpha \to \beta$ が $\eta \in (N \cup T)^{2+}$ に逆適用可能とは，$\eta_\#$ 中に β が部分配列として存在することをいう．$\eta_\#$ 中の部分配列 β の1つを α で置き換えて得られる配列を $\xi_\#$ とするとき，η から ξ が還元されるといい，$\eta \Leftarrow \xi$ と書く．

明らかに

$$\eta \Leftarrow\!\!\dashv \xi, \text{ iff } \xi \Rightarrow \eta$$

が成り立つ.

書き換え規則 $\alpha \to \beta$ を適用または逆適用したとき，それによって書き換えられない(同じ記号に書き換えられる) α または β の部分配列を文脈部分，真に書き換えられる α または β の部分配列を書き換え部分と呼ぶ.

定義 2.2 IAG $G = (N, T, P, S, \#)$ において，P が次の条件をみたすとき，G を一意解析アレイ文法 (*Uniquely Parsable Array Grammar: UPAG*) と呼ぶ.

1. P の各規則の右辺は，# でも S でもない記号を少なくとも 1 つ含む.
2. P の任意の規則 r_1, r_2 について，それぞれの右辺をどのような位置で重ね合わせても，重なっている部分の記号がすべて一致するならば，
   (a) それらはすべて，それぞれ r_1 と r_2 の文脈部分に属しているか，または，
   (b) 右辺全体が完全に重なっており，かつ $r_1 = r_2$ である.

条件 2は，$r_1 = r_2$ の場合にも課せられることに注意.

定義 2.3 UPAG $G = (N, T, P, S, \#)$ において，P のどの規則も左辺の非空白記号を右辺で空白記号 # に書き換えないならば，G を文脈依存 **UPAG** (*Context Sensitive UPAG: CSUPAG*) と呼ぶ.

定義 2.4 CSUPAG $G = (N, T, P, S, \#)$ において，P のどの規則も右辺の終端記号の数が左辺の終端記号の数よりも真に多いならば，G を単調終端 **UPAG** (*Monotone Terminating UPAG: MTUPAG*) と呼ぶ.

3 決定性 2 次元テープ受理機による UPAG とその部分族の特徴づけ

3.1 UPAG の生成能力

定義 3.1 長方形言語の受理機としての 2 次元決定性 Turing 機械 (2DTM) は，2 次元の無限テープと有限制御部からなり，

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$$

によって定義されるシステムである. 但し，

Q は内部状態の空でない有限集合，
Σ は入力記号の空でない有限集合，
Γ はテープ記号の空でない有限集合 $(\Sigma \subseteq \Gamma)$，
a_0 は空白記号 $(a_0 \in \Gamma - \Sigma)$，
q_0 は初期状態，
q_f は受理状態（停止状態），
δ: $Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R, U, D\} \cup \{H\}$ なる動作関数.

(L, R, U, D はヘッドの移動方向であり，それぞれ，左，右，上，下移動を表す. また，H は停止を表す.)

$x \in \Sigma^{2+}$ を $h \times w$ のサイズの任意の長方形状の入力記号配列とする. x が適当な位置に書かれ，テープのその他の部分はすべて a_0 であるようなテープを M に与え，x の第 1 行第 1 列のます目にヘッドを置いて初期状態 q_0 から動作を開始させたとする. このとき，最終的に受理状態 q_f で停止するならば，x は M によって受理されるという. M によって受理される入力記号配列の集

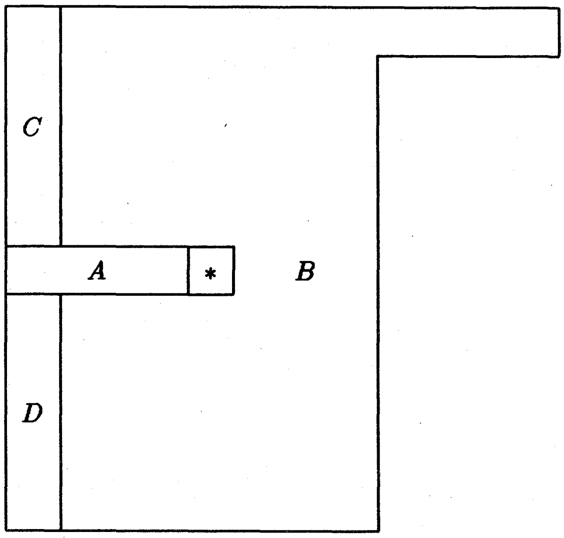

図 1: 各非終端記号の使われる領域(* はヘッド位置)

合（長方形言語）を $L(M)$ と書く. 2DTM によって受理される長方形言語の族を $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DTM})$ と書く.

補題 3.1

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DTM}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{UPAG})$$

[証明概略]　長方形言語を受理する任意の 2DTM を

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$$

とする. 但し, テープ記号の集合 Γ と入力記号の集合 Σ は次のような集合であるとする.

$$\Gamma = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$$
$$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\} \quad (m \leq n)$$

$L(G) = L(M)$ となるような UPAG G を構成する基本的な考え方は次の通りである. G は, 任意の語 $x \in \Sigma^{2+}$ が与えられたときの M の動作を逆方向に模倣する. つまり, G は x 上での M の順方向の動作を x の還元過程によって模倣し, M が入力 x を受理して停止した場合には, x がさらに開始記号 S にまで還元されるようにする. M が決定性であるので, 基本的には, 還元過程が決定的に進むことになるが, G が UPAG 条件を厳密に満たすようにするために, 幾つかの工夫が必要となる.

まず, M は以下の制約を満たすものとする（テープ記号と状態の数を増やすことにより, 容易にこの制約を充足させることができる）.

1. $h \times w$ のサイズの入力 x に対して, M が補助記憶として使用できる領域は, 座標 $(1, w)$ のます目の右に位置する 1 次元片無限の領域である（但し座標の付け方は, 入力 x の左上すみのます目を $(1, 1)$ とする行列方式による）. なお, 入力 x が書かれた長方形領域中のます目は自由に読み書きができる.
2. 任意の i $(2 \leq i \leq h)$ に対し, M は座標 $(i, w+1)$ のます目にヘッドを移動させることはない.
3. M がヘッドを上下に移動できるのは第 1 列目, つまり座標 $(i, 1)$ $(0 \leq i \leq h+1)$ だけである.
4. M は a_0 でない記号を a_0 に書き換えることはない.
5. M がヘッドを上方（下方, 左方）に移動して記号 a_0 を読んだ場合には, a_0 をそのままにして, 次のステップでヘッドを下方（上方, 右方）に移動させなければならない.
6. M が x を受理するときは, 座標 $(h, 1)$ のます目にヘッドをおいて受理状態で停止する.

さてこのとき, $L(G) = L(M)$ となる UPAG G は次のようにして構成できる.

$$G = (N, T, P, S, \#),$$
$$N = \{S, V, W\}$$

$$\cup\{A_0, A_1, \ldots, A_n\} \cup \{B_0, B_1, \ldots, B_n\}$$
$$\cup\{C_1, \ldots, C_n\} \cup \{D_1, \ldots, D_n\}$$
$$\cup\{E_1, \ldots, E_m\} \cup \{F_1, \ldots, F_m\}$$
$$\cup\, Q \times \{a_0, a_1, \ldots, a_n\},$$
$$T \;=\; \Sigma.$$

生成規則の集合 P は次のようになる.

1. 各々の $a_r, a_s, a_t, a_u, a_v \in \Sigma$ に対して, 以下の規則を P に含める.

$$\begin{array}{cc} F_r & \# \\ \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} a_r & \# \\ \# & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} a_r & \# \\ F_s & \# \\ E_t & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} a_r & \# \\ a_s & \# \\ F_t & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \# & \\ E_r & \# \\ E_s & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \# & \\ a_r & \# \\ F_s & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a_r & F_s & B_t \\ \# & \# & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} a_r & a_s & E_t \\ \# & \# & \# \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} a_r & E_s \\ F_t & B_u \\ E_v & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} a_r & E_s \\ a_t & E_u \\ F_v & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \# & \# \\ E_r & B_s \\ E_t & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \# & \# \\ a_r & E_s \\ F_t & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \# & E_r & B_s \\ & \# & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \# & a_r & E_s \\ & \# & \# \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \# & E_r & B_s \\ \# & D_t & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \# & a_r & E_s \\ \# & E_t & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \# \\ \# & (q_0, a_r) \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & \# \\ \# & E_r \end{array}$$

2. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s, a_t \in \Gamma$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, L)$ ならば,

$$(q_j, a_t) B_s \rightarrow A_t (q_i, a_r)$$

を P に含める.

3. 各々の $q_i, q_j, q_k \in Q$, $a_r, a_s \in \Gamma - \{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, L)$ かつ $\delta(q_j, a_0) = (q_k, a_0, R)$ ならば,

$$\#\ (q_k, a_s) \rightarrow \#\ (q_i, a_r)$$

を P に含める.

4. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s, a_t \in \Gamma$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, R)$ ならば,

$$A_s (q_j, a_t) \rightarrow (q_i, a_r) B_t$$

を P に含める.

5. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s \in \Gamma$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, R)$ ならば,

$$\begin{array}{ccc} \# & \# & \\ A_s & (q_j, a_0) & \# \\ & \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \# & \# & \\ (q_i, a_r) & \# & \# \\ & \# & \end{array}$$

を P に含める.

6. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s, a_t \in \Gamma - \{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, U)$ ならば,

$$\begin{array}{c} (q_j, a_t) \\ D_s \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} C_t \\ (q_i, a_r) \end{array}$$

を P に含める.

7. 各々の $q_i, q_j, q_k \in Q$, $a_r, a_s \in \Gamma - \{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, U)$ かつ $\delta(q_j, a_0) = (q_k, a_0, D)$ ならば,

$$\begin{array}{c} \# \\ (q_k, a_s) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \# \\ (q_i, a_r) \end{array}$$

を P に含める.

8. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s, a_t \in \Gamma - \{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, D)$ ならば,

$$\begin{array}{c} C_s \\ (q_j, a_t) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} (q_i, a_r) \\ D_t \end{array}$$

を P に含める.

9. 各々の $q_i, q_j \in Q$, $a_r, a_s \in \Gamma - \{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i, a_r) = (q_j, a_s, D)$ かつ $\delta(q_j, a_0) = (q_k, a_0, U)$ ならば,

$$\begin{array}{c} (q_k, a_s) \\ \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} (q_i, a_r) \\ \# \end{array}$$

を P に含める.

10. 各々の $a_i, a_j \in \Gamma$ に対して, 以下の規則を P

に含める.

$$\begin{array}{ccc} C_i & \rightarrow & C_i \\ \mathrm{W} & & (q_f, a_j) \end{array}$$

$$\mathrm{S}\ \mathrm{W}\ B_i \rightarrow \mathrm{W}\ B_j B_i \qquad \mathrm{S}\ \mathrm{S}\ \# \rightarrow \mathrm{W}\ B_i\, \#$$

$$\begin{array}{c} C_i \\ \mathrm{V} \\ \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} C_i \\ C_j \\ \mathrm{S} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{S} & \mathrm{V} & B_i \\ & \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \mathrm{V} & B_j & B_i \\ & \mathrm{S} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S} & \mathrm{S} & \# \\ & \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} \mathrm{V} & B_i & \# \\ & \mathrm{S} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \# & \\ \mathrm{S} & B_i \\ \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \# & \\ C_j & B_i \\ \mathrm{S} & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \# & \# \\ \# & \mathrm{S} \\ & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \# & \# \\ \mathrm{S} & B_i \\ \mathrm{S} & \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \# & \# \\ \# & \mathrm{S} \\ \# & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} \# & \# \\ \mathrm{S} & B_i \\ \# & \# \end{array}$$

G による導出は, M の動作を逆向きに模倣している. 任意の長方形の語 $x \in \Sigma^{2+}$ を G によって還元すると, まず, (1) の規則によって, M に x を与えたときの初期時点表示(*instantaneous description*)が作られる. また, G の規則 (2)-(9) による 1 ステップの逆書き換えは, M の 1 ステップの動作に対応しており, これによって M の動作が模倣される. 但し, 規則 (3),(7),(9) は, 入力の左, 上, 下の端における 2 ステップの動作を模倣している. そして, M が受理状態で停止したときには, 規則 (10) により x は開始記号 S まで還元される.

したがって, M が x を受理するならば, 還元過程 $x \underset{G}{\overset{*}{\Leftarrow}} S$ が存在し, 逆に, $S \underset{G}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$ であるような x については, それを入力とする M を受理状態に導くような計算過程がある. つまり, $L(M) = L(G)$.

文法 G においては, 時点表示中の記号 a_i を表すために, そのテープ上の位置に応じて, A_i, B_i, C_i, D_i の 4 種類の記号のいずれかが使われる (図 1参照). これら 4 種類の記号の使い分けは, 書換規則集合が UPAG 条件に違反するのを防ぐためのものである (例えば, もし A_i の 1 種類だけだと, 規則 (2) と (4) が条件に反する). このことと, M が決定性の Turing 機械であることから, G が UPAG の条件を満たすことが容易に確かめられる. □

さて, (長方形言語に限定しない一般形状の言語に対して) $\mathcal{L}(\mathrm{IAG}) = \mathcal{L}(\mathrm{2DTM})$ が成り立つことは, 文献 [4, 7] に示されている. これと同様の方法により, $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{IAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DTM})$ を示すことができる. 一方,UPAG は IAG のサブクラスなので, $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{UPAG}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{IAG})$ が成り立つ. これらと, 補題 3.1より, 次の定理が導かれる.

定理 3.1

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{UPAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{IAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DTM})$$

3.2 CSUPAG の生成能力

定義 3.2 長方形言語の受理機としての 2 次元決定性線形有界オートマトン (2DLBA) は, 2 次元決定性 Turing 機械

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, a_0, q_0, q_f)$$

で次の制約 1,2 を満たすようなものをいう.

1. M がヘッドを上方 (下方, 左方, 右方) に移動して空白記号 a_0 を読んだ場合には, a_0 をそのままにして, 次のステップでヘッドを下方 (上方, 右方, 左方) に移動させなければならない.
2. M は空白記号でない記号を空白記号 a_0 に書き換えることはない.

より直観的に言えば,2DLBA は入力 x の領域内のます目だけを読み書きできるような 2DTM である.

補題 3.2

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DLBA}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{CSUPAG})$$

[証明概略]　与えられた任意の 2DLBA M に対して $L(G)=L(M)$ となる CSUPAG G を構成する方法は,基本的には,補題 3.1の場合と同じである.

2DTM の場合と同様,M がヘッドを上下に移動できるのは第1列目,つまり座標 $(1,i)$ $(0 \le i \le h+1)$ だけであるとする. CSUPAG G の作り方で,補題 3.1と異なっている点は次のとおりである: (2), (4) にあるΓを$\Gamma-\{a_0\}$ に変え,(10) の最後の書換規則を取り除く. そして,(5) の規則を次のものに変える.

5. 各々の $q_i, q_j, q_k \in Q$, $a_r, a_s \in \Gamma-\{a_0\}$ に対して, $\delta(q_i,a_r)=(q_j,a_s,R)$ かつ $\delta(q_j,a_0)=(q_k,a_0,L)$ ならば,

$$(q_k,a_s)\# \rightarrow (q_i,a_r)\#$$

　を P に含める.

以上の変更により,G が CSUPAG の条件を満たすことは容易に確かめられる.　□

補題 3.3

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{CSUPAG}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DLBA})$$

[証明概略]　任意に与えられた CSUPAG を

$$G=(N,T,P,S,\#)$$

とする. $L(M)=L(G)$ となる 2DLBA M の構成法の概略を以下に述べる.

M に入力記号配列 x $(\in T^{2+})$ が与えられたとする. M はテープ上の記号列 x を走査しながら,その記号列に逆適用できる生成規則が P の中にないかどうかを調べる. そのような規則が見つかったならば,テープ上で逆書き換えを実行する. M はこのような還元操作を繰り返し実行し,最終的にただ1つの S と,それ以外はすべて# である記号配列に到達できたならば,入力を受理して停止する.

G が CSUPAG であることから, M は x 上のます目だけを使って (つまり 2DLBA の条件を満たしながら), 上記の操作が実行できる. 文献 [10] の補題 3.3 より,もし $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$ ならば,上記の方法で x を還元することによって,ただ1つの S といくつかの # だけからなる記号列に必ず到達できる. したがって, $x \in L(G)$ ならば $x \in L(M)$ である. 逆に, $x \in L(M)$ ならば $x \in L(G)$ となることは上記の方法から明らかである.　□

補題 3.2と補題 3.3から次の定理が導ける.

定理 3.2

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{CSUPAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DLBA})$$

3.3　MTUPAG の生成能力

定義 3.3　決定性2次元オンラインテセレーション受理機(2DOTA)とは, 2次元格子点上に同じ有限状態機械が配置されたセルオートマトンであり,

$$M=(Q,Z^2,\Sigma\cup\{*\},\delta,q_e,q_0,F)$$

によって定義されるシステムである. ただし,

Q は内部状態の空でない有限集合,
Z^2 はすべての整数の順序対の集合,
Σ は入力記号の空でない有限集合,
'$*$' は境界記号で $* \notin \Sigma$,
$\delta : Q^3 \times (\Sigma\cup\{*\}) \rightarrow Q-\{q_e\}$ なる動作関数,
q_e は活性状態,
q_0 は静止状態.

位置 (i,j) のセルを (i,j)-セルと呼ぶ. 時刻 t における, (i,j)-セルの状態を $q_{(i,j)}(t)$, (i,j)-セルへ

の入力記号を a とすれば,

$$q_{(i,j)}(t+1) = \delta(q_{(i,j)}(t),\ q_{(i-1,j)}(t),\ q_{(i,j-1)}(t),\ a)$$

である. また, δ はつぎの基本性質を満たす.
任意の $a \in \Sigma \cup \{*\}$, 任意の $p_1, p_2, p_3 \in Q$ に対して,

1. $\delta(p_1, p_2, p_3, a) = q_0 \Leftrightarrow$
「$a = *$」または「$p_1 = q_0$ かつ p_2, $p_3 \in \{q_e, q_0\}$」.
2. $p_1 \in Q - \{q_e, q_0\}$ かつ $a \neq *$ ならば,
$\delta(p_1, p_2, p_3, a) = p_1$.

$Q - \{q_e, q_0\}$ の任意の要素を<u>安定状態</u>という.

M の状態が $q_{(1,1)}(0) = q_e$, $q_{(i,j)}(0) = q_0$ $((i,j) \neq (1,1))$ であるならば, これを M の<u>初期コンフィグレーション</u>という.

長方形配列 x $(\in \Sigma^{2+})$ において, x の位置 (i,j) の記号を $x(i,j)$, x の高さを $h(x)$, 幅を $w(x)$ と記す. 2DOTA M が x を受理するとは, M の (i,j)-セルに入力記号 $x(i,j)$ が与えられ（その他のセルの入力記号は '$*$'）, 初期コンフィグレーションから動作を開始したとき, $(h(x), w(x))$-セルの安定状態が F の要素になることをいう. (詳しい定義については, 文献 [2, 3] を参照のこと.)

定理 3.3

$$\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\text{2DOTA}) \subseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\text{MTUPAG})$$

[証明概略]　任意に与えられた 2DOTA を

$$M = (Q, Z^2, \Sigma \cup \{*\}, \delta, q_e, q_0, F)$$

とする. ただし, 内部状態の集合 Q, 入力記号の集合 Σ は次のような集合であるとする.

$$Q = \{q_e, q_0, q_1, \ldots, q_n\}$$
$$\Sigma = \{a_1, \ldots, a_m\}$$

$L(G) = L(M)$ となるような MTUPAG G を構成する基本的な考え方は, 次のとおりである. 任意の語 $x \in \Sigma^{2+}$ が与えられたとき, G は x 上での M の動作を逆方向に模倣する. つまり, G は, x を入力とする M の各セルの順方向の状態遷移を文形式の 1 ステップの還元によって模倣し, M が x を受理した場合には, x が開始記号 S に還元されるようにする.

このような MTUPAG G を次のようにして構成する.

$$\begin{aligned} G &= (N, T, P, S, \#), \\ N &= \{S\} \cup \{[q_i] \mid q_i \in Q - \{q_e, q_0\}\} \\ &\quad \cup \{[\hat{q}_i] \mid q_i \in Q - \{q_e, q_0\}\}, \\ T &= \Sigma. \end{aligned}$$

生成規則の集合 P は次のようになる.

1. 各々の $a_i \in \Sigma$, $q_r \in Q - \{q_e, q_0\}$ に対して, $q_r = \delta(q_e, q_0, q_0, a_i)$ ならば, 次の規則を P に含める.

$$\begin{array}{cc} & \# \ \# \\ \# & [\hat{q}_r] \\ \# & \end{array} \ \rightarrow \ \begin{array}{cc} & \# \ \# \\ \# & a_i \\ \# & \end{array}$$

(左上端のセルの動作に対応)

2. 各々の a_i, $a_s \in \Sigma$, q_j, $q_r \in Q - \{q_e, q_0\}$ に対して, $q_r = \delta(q_0, q_j, q_0, a_i)$ ならば, 次の規則を P に含める.

$$\begin{array}{cc} & [q_j] \\ \# & [\hat{q}_r] \\ \# & a_s \end{array} \ \rightarrow \ \begin{array}{cc} & [\hat{q}_j] \\ \# & a_i \\ \# & a_s \end{array}$$

(左端内部のセルの動作に対応)

$$\begin{array}{cc} & [q_j] \\ \# & [q_r] \\ & \# \end{array} \ \rightarrow \ \begin{array}{cc} & [\hat{q}_j] \\ \# & a_i \\ & \# \end{array}$$

(左下端のセルの動作に対応)

3. 各々の $a_i,\ a_s \in \Sigma,\ \ q_k,\ q_r \in Q-\{q_e,q_0\}$ に対して, $q_r=\delta(q_0,q_0,q_k,a_i)$ ならば, 次の規則を P に含める.

$$\begin{array}{ccc} & \# & \# \\ \# & [\hat{q}_r] & a_s \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & \# & \# \\ [q_k] & a_i & a_s \end{array}$$

(上端内部のセルの動作に対応)

$$\begin{array}{ccc} & \# & \\ \# & [q_r] & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & \# & \\ [q_k] & a_i & \# \end{array}$$

(右上端のセルの動作に対応)

4. 各々の $a_i,\ a_s,\ \in \Sigma,\ \ q_j,\ q_k,\ q_r\ \in Q-\{q_e,q_0\}$ に対して, $q_r=\delta(q_0,q_j,q_k,a_i)$ ならば, 次の規則を P に含める.

$$\begin{array}{cc} & [q_j] \\ \# & [\hat{q}_r] \\ & a_s \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & [\hat{q}_j] \\ [q_k] & a_i \\ & a_s \end{array}$$

(テープ内部のセルの動作に対応)

$$\begin{array}{cc} & [q_j] \\ \# & [q_r] \\ & \# \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} & [\hat{q}_j] \\ [q_k] & a_i \\ & \# \end{array}$$

(下端内部のセルの動作に対応)

$$\begin{array}{ccc} & \# & \# \\ \# & [q_r] & \# \\ & a_s & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & [q_j] & \# \\ [q_k] & a_i & \# \\ & a_s & \end{array}$$

(右端内部のセルの動作に対応)

5. 各々の $a_i \in \Sigma,\ \ q_j,\ q_k,\ \in Q-\{q_e,q_0\}$ に対して, $\delta(q_0,q_j,q_k,a_i) \in F$ ならば, 次の規則を P に含める.

$$\begin{array}{ccc} & \# & \# \\ \# & \mathrm{S} & \# \\ & \# & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} & [q_j] & \# \\ [q_k] & a_i & \# \\ & \# & \end{array}$$

(右下端のセルの動作に対応)

以上のような構成法により, M が x を受理するならば, 還元過程 $x \overset{*}{\underset{G}{\Leftarrow}} S$ が存在し, 逆に, $S \overset{*}{\underset{G}{\Rightarrow}} x$ であるような x については, それを入力とする M を受理状態に導くような計算過程があることがわかる. つまり, $L(M)=L(G)$.

また, M が決定性の OTA であることから, G がMTUPAG の条件を満たすことは容易に確かめられる. □

4 むすび

本稿では, UPAG, CSUPAG, MTUAPG の生成能力が 2 次元決定性テープ受理機械によってどのように特徴づけられるかを調べ, 次の結果を得た.

1. $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{UPAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DTM})$
2. $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{CSUPAG}) = \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DLBA})$
3. $\mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{MTUPAG}) \supseteq \mathcal{L}^{\mathrm{R}}(\mathrm{2DOTA})$

MTUPAG と 2 次元有限オートマトンとの関係や, 上記 1,2 の関係が長方形言語に限定しない一般の場合にも成り立つのか, などは未解決問題として残される.

参考文献

[1] Cook, C.R. and Wang, P.S.P., "A Chomsky hierarchy of isotonic array grammars and languages," *Computer Graphics and Image Processing*, **8**: 1, 144–152 (1978).

[2] 井上, 中村, "2 次元オンラインテセレーションアクセプタと 1 次元限定セル構造アクセプタの関係," 信学論, **J59-D**, 613–620 (1976).

[3] Inoue, K. and Nakamura, A., "Some properties of two-dimensional one-line tesselation acceptors," *Information Sciences*, **13**, 95–121 (1977).

[4] Milgram, D.L. and Rosenfeld, A., "Array automata and array grammars," *Information Processing* **71**, 69–74 (1972).

[5] Morita, K., Yamamoto, Y., and Sugata, K., "The complexity of some decision problems about two-dimensional array grammars," *Information Sciences*, **30**, 241–262 (1983).

[6] Rosenfeld, A., "Isotonic grammars, parallel grammars, and picture grammars," in *Machine Intelligence VI*, Eds. D. Michie and B. Meltzer, pp.281–294, University of Edinburgh Press, Scotland (1971).

[7] Rosenfeld, A., *Picture Languages*, Academic Press, New York (1979).

[8] Yamamoto, Y., Morita, K., and Sugata, K., "An isometric context-free array grammar that generates rectangles," *Trans. IECE Japan*, **E65**, 754–755 (1982).

[9] Yamamoto, Y., Morita, K., and Sugata, K., "Context-sensitivity of two-dimensional regular array grammars," *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, **3**: 3 & 4, 295–319 (1989), and in *Array Grammars, Patterns and Recognizers*, Ed. P.S.P. Wang, World Scientific Publ., Singapore, pp.17–41 (1989).

[10] 山本, 森田, "決定的に構文解析ができる2次元アレイ文法のクラスについて," 信学技報, **COMP90-13**, 17–22 (1990).

[11] 山本, 森田, "1次元一意解析可能アレイ文法の階層構造," 1990年夏のLAシンポジウム予稿 (1990).

[12] Wang, P.S.P., "Hierarchical structures and complexities of parallel isometric languages," *IEEE Trans.* **PAMI-5**, 92–99 (1983).