数理解析研究所講究録
第756巻 1991年 68-84

微分方程式のモジュライと変形

東大・理　　岩崎克則　K. Iwasaki

今日の講演のテーマは，幾何的に申しますと，任意種数の閉リーマン面上の，あるクラスのFuchs型射影接続のモジュライと変形を論じることです。

つまりRiemann面上のあるクラスのFuchs型射影接続のモジュライ空間を構成して，その解析空間，あるいは複素多様体としての幾何学的性質を調べます。

更に考えているconnectionsのモノドロミー保存変形をシンプレクティック幾何的な見地から調べます。またconnectionsのモジュライ空間のPoisson構造についても考えます。

一般に，数理物理において興味の対象となる非線型微分方程式は，何らかの意味での"線型微分方程式"の変形を記述する力学系の可積分条件として与えられます。

たとえばスペクトル保存変形とソリトン方程式，モノドロミー保存変形とPainlevé方程式やSchlesinger系との関係です。また格子模型とYang-Baxter方程式との関連もあります。

また広い意味での"線型微分方程式"の変形を考える訳ですから，そもそも線型微分方程式のモジュライを考察して，その上の力学系を考察するという順序になります。

たとえば最も一般なスペクトル保存変形を考察する時には，"線型微分方程式"としては，1次元擬微分作用素を考えることになりますから，擬微分作用素のモジュライとして無限次元Grassmanian多様体があらわれます。

話をモノドロミー保存変形に限りましょう。

御存知かどうかわかりませんが、解析的な線型微分方程式のモノドロミー保存変形は、最近20年間の発展とともに古い歴史を持っています。

実際それはRiemannに遡ることができます。私には正確にRiemannが何を考えていたのかは分かりませんが、Riemannはモノドロミー保存変形を考えることによって、Abel関数やtheta関数を一般化する夢を持っていたということです。

τ-関数の理論などが現われて、このような思想が実現されてきたのですが、それは最近の話で、歴史を続けましょう。

Riemannの後、射影直線上の線型常微分方程式のモノドロミー保存変形が数学的にきちんとした形で初めて論じられたのは、今世紀の初頭で、息子のFuchs, Schlesinger, Garnier達の仕事でした。

最近では良く知られるようになった一連のPainlevé方程式もモノドロミー保存変形とは深いつながりがあります。

70年代の初めから、現在駒場の岡本和夫先生は、Painlevé方程式やモノドロミー保存変形について、独り研究されていましたが、爆発的に発展したのは、70年代の中頃ソリトン理論や格子模型の理論やholonomic quantum field theoryなどの数理物理学との予期しない関連が明らかになってからです。

たとえばIsing模型のcorrelation functionが、格子の

極限移行のあとで Painlevé transcendent を使って書けたり、また極く最近ストリング理論で Painlevé transcendent が現われたりという状況です。

モノドロミー保存変形について申しあげると、80年代の初め頃、射影直線上の一階常微分方程式系に対して Stokes 現象を込めた広い意味でのモノドロミー保存変形の理論と τ-関数の理論が三輪・神保・上野さんたちによって作られました。

また、やはり射影直線上で二階常微分方程式のモノドロミー保存変形を考えることによって、Painlevé 方程式の多変数版である Garnier 系が得られます。これは、ある種の Hamilton 系で、岡本・木村弘信両氏により詳しく研究されています。

代数幾何の梅村さんによると、"退化した" Garnier 系というものが、theta 関数との関連で重要なのだそうです。"退化した" というのは、どういう意味かというと、そもそも Garnier 系はあるアフィン空間でパラメータ付されていまして、そのパラメーター空間にはアフィン・ワイル群が働いています。その基本領域の特別な点に対応する Garnier 系を "退化した" Garnier 系と呼ぶわけです。

先の学会の時に梅村さんに聞いた話ですと、今日本に来ている Cartier は、別の見地から退化した Garnier 系に到ったということです。来週の月曜日から熊本で Cartier を囲む研究集会があるので、どういう話か聞いて来たいと思っています。

今回お話させて頂くのは，genus が 0 という特別の場合に，先に申した Garnier 系を導くような変形理論のお話しです。

荒くいいますと，

M : closed Riemann surface of genus $g \geq 0$

上の Schrödinger 型微分作用素

$$L(Q) = -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \quad \text{in loc. coord. expression}$$

のモジュライと変形を考えるということです。

局所的な係数 $Q(x)$ は極を持って構いません。ただし，目下のところ，$L(Q)$ は Fuchs 型という条件の下で考えます。

K : canonical line bundle over M

ξ : a holomorphic line bundle over M

としますと，一般に M 上の 2 階線型微分作用素は

$$L : \mathcal{M}(\xi) \longrightarrow \mathcal{M}(\xi \otimes K^{\otimes 2})$$

と考えられますが，今考えている Schrödinger 型作用素は一階微分の項がないという特別な作用素ですから，そのような作用素が乗る line bundle ξ は一般ではいけません。当然 topological constraint が必要です。

<u>Topological constraints on ξ</u>

$\exists$ S-型作用素 on ξ $\Leftrightarrow$ $\quad H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $\quad c_1(\xi) = 1-g$

以下 line bundle ξ は，この条件を満たすものをひとつ固定します。また以後，単に微分作用素と

いえば，先に考えたような Schrödinger 型作用素を意味するものとします。

ここで terminology をはっきりさせる為に，ほとんどの人はよく御存知でしょうが，Fuchs 型方程式の初等事項を復習しましょう。

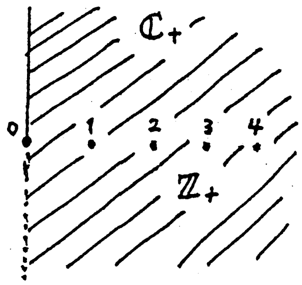
$$(\star) \qquad \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + Q(x) \right\} f = 0 \quad \text{at} \quad x = 0$$

1) $x=0$: reg. sing. pt. $\Leftrightarrow$ $Q(x) \in x^{-2}\mathbb{C}\{x\}$

2) 特性指数 $\lambda_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \theta)$

i.e. θ : 特性指数の差 $\in \mathbb{C}_+$

が定義されて，$(\star)$ の独立な local solutions は次の形：



(i) $\theta \notin \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f_\pm(x) = x^{\lambda_\pm} g_\pm(x)$

(ii) $\theta \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow f_+(x) = x^{\lambda_+} g_+(x)$

$$f_-(x) = x^{\lambda_-} g_-(x) + x^{\lambda_+} \log x \cdot h_+(x)$$

但し，$\underset{\substack{\not\equiv \\ 0}}{g_\pm(x)},\ h_+(x) \in \mathbb{C}\{x\}$

<u>Classification of reg. sing. pts</u>

$$\text{reg. sing.} \begin{cases} \text{generic} \Leftrightarrow \text{(i)} \\[2ex] \underset{\substack{\Updownarrow \\ \text{(ii)}}}{\text{nongeneric}} \begin{cases} \text{logarithmic} \Leftrightarrow \text{(ii) かつ } h_+(x) \not\equiv 0 \\[2ex] \text{nonlogarithmic} \Leftrightarrow \text{(ii) かつ } h_+(x) \equiv 0 \end{cases} \end{cases}$$

$\|$

apparent 見かけ ——--- 続く

apparent というのは，次のような意味合いから来ています。

微分方程式の solution sheaf は $M \setminus \{\text{sing. pts}\}$ の基本群の線型表現を定め，それは更に projective monodromy 表現を定めます：

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M \setminus \{\text{sing. pts}\}) & \xrightarrow{\text{LMR}} & SL(2, \mathbb{C}) \\ & \searrow^{\text{PMR}} & \downarrow \\ & & PSL(2, \mathbb{C}) = SL(2, \mathbb{C})/\text{中心} \end{array}$$

このとき apparent singular point は projective monodromy に何の効果も及ぼしません。即ち PMR は，表現

$$\pi_1(M \setminus \{\text{app. 以外の sing.}\}) \xrightarrow{\text{PMR}} PSL(2, \mathbb{C})$$

と見なせるのです。このため見かけ = apparent と申します。

重要なことは，次が成りたつことです。

<u>Lemma</u>

$\theta \in \mathbb{Z}_+, \geqq 2$ at an app. sing. pt.

そこで $\theta = 2$ なる app. sing. pt. を基底状態 (of ground state)，$\theta > 2$ なる app. sing. pt. を励起状態 (of excited state) と呼ぶことにします。

$$\cdots\text{—app. sing. pt.} \begin{cases} \text{of ground state} \Leftrightarrow \theta = 2 \\ \text{of excited state} \Leftrightarrow \theta > 2 \end{cases}$$

今回の話では，generic singular point と apparent singular point of ground state だけが出て来て，それ以外の regular singular point は出て来ません。

Notation をひとつ与えておきます。微分作用素 L に対して.

<u>Notation</u>

m := # of generic sing. pts of L

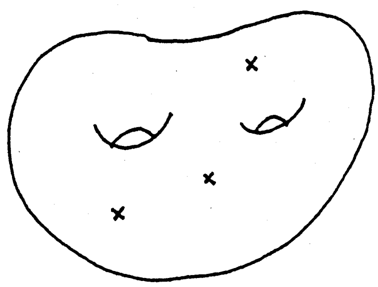
n := # of apparent 〃

m と n が一般でも.ある程度話ができるのですが.次の仮定を設けると.非常に美しい変形理論ができます。

<u>仮定</u> (#)

$n = m + 3g - 3$

$=$ m 個の穴あき genus $= g$ の Riemann 面のモジュライ数



$g=2,\quad m=3$

さて.我々が考える微分作用素のクラスは次のものです:

$$\theta = (\theta_1, \cdots, \theta_m) \in (\mathbb{C}_+ \setminus \mathbb{Z}_+)^m \quad : \text{ fixed}$$

に対して.

$E(m;\theta) = \{$ diff. operators L with $m+n$ <u>ordered</u> reg. sing. pts s.t. (i) for $j = 1, \cdots, m$, the j^{th} singular pt has the char. exponents $\frac{1}{2}(1 \pm \theta_j)$, and (ii) the last n singular points are <u>apparent</u> and <u>of ground state</u> $\}$

とおき: 更に

$B(\ell) := \{$ 順序付の ℓ 個の点 in M の組 $\}$

とおきますと.次の自然な射影があります。

$$
\begin{array}{cccl}
\pi: E(m;\theta) & \longrightarrow & B(m+n) & \\
\Psi & & \Psi & \\
L & \longmapsto & \mathbb{r} = (p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots q_n) &
\end{array}
$$

ordered regular points of L.

このとき. Riemann-Roch や Kodaira-Spencer, local analytic geometry の elements を Fuchs 型微分方程式の基本事項, 例えば Fuchs' criterion や Frobenius の方法などと一緒にゴチャゴチャやりますと、次の定理が得られます。

<u>定理 1</u>

$E(m;\theta)$: a natural analytic space structure s.t.

(i) pure dim $= m+2n$,

(ii) π: holo. surjection.

次に

$$M^m \times M^n \supset B(m+n) \xrightarrow{p} B(m) \subset M^m$$

proj. into the first m components

とすると. diagram

$$
\begin{tikzcd}
 & E(m;\theta) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\varpi"] \\
B(m+n) \arrow[r, "p"'] & B(m)
\end{tikzcd}
\qquad 全部 \text{ surj.}
$$

を得ます。そこで

$$E(\mathbb{P};\theta) := \varpi\text{-fiber over } \mathbb{P} \in B(m)$$

とおくと 次の 定理を 得ます。

定理2

$\forall \mathbb{P} \in B(m)$, $E(\mathbb{P};\theta)$: analytic subspace of $E(m;\theta)$
pure dimension $= 2n$

次元が even であることは、後に symplectic geometry との関連で重要です。

定義

$L \in E(m;\theta)$: (ir)reducible $\Leftrightarrow$ L の monodromy 表現が (ir)reducible

reducible な作用素は moduli 空間の中ではいやらしい点なので、次の定理で安心します。

定理3

(i) $E(m;\theta)_{red}$ (resp. $E(\mathbb{P};\theta)_{red}$) : analytic subspace of $E(m;\theta)$ (〃 $E(\mathbb{P};\theta)$) of codim $\geq n-1$.

(ii) $E(m;\theta)_{red} = \phi$ for θ : Zariski open

ただし、注意して欲しいのは、$E(m;\theta)_{irr}$ は smooth かというと、そうではなくて、実は一般に singularities を含みます。どこに singularities があるか？ という問は、実は今回の話の核心のひとつです。

次に、m 個の穴あき Riemann 面の基本群の射影表現のモジュライ空間について考えましょう。

$G := PSL(2, \mathbb{C})$ とおきます。

各 $\mathbb{P} = (p_1, \cdots, p_m) \in B(m)$ に対して

$$R(\mathbb{P})_{irr} := \mathrm{Hom}(\pi_1(M \setminus \{p_1, \cdots, p_m\}), G)_{irr} / \mathrm{Inn}\, G$$

Gの内部自己同型群

既約表現全体

とおき、これに自然な位相を入れます。自然な位相というのは、π_1 を discrete 群、G を Lie 群として $\mathrm{Hom}(\pi_1, G)_{irr}$ に compact-open top. を入れ、$\mathrm{Inn}\, G$ で割る所では quotient topology に移行します。このとき $R(\mathbb{P})_{irr}$ は $m+2n$ 次元複素多様体としての自然な構造が入ります。そこで

$$R(\mathbb{P};\theta)_{irr} := \left\{ \rho \in R(\mathbb{P})_{irr} \;;\; \begin{array}{l} \text{the circuit matrix } (\mathrm{mod} \pm I) \text{ at } p_j \text{ induced} \\ \text{by } \rho \text{ has eigenvalues } \exp(\pm\pi\sqrt{-1}\,\theta_j) \\ (\mathrm{mod} \pm 1), \text{ for } j = 1, \cdots, m \end{array} \right\}$$

とおきますと、

定理4

$\forall \mathbb{P} \in B(m)$, $R(\mathbb{P};\theta)_{irr}$: complex manifold of $\dim = 2n$
admits natural symplectic str.

この symplectic structure は Local system 係数の cohomology に対する Poincaré - Lefschetz duality から来るものですが、時間があれば後で触れることにして先に進みましょう。

次の disjoint union を考えます：

$$R(m;\theta)_{irr} := \coprod_{\mathbb{P}\in B(m)} R(\mathbb{P};\theta)_{irr}$$

これは自然に $B(m)$ 上の local system です。基点 $\mathbb{P}^\circ \in B(m)$ における characteristic homomorphism は、braid 群の自然な作用で与えられる：

$$Br(m) := \pi_1(B(m), \mathbb{P}^\circ) \longrightarrow Aut(R(\mathbb{P}^\circ;\theta)_{irr})$$

従って定理というほどでないのですが、

<u>定理5</u>

$R(m;\theta)_{irr}$: $B(m)$ 上の局所系，特に complex mfd of $\dim = m+2n$

以上の準備の下にやっと projective monodromy map が定義できます：

<u>定義</u>

$$\begin{array}{lcl} PM: E(m;\theta)_{irr} & \longrightarrow & R(m;\theta)_{irr} \\ \quad\quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$} & & \quad\ \ \rotatebox{90}{$\in$} \\ \quad\quad\ \ L & \longmapsto & L\text{の射影モノドロミー表現類} \end{array}$$

これは holomorphic map です。

この時、次の可換図式を得ます。

$$\begin{tikzcd}
 & E(m;\theta)_{irr} \arrow[r, "PM"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dd, "\varpi"] & R(m;\theta)_{irr} \arrow[ddl, "\text{loc. system}"] \\
B(m+n) \arrow[dr, "p"'] & & \\
 & B(m) &
\end{tikzcd}$$

全部 surj.

ところで $E(m;\theta)_{irr}$ は必ずしも smooth ではなくて analytic space であることが分っているだけだから

「どこに singularities があるの？」

と尋ねてみるのは自然です。

それに対する賢い解答は次のような line bundle の変形族を考えることです：

$$\xi(\mathbb{r}) := K^{\otimes 2} \otimes [p_1 + \cdots + p_m - (q_1 + \cdots + q_n)]$$

$$\mathbb{r} = (p_1, \cdots, p_m, q_1, \cdots, q_n) \in B(m+n).$$

何故これを考えるかを説明しだすと時間がなくなるので，認めて下さい。仮定 (#) $n = m + 3g - 3$ により

$$c_1(\xi(\mathbb{r})) = g - 1$$

従って Riemann-Roch の定理は次の形となります：

$$(\mathrm{FA}) \quad \dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) = \dim H^1(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r})))$$

これを Fredholm Alternative と呼ぶことにします。一般の $\mathbb{r}$ に対しては (FA) の両辺は 0 ですが，稀に jump する点があるかもしれません。cohomology の jump する点を $A(m)$ とおきましょう：

$$A(m) := \{ \mathbb{r} \in B(m+n) \ ; \ \dim H^0(M, \mathcal{O}(\xi(\mathbb{r}))) > 0 \},$$

$$X(m) := B(m+n) \setminus A(m).$$

このとき

<u>補題</u>

$X(m)$: Zariski open in $B(m+n)$ s.t.

$$p : B(m+n) \supset X(m) \longrightarrow B(m) \quad : \text{surj.}$$

$g=0$ の時 $A(m)=\phi$, $g=1$ の時も $A(m)$ は具体的に書き表わせます。

今後 $E(m;\theta)_{irr}$ のかわりに

$$\mathcal{E}(m;\theta)_{irr} := \pi^{-1}(X(m)) \subset E(m;\theta)_{irr}$$

を考えます。この時 前の可換図式を修正して

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}(m;\theta)_{irr} \arrow[r, "PM"] \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[d, "\varpi"] & R(m;\theta)_{irr} \arrow[dl, "\text{loc. sys.}"] \\
X(m) \arrow[r, "p"'] & B(m) &
\end{tikzcd}$$

すべて surj.

が得られます。

筆記体の $\mathcal{E}$ の上では, PM は綺麗に振舞います。

<u>定理 6</u>

$PM: \mathcal{E}_{irr} \xrightarrow{PM} R_{irr}$ は *locally biholomorphic*

特に $\mathcal{E}_{irr}$ は *complex manifold*.

証明の鍵は *meromorphic connections* に対するある種の *gauge equivalence relation* と *cohomology* に対する *semi-continuity theorem* です。

<u>定義</u>

局所系 $R_{irr} \to B$ の局所水平切断が定義する R_{irr} 上の *foliation* を *local biholo.* PM で引戻して得られる $\mathcal{E}_{irr}$ 上の *foliation* を *monodromy preserving foliation* とよぶ : MPF.

ところで、$\mathcal{E}(m;\theta)_{irr}$ ではなく、より広い $\mathcal{E}=\mathcal{E}(m;\theta)$ の構造を、別の見地からより詳しく調べることができます。それは、前に導入した line bundles の変形族 $\xi(\mathbb{r})$、但し $\mathbb{r}\in X=X(m)$ に associate した、ある種の Cousin 問題を考えるという立場です。この立場に立って、たとえば次の定理を示すことができます:

定理7

$\mathcal{E}$: admits a natural complex manifold structure s.t.
$\pi: \mathcal{E}\to X$: holo. affine b'dle of rk $=n$.
この complex str. は $\mathcal{E}_{irr}$ 上では前のものと一致する。

Cousin 問題を考えるときに、前に述べた Fredholm Alternative が威力を発揮します。実際それは、Cousin 問題の可解性と解の一意性が同値であるといっているからです:

$H^1=0 \iff$ Cousin 問題の可解性
$H^0=0 \iff$ 〃 解の一意性

だいぶ時間がおしつまって参りましたから、ここで議論のワープをして、いきなり

定理8

∃ closed 2-form Ω on $\mathcal{E}$ which deterimines a symplectic structure on each ϖ-fiber $\mathcal{E}(\mathbb{P}:\theta)$ over $\mathbb{P}\in B(m)$.

定理9

The monodromy preserving foliation is an Ω-Lagrangian foliation on $\mathcal{E}_{irr}$ which is transverse to each ϖ-fiber.

この transversality は monodromy 保存変形における変形パラメーターの空間として $B=B(m)$ がとれることを示している．空間 B の座標を用いて定理 9 の内容を微分方程式の形に書き下してみると，ある非線型方程式系が得られる．これが genus g に拡張した意味での Garnier 系である．

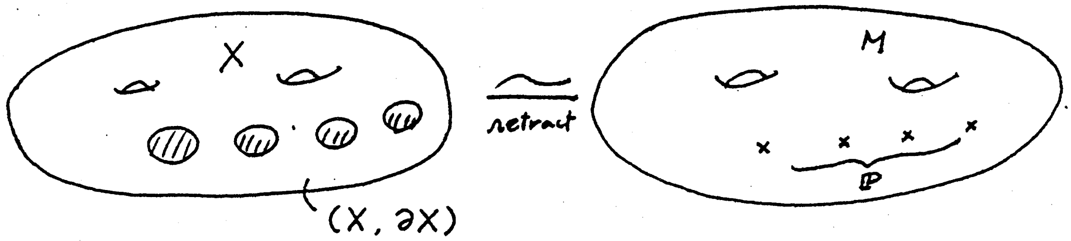
定理10

$\mathcal{E}$ admits a Poisson structure.

ところで projective monodromy map

$$PM : \mathcal{E}_{irr} \longrightarrow R_{irr}$$

があったが，R_{irr} も Poisson manifold であった．こちらの方は簡単に説明できます： $\mathbb{P} \in B(m)$, $\rho \in R(\mathbb{P})_{irr}$



$$\partial X = S^1 \amalg \cdots \amalg S^1 \quad (m\ コ)$$

P_ρ : principal b'dle associated to ρ over X

$L_\rho := P_\rho \times_{Ad} \mathrm{Lie}\, G$: loc. sys. over X

$$T_\rho R(\mathbb{P})_{irr} \cong \mathrm{Ker}[\, H^1(X; L_\rho) \underset{\text{restriction}}{\xrightarrow{j^*}} H^1(\partial X ; L_\rho) \,]$$

と自然に同一視できますが．一方 local system L_ρ を付与された空間対 $(X, \partial X ; L_\rho)$ の cohomology exact seq.

$$\cdots \to H^0(\partial X ; L_\rho) \xrightarrow{\delta^*} H^1(X, \partial X ; L_\rho) \xrightarrow{i^*}$$
$$\to H^1(X, L_\rho) \xrightarrow{j^*} H^1(\partial X ; L_\rho) \to \cdots$$

により．

$$T_\rho R(\mathbb{P})_{irr} \cong \frac{H^1(X, \partial X ; L_\rho)}{\delta^* H^0(\partial X ; L_\rho)}$$

もいえる．このとき Poincare - Lefschetz duality :

$$H^1(X ; L_\rho) \otimes H^1(X, \partial X ; L_\rho) \longrightarrow \mathbb{C}$$

は $T_\rho R(\mathbb{P})_{irr}$ 上の skew-symmetric bilinear form を induce する．これにより各 $R(\mathbb{P})_{irr}$ は almost symplectic manifold 実は symplectic manifold である．これから自然に $R(m)_{irr}$ は Poisson manifold．そこで

<u>定理11</u>

定理10 の Poisson str. on $\mathcal{E}_{irr}$ は Poisson str. on R_{irr} の PM による pull-back に他ならない．

この定理からさまざまのことがわかるのですが，時間もすぎたのでこれで終わることにします。

REFERENCES

[Ga] R. Garnier, Solution du probleme de Riemann pour les systemes differentiels lineaires du second ordre, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 43 (1926) 177-307.

[Go] W.M. Goldman, The sympletic nature of the fundamental groups of surfaces, Adv. in Math. 54 (1984) 200-225.

[Gu] R. Gunning, Lecture on Riemann surfaces, Mathematical notes, No.2, Princeton University Press, Princeton, 1966.

_________ Lecture on vectorbundles over Riemann surfaces, Mathematical notes, No.6, Princeton University Press, Princeton, 1967.

[I] K. Iwasaki, Moduli and deformation for Fuchsian projective connections on a Riemann surface, University of Tokyo preprint series, 89-16 (1989).

_________ Fuchsian moduli on a curve -- its Poisson structure and the Poincare-Lefschetz duality --, preprint.

[JMU] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I, -- General theory and -functions, Physica 2D (1981) 306-352.

[KO] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamilton structure of the Garnier system, J. Math. Pures et Appl. 63 (1984) 129-146.

[LM] P. Liebermann and C.M. Marle, Symplectic geometry and analytic mechanics, Reidel Publ. 1987.

[O] K. Okamoto, Isomonodromic deformation and Paimleve equations, and the Garnier system, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect IA, Math. 33 (1986) 575-618.