数理解析研究所講究録
第 757 巻 1991 年 1-22

$\mathcal{D}$-Module Structures in Multi-Dimensional Nonlinear Integrable Systems

数理解析研究所　高崎金久 (TAKASAKI, Kanehisa)

1．序文

KP hierarchy と無限次元 Grassmann 多様体との対応関係を見るのにはいろいろなやり方があるが，ある種のD加群の構造に注目すると非常に見通しがよくなる．この場合に現れるのは1次元空間（直線）の上のD加群である．このことから，多次元空間上のD加群によって多次元の非線型積分可能系を扱えるだろうと考えるのは自然なことだ．実はそのような拡張は思ったほどストレートには出来ないのであるが，多次元の非線型積分可能系として既に知られている例（gauge 場や重力場に由来する）についてはそのようなD加群の構造を見いだすことが出来る．以上のことについては既に解説記事を書いているが（数理研プレプリント RIMS-601），以下では多次元の場合を中心にして改めて解説を試みる．

なお，gauge 場や重力場に関連する場合については最近大山陽介氏が興味ある研究をされている．また，多次元のD加群への拡張のもう一つの

重要な材料として代数多様体上の直線束のmoduli（つまりPicardまたはAlbanese多様体）があるが，それについては中屋敷厚氏がAbel多様体に関係する場合について詳細に研究している．関連する話題については１９８７年の数理研短期共同研究‘D加群と非線型可積分系’の講究録も参照されたい．１次元多次元を問わず非線型積分可能系をD加群の変形理論の視点から眺める，というプログラムはもともと佐藤幹夫先生が提唱されたものであり，これらの研究に先立って京大で行われた連続講義はこの方面の研究にとってまさにアイディアの宝庫といえる．以下に紹介することもこうした成果から多くの影響をうけており，特に基礎的な部分はこれらの方々との共同研究（１９８６－８７）に基づくものである．

２．１次元の場合

次のような微分作用素および擬微分作用素の環を用意する：

$$\mathcal{D} \overset{\text{def}}{=} \{P;\ \exists m,\ P=\sum_{n=0}^{m} p_n\partial^n,\ p_n\in\mathcal{A}\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{E} \overset{\text{def}}{=} \{P;\ \exists m,\ P=\sum_{n=-\infty}^{m} p_n\partial^n,\ p_n\in\mathcal{A}\}, \tag{2}$$

ここで$\mathcal{A}$は1個の微分∂をもつ微分環で，例えば形式的巾級数環$\mathbb{C}[[x]]$ $(\partial = d/dx)$を念頭におけば充分である．(この様な具体的な函数を考えるかわりに$\mathcal{A}$としてKP hierarchyの従属変数の生成する微分環を採ることも出来る；これはKP hierarchyを解のレベルで考えるか方程式のレベルで考え

るかの違いである.) 次の明らかな関係に注意する：

$$\mathcal{E} = \mathcal{D} \oplus \mathcal{E}^{(-1)} \quad (\mathcal{A}\text{加群としての直和}).\ \text{ここで} \tag{3}$$

$$\mathcal{E}^{(-1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{P;\ P = \sum_{n=-\infty}^{-1} p_n \partial^n,\ p_n \in \mathcal{A}\}$$

この関係式の右辺の $\mathcal{D}$ をもっと一般の左 $\mathcal{D}$ 加群 $\mathcal{M}$ に置き換えて

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{E}^{(-1)} \tag{4}$$

を考える. $\mathcal{E}$ のこのような左 $\mathcal{D}$ 部分加群は次のような簡単な構造をもつ：

命題. 1) 次のような $W_i\ (i \geq 0)$ がある.

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i \geq 0} \mathcal{A} W_i,$$

$$W_i = \partial^i - \sum_{j<0} w_{ij} \partial^j,\ w_{ij} \in \mathcal{A}. \tag{5}$$

2) W_i は次の関係式を満たす.

$$W_{i+1} = \partial \cdot W_i + w_{i,-1} W_0. \tag{6}$$

3) 従って左 $\mathcal{D}$ 加群として $\mathcal{M}$ は $W \stackrel{\mathrm{def}}{=} W_0$ によって生成される.

$$\mathcal{M} = \mathcal{D} W. \tag{7}$$

4) この W を使うと W_i は次のように書ける.

$$W_i = (\partial^i \cdot W^{-1})_+ W. \tag{8}$$

ここで$(\ldots)_+$は擬微分作用素から微分作用素の部分を切り出すこと（つまり(3)の右辺第一因子への射影）である．

5）逆に

$$W = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \partial^{-n},\ w_n \in \mathcal{A}, \tag{9}$$

という形の擬微分作用素で生成される左$\mathcal{D}$加群$\mathcal{D}W \subset \mathcal{E}$は以上のような構造をもつ．

$\mathcal{A} = \mathbb{C}[[x]]$のときにはこのような左$\mathcal{D}$加群（あるいは$W$）の全体は無限次元グラスマン多様体開部分集合（のアフィン空間と同型な）と１対１対応する．上の命題で現れた係数w_{ij}はそこでのアフィン座標系そのものである．(正確にはこれらはxの函数であるから，グラスマン多様体の中で１次元の軌道を描く.)

KP hierarchyは次の発展方程式系で定義され，このようなWに対する時間発展$W \mapsto W(t),\ t = (t_1, t_2, \ldots)$, を記述する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t)}{\partial t_n} &= B_n(t)W(t) - W(t)\partial^n \\ &= -\big(W(t) \cdot \partial^n \cdot W(t)^{-1}\big)_- \quad (n \geq 1) \end{aligned} \tag{10}$$

ここで

$$B_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \big(W(t) \cdot \partial^n W(t)^{-1}\big)_+. \tag{11}$$

また，$(\ldots)_-$は(3)の第２因子への射影を表す．この発展方程式系は前述のw_{ij}で書き換えることが出来る：

命題. 方程式系 (10) は次に同値である.

$$\frac{\partial w_{ij}}{\partial t_n} = w_{i+n,j} - w_{i,j-n} - \sum_{k=-n}^{-1} w_{ik}w_{k+n,j}. \tag{12}$$

このことを使うと実際にグラスマン多様体の言葉で解の表示を与えることが出来る.(このことについてはいろいろな機会に何度も説明したのでもう繰り返さない.)

グラスマン多様体は等質空間なので (無限次元の場合はその意味付けが問題になるが, ここでは追求しない) 群作用が W の言葉で書けるはずである. KP hierarchy はそのような群作用の引き起こす変換のうちで互いに可換なものを一組選んでその作用を無限小, つまり微分方程式の形で書き下したものに他ならない. 実は任意の擬微分作用素 $P \in \mathcal{E}$ がそのような (無限小) 変換を引き起こすことが判る. P が引き起こす W の無限小変換を $\delta_P W$ と書くことにすると, それは具体的に次で与えられる.

$$\delta_P W = -\left(W \cdot P \cdot W^{-1}\right)_-. \tag{13}$$

容易に判ることだが, この無限小変換は次の交換関係に従う.

$$[\delta_P,\ \delta_Q] = \delta_{[Q,\ P]} \quad (P, Q \in \mathcal{E}). \tag{14}$$

(ちなみにこれが KP hierarchy の従属変数 $W(t)$ に引き起こす無限小変換 $\delta_P W(t)$ は (13) で P を $P(t) \overset{\mathrm{def}}{=} \exp(\sum_{n=1}^{\infty} t_n \partial^n) \cdot P \cdot \exp(-\sum_{n=1}^{\infty} t_n \partial^n)$

で置き換えたものによって与えられる.) $\delta_P W$を w_{ij}を使って表現することもできる：

命題. (13) は次と同値である.

$$\delta_P w_{ij} = p_{ij} + \sum_{k\geq 0} p_{ik} w_{kj} - \sum_{\ell<0} w_{i\ell}\big(p_{\ell j} + \sum_{k\geq 0} p_{\ell k} w_{kj}\big), \tag{15}$$

ここで

$$p_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{res}_\partial\big(\partial^i \cdot P \cdot \partial^{-j-1}\big)\ (i,j \in \mathbb{Z}), \tag{16}$$

但し $\operatorname{res}_\partial$ は擬微分作用素の∂^{-1} の係数を表す.

δ_Pが生成する有限変換は雑にいえば左 $\mathcal{D}$加群 $\mathcal{D}W$に対して右から $\exp \epsilon P$のような1パラメータ群（正確には ϵ を形式的パラメータとする形式群）を

$$\mathcal{D}W \mapsto \mathcal{D}W \exp(-\epsilon P)$$

というように作用させることに他ならない. ただし $\mathcal{D}W \exp(-\epsilon)$ は$\mathcal{E}$の中にとどまらないので，このままでは意味をなさない. きちんと意味付けするにはいろいろな考え方があるが，一つのやり方は$\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$を一時的に$\exp(\epsilon P)$のような無限階の作用素を含むように拡大しておくことで，例えば素朴にやるには$\mathcal{E}[[\epsilon]]$の中で

$$\mathcal{D}[[\epsilon]]W_\epsilon = \mathcal{D}[[\epsilon]]W \exp(-\epsilon P) \tag{17}$$

という関係式によって変換 $W \mapsto W_\epsilon = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_{\epsilon,n}\partial^{-n}$ を定義する．これは次のように W_ϵ を決めることと同じである．

$$W \exp(-\epsilon P) = B_\epsilon W_\epsilon, \quad B_\epsilon \in \mathcal{D}[[\epsilon]]. \tag{18}$$

実際にそのような W_ϵ, B_ϵ の存在を示すことが出来る．

３．多次元化の一般的な形式

多次元の微分作用素の環は１次元と同様であるが，擬微分作用素の方は'超局所化'する余方向を一つ固定して（１次元の場合にはそれが一つしかなかったので気にしなくてよかった）その方向に定義されたものの全体を考える．これから考えるのは $s+1$ 個の変数 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_s)$ をもち，その０番目の変数の方向 dx_0 に超局所化することにあたる状況である．

このことを代数的に定式化するために $s+1$ 個の微分 $\partial = (\partial_0, \ldots, \partial_s)$ をもつ微分環 $\mathcal{A}$ から出発する．(具体的には $\mathcal{A} = \mathbb{C}[[x]]$, $\partial_0 = \partial/\partial x_0, \ldots, \partial_s = \partial/\partial x_s$ という場合を思い浮かべれば充分である．) このとき微分作用素および擬微分作用素の環を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = \{P;\ P = \sum_{\alpha \geq 0} p_\alpha \partial^\alpha,\ p_\alpha \in \mathcal{A}, \\ \exists m,\ p_\alpha = 0 \text{ for } \mid \alpha \mid > m\}, \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{P;\ P = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}, \alpha' \geq 0} p_\alpha \partial^\alpha,\ p_\alpha \in \mathcal{A}, \\ \exists m,\ p_\alpha = 0 \text{ for } \mid \alpha \mid > m\}. \end{aligned} \tag{20}$$

ただしαは多重添字$\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_s)$であり，$\alpha \geq 0$は$\alpha_0 \geq 0, \ldots, \alpha_s \geq 0$の意味，また$\alpha'$は$\alpha' = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$，それに対する$\alpha' \geq 0$も同様，さらに$\partial^\alpha$, $|\alpha|$はそれぞれ$\partial^\alpha = \partial_0{}^{\alpha_0} \ldots \partial_s{}^{\alpha_s}$, $|\alpha| = \alpha_0 + \ldots + \alpha_s$という意味である．

１次元の場合に基本的だったのは(3)という自然な分解の存在であった．それに対応するものは今の場合には手で入れてやらねばならない．これは$\mathcal{E}$に現れる∂の巾の全体（$I \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s$, $\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z};\ n \geq 0\}$, $\mathbb{N}^c = \{n \in \mathbb{Z};\ n < 0\}$）を２つの部分に分けるやり方

$$I = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^s = I_- \sqcup I_+ \tag{21}$$

を一つ指定する毎に

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(I_-) \oplus \mathcal{E}(I_+), \quad \text{但し}$$
$$\mathcal{E}_\pm = \{P;\ P = \sum p_\alpha \partial^\alpha,\ p_\alpha = 0 \quad (\alpha \in I_\mp)\}. \tag{22}$$

というように与えることが出来る．このような分解の仕方は１次元の場合よりもはるかに多様だから，素朴に考えれば多次元では１次元以上に多くの理論の可能性があるように見えるのだが（少なくとも１９８７年のある時期まではそのように思われていた），実際には何か必然性をもった(I_-, I_+)の組に対してのみまともな理論が存在し得るようである．実際，あとで示すgauge場と重力場に関連した例では$I_- = \mathbb{N}^c \times \mathbb{N}^s$, $I_+ = \mathbb{N}^{s+1}$という１次元の場合によく似たものを採る．一般にどういう分解の仕方を採れば良い理論が出来るのかまだよく判らない．

さて，考察の対象となるのは上の設定において

$$\mathcal{E} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{E}(I_-) \tag{23}$$

という条件を満たす左$\mathcal{D}$部分加群$\mathcal{M} \subset \mathcal{E}$である．このようなものについてもその構造を少なくとも形式的には前節で説明した１次元の場合にならって決めることが出来る．(少なくとも形式的には，と言ったのは実はここに後で述べるような問題点が潜んでいるからである.) 即ち：

1） $\mathcal{M}$は次のような形の$\mathcal{A}$上の生成系を持つ.

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{\alpha \in I_+} \mathcal{A} W_\alpha,$$
$$W_\alpha = \partial^\alpha - \sum_{\beta \in I_-} w_{\alpha\beta} \partial^\beta. \tag{24}$$

2）各W_αは次の関係式を満たす.

$$W_{\alpha+1_\sigma} - \partial_\sigma \cdot W_\alpha - \sum_{\beta \in I_+ \cap (I_- + 1_\sigma)} w_{\alpha\beta} W_\beta = 0 \quad (\sigma = 0, \ldots, s). \tag{25}$$

ここで$1_\sigma \stackrel{\mathrm{def}}{=} (0, \ldots, 0,;\ 1\ (\sigma$番目の成分$),\ 0, \ldots, 0)$，また$I_- + 1_\sigma$は$I_-$を$1_\sigma$方向に平行移動したもの（つまりヴェクトル和）である.（この関係式を展開すれば$w_{\alpha\beta}$についての一連の方程式系を得る.）

3）逆にこれらの関係式を満たす擬微分作用素系W_αの生成する$\mathcal{E}$の左$\mathcal{A}$部分加群は左$\mathcal{D}$加群になる.

4）$\mathcal{M}$は一般には$\mathcal{D}$上単項生成ではない.

‘問題点’というのは(25)を展開して得られる係数の間の関係式が無限和を含む（その意味で代数的でない）ということにある．これは基本的には(25)右辺の総和が無限集合にわたるものであることによる．従って考える微分方程式系を‘代数的微分方程式系’に限定する（これは極めて自然な要請だが）ならば，$W_{\alpha\beta}$の間に適当な関係式（代数的なものにせよ微分を含むものにせよ）を置いて(25)から生じる関係式が実質的に有限和しか含まないように調節してやる必要がある．しかも，(24)におけるW_αの定義式の右辺における総和も勝手ではいけない：W_αは有限階の擬微分作用素（つまり$|\beta|$に上限があるもの）でなければならない．添字集合I_-の採り方によってはこれも考慮に入れなければならない条件になる．

しかも，このあとこういう$\mathcal{D}$を‘動かす’（変形する）ことで発展方程式系を導くという議論が続くわけだが，そこでも同じような無限和の出現とその回避の問題が生じる．時間発展やもっと一般の変換を構成する方針は1次元と同様で，大雑把に言えば生成子となる擬微分作用素$P \in \mathcal{E}$を一つとって$\mathcal{M}(\epsilon) = \mathcal{M}\exp(-\epsilon P)$（これが文字どおりの意味では成り立たなくて少し修正しなければならないのは1次元の場合と同じ）というように有限変換を定義し，もっと正確なことはMの生成系W_αを使って無限小変換の形で考える．そのような考察からPが引き起こす無限小変換δ_Pは

$$\delta_P w_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sum_{\mu\in I_+} p_{\alpha\mu} w_{\mu\beta} - \sum_{\nu\in I_-} w_{\alpha\nu}\left(p_{\nu\beta} + \sum_{\mu\in I_+} p_{\nu\mu} w_{\mu\beta}\right) \tag{26}$$

というように$w_{\alpha\beta}$に作用することが判る．$p_{\alpha\beta}$はPから前と同様にして作

られる函数の組である．問題はこの式の右辺が一般に (25) と同様に無限和を含むことである．ここでも無限和を実質的に有限和にするようななんらかのメカニズムが必要になる．逆に言えば (26) の右辺が有限和になるようなもののみが無限小変換として許されることになる．

要するに，なんらかの付加条件を設定して $\mathcal{M}$ または W_α として現れるものを限定してやらないと意味のある理論が作れない．また，そのときにもあらゆる時間発展や変換が許されるわけではなくて，一般にはそのように限定された $\mathcal{M}$ の族にはそれに固有の限定された時間発展や無限小変換の群が決まっているらしいと言うことが想像される．

この様な事情は１次元のときには無かったことで，ここに多次元を扱う際の難しさがある．この様なプログラムが実際に遂行できる例としては冒頭に掲げたいくつかの場合しか今のところ知られていない．これらの例を眺めていると，うまく行く例はどれもそれ自身が（$\mathcal{D}$加群の論理とは別の所に）なんらかの意味で固有の幾何学的な背景を持っていることが判る．KP hierarchy の場合にはこういうものはむしろ特殊解（の族）として現れることに注意されたい．この枠を乗り越えて KP hierarchy それ自体のような普遍的な方程式系を見い出せれば面白いのだが，今の所決定的な手掛りが欠けている．そのような方向へ進むためにも，うまく行く例についてもっと学ぶべきであろう．

4．Gauge 場の積分可能系に現れる例

このタイプの典型例は4次元時空における自己双対方程式(Self-duality equations) である．この方程式はいろいろな意味で有名になっているが（例えば instanton 解を通じて代数幾何学と結び付く），積分可能系の立場からすれば4次元ということは重要ではなく，その本質はもっと一般的かつ抽象的な形で定式化できる．

鍵となるのは，殆どの‘ソリトン方程式’と同様，こういう gauge 場に対する積分可能系もある線型系の Frobenius の意味の積分可能条件として書けるということにある．ただ，少し構造が異っている．典型的なソリトン方程式（それらは KP hierarchy とかその多成分版からの特殊化として得られる）ではそういう線型系は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_i} - B_i(t,\lambda)\right)W(t,\lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots) \tag{27}$$

というような形をしている．ここで t_i は KP hierarchy と同様の時間変数であり，$B_i(t,\lambda)$ は有限サイズの行列で，各成分は λ というパラメータ（スペクトルパラメータと呼ばれる）のある決められた形の多項式である．その展開係数を未知函数として

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_i} - B_i(t,\lambda),\ \frac{\partial}{\partial t_j} - B_j(t,\lambda)\right] = 0 \tag{28}$$

という非線型方程式（これは上に述べた意味で (27) の積分可能条件になっている）を考えると，いろいろなソリトン方程式が出て来る．一方 gauge

場の場合には (27)，(28) の代わりに

$$(\frac{\partial}{\partial t_i} - a_i(\lambda, \frac{\partial}{\partial x'}) - B_i(t, x', \lambda))W(t, x, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{29}$$

$$[\frac{\partial}{\partial t_i} - a_i(\lambda, \frac{\partial}{\partial x'}) - B_i(t, x', \lambda),\ \frac{\partial}{\partial t_j} - a_j(\lambda, \frac{\partial}{\partial x'}) - B_j(t, x', \lambda)] = 0 \tag{30}$$

というものが現れる．ここで $x' = (x_1, \ldots, x_s)$ は新たに出て来る独立変数，$a_i(\lambda, \frac{\partial}{\partial x'})$ はλのある与えられた多項式を係数とする $\frac{\partial}{\partial x_\sigma}$ $(\sigma = 1, \ldots, s)$ の１次結合である．

実際にはKP hierarchyにおけるWの方程式に該当するものが (27), (29) である．(28), (30) はその意味では第一義的な対象ではない．(27), (29) は一見線型方程式に見えるが（B_iを既に与えられたものとみなせば確かにそうだし，それ故に通常は線型系と呼び慣わされているが），B_iとWは本来どちらも未知なのだから実は非線型方程式とみなすべきなのである．より正確にいえば，我々はWとして次の形のものを考える．

$$W(t, x', \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t, x')\lambda^{-n}. \tag{31}$$

この様な形にWを設定すると（但し$w_n(t, x')$は行列値函数），(27) や (29) をλで展開して得られる方程式を調べればすぐ判るように，B_iは（考えている方程式毎に形は違うが）w_nの微分多項式として一意的に決まる．従ってそれを改めて (27), (29) に代入すれば確かに非線型方程式系となる．KP hierarchyのB_nという部分も基本的には同じ論法で導き出されたものである．我々がgauge場から由来する非線型積分可能系と称して考察するのは，

もっぱらこの様にして得られる方程式系の方であり，交換子＝0という方程式はその影のようなものに過ぎない．

この様にしてgauge場もソリトン方程式やKP hierarchyと同じ様な形の定式化できる．この様な形に書き直して始めてKP hierarchyとの比較も出来る．そこでいよいよ前節のようなD加群の構造をここから引き出す問題に進む．

D加群はまず時間変数のないレベルで現れるべきだから，D加群に翻訳されるべきデータは$W(x',\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x')\lambda^{-n}$という形式的Laurent級数（係数は行列値）である．ここでx'が無ければ上で比較のために説明したソリトン方程式と同じになる．ところで，そのようなソリトン方程式をKP hierarchyの特殊化として導出するためには$\lambda\to\partial=\frac{\partial}{\partial x}$という置き換えをしてやれば良いことが判っている．gauge場の場合にはさらに$x'=(x_1,\dots,x_s)$という変数が加わるのだから，x_0という変数を用意して

$$x=(x_0,x_1,\dots,x_s),\quad \partial_x=(\frac{\partial}{\partial x_0},\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_s})$$

という状況を考える．そして$W(x',\lambda)$に対して

$$\hat{W}\stackrel{\mathrm{def}}{=}W(x',\frac{\partial}{\partial x_0})=1+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(x')(\frac{\partial}{\partial x_0})^{-n}\qquad(32)$$

という擬微分作用素とその生成するD加群$\mathcal{D}\hat{W}$をつくる．このD加群は

$$I_-=\mathbb{N}^c\times\mathbb{N}^s,\quad I_+=\mathbb{N}^s\qquad(33)$$

という添字集合の分割に対して前節の要請を満たしている．

勿論これだけではまだ適切な選択かどうかは判らないわけだが，gauge 場の方程式や変換群についていろいろ知られていることが逐一上のD加群の言葉に翻訳できること（その詳細は省くが）からそのことが確認できる．しかしこのことは，同時に，わざわざD加群を持ち出さなくても gauge 場は扱えるということでもある．（ある場合にはむしろD加群を使わない方がよい；たとえばプレプリント RIMS-637 で扱った問題については然り．）

この場合に固有の時間発展や変換（前節で説明した意味での）は二通りある．ひとつは

$$P = \sum_{n=-\infty}^{m} p_n(x')(\frac{\partial}{\partial x_0})^n$$
$$\text{（但し } p_n(x') \text{ は } w_n(x') \text{ と同様の行列値函数）} \tag{34}$$

という形の生成子を持つもので，これは以前から Riemann-Hilbert 変換と呼ばれていたものに対応する．もうひとつは

$$P = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{n=0}^{m} p_{n\sigma}(x')(\frac{\partial}{\partial x_0})^n \frac{\partial}{\partial x_\sigma}$$
$$\text{（但し } p_{n\sigma}(x') \text{ はスカラー値函数）} \tag{35}$$

という生成子の引き起こすもので，特に定数係数の場合には最初に説明したような意味での時間発展に対応する．ここで $\frac{\partial}{\partial x_0}$（つまりD加群以前の言葉で言えばλ）の負巾を許していないのは理由があってのことである．（詳しくは RIMS-637 を参照．）この二種類の生成子の集合は全体として Lie 代数

をなすので，これで一つの閉じた世界となる．RIMS-637ではそれぞれをRiemann-Hilbert型，座標変換型と呼んでいる．実際には(35)はさらに係数がx_0も含む場合に拡張できるのだが（これはλに対するreparametrization, つまり最近流行のVirasoro代数に似たものになる），ここではこれ以上議論しない．

gauge場から出て来るD加群は上で見てきたようにかなり特殊で簡単なものである．重力場から出て来るものはもう少し複雑な構造を持つ．しかしながら両者に共通して言えるのは，どちらにしてもD加群固有の論理に従ってこういうものを導出することはなかなか難しくて，またこういう風に作ったものが前節の諸々の要請を満たすことをチェックするのも本来の幾何学的背景にもどってなされているのが現状だと言うことである．その点では最近大山氏がD加群の方からこういうものを直接導き出すことを試みていることは注目に値する．

5．重力場の積分可能系に現れる例

重力場に関連するもの（ここでは有名な定常軸対称重力場の方程式あるいはErnst方程式とは別系統のものを考えている）は方程式の例があまりポピュラーでないこともあって，こういうものを積分可能系と呼ぶこと自体がまだあまり公認されていないようである．(少なくとも，学術誌に投稿してロクな返事が来たことがない．）しかしgauge場の場合と同様にここでも基本的にはtwistorの方法が開発されていて，それを利用すること

で４次元の自己双対計量や４ｎ次元の超ケーラー（hyper-Kähler) 計量などに対しては今までの積分可能系とかなり似た構造を持つことが判っている．(ちなみにtwistorの構造は積分可能とは言えない場合も存在する．但しこれは積分可能性の本質を方程式の'対称性'に求めたい筆者の視点から言って，の話だが．twistorと積分可能系は密接な関係を持つが，本来異質のものである.)

重力場に関連するこの様な例をこれまでに見てきた枠組で理解し直すには少し準備が必要なのだがそれは省いて（プレプリントRIMS-621,625などを参照されたい），ここではgauge場における $W(x',\lambda)$ にあたるものが重力場では何なのかということからいきなり話を始めることにする．gauge場では有限次元Lie群（実際には線型群）が基礎にあるが，それに対応するのは重力場では一般座標変換（つまりdiffeomorphism）の群あるいは擬群である．この対応関係は今の問題でも生きていて，線型群に値をとる函数 $W(x',\lambda)$ の代わりに登場するのは $\varphi(x',\lambda)=(\varphi_1(x',\lambda),\ldots,\varphi_s(x',\lambda))$ という函数の組で，$x'\mapsto\varphi(x',\lambda)$ が λ をパラメータとする座標変換となるものである．ここではこれがさらに

$$\varphi_\sigma(x',\lambda)=x_\sigma+\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{\sigma n}(x')\lambda^{-n}\quad(\sigma=1,\ldots,s)\tag{36}$$

という形のLaurent展開（形式的なものとしてもよい）を持つとする．これは(31)に相当する設定である．自己双対計量とか超ケーラー計量とかに関連してこういうものの発展方程式が現れる．(こういう視点は全く新し

いもので，いままで積分可能系を研究してきた人達—多分頭が旧いのだろう—にはまだ受け入れて貰えていない.)

これをD加群の言葉に翻訳するために次のような奇妙なことを考える．まず

$$W_\varphi(x', \lambda, \frac{\partial}{\partial x'}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\geq 0} \frac{1}{\alpha!}(\varphi(x',\lambda) - x')^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^\alpha \tag{37}$$

を導入する．ここで多重添字に関する通例の記号法$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_s!$, $x'^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_s}^{\alpha_s}$, *etc.* を用いている．Taylor の公式によりこの無限階微分作用素は(x', λ)の任意函数$f(x', \lambda)$に対して

$$W_\varphi f(x', \lambda, \frac{\partial}{\partial x'}) = f(\varphi(x', \lambda), \lambda) \tag{38}$$

と作用することが判る．要するにこれは$\varphi(x', \lambda)$の表す座標変換を微分作用素の言葉で書き直したものであり（当然局所性を持たない），明らかに

$$W_\varphi W_\psi = W_{\psi\circ\varphi} \tag{39}$$

と言う合成規則に従う.(従って擬群の代数的構造をこの微分作用素の間の演算に翻訳することが出来る．これにより RIMS-621, 625 の結果を微分作用素の言葉で書き換えることが出来る．これが鍵である.) 次に gauge 場の場合と同様に$\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial x_0}$という置き換えを行う．

$$\hat{W}_\varphi \stackrel{\text{def}}{=} W_\varphi(x', \frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x'}). \tag{40}$$

(36) の仮定により，これは有限階（正確には0階）の擬微分作用素になる．その生成するD加群 $\mathcal{D}\hat{W}_{\varphi}$ が我々の求めるものである．

このD加群はgauge場の場合と同じ添字集合の分割に対して第３節の要請を満たす．さらにそこで述べた意味での変換群の生成系としては

$$P = \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{n=-\infty}^{m} p_{\sigma n}(x') \left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^n \left(\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\right) \tag{41}$$

というもの（つまり $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial x_0}$ という置き換えをする前の言葉で言えば，λ をLaurent級数の形でパラメータに含む無限小座標変換に他ならない）がとれる．こういうことは，しかし，すべて φ のレベルでの結果（RIMS-621, 625) を逐一焼き直しているだけである．

ちなみにここでも λ のreparametrizationまで取り込むことが出来る．つまり，出発点としてとった $x' \mapsto \varphi(x',\lambda)$ の代りに λ まで込めた座標変換 (ψ,φ) : $\lambda \mapsto \psi(x',\lambda)$, $x' \mapsto \varphi(x',\lambda)$ を考えることが出来る．この様な例は共形的自己双対計量というものに関連して実際に問題になる（数理研講究録５９２‘超函数と微分方程式’所収の論文参照）．この場合にもやはり上のような議論が出来るが $\frac{\partial}{\partial \lambda}$ が W_{φ} の対応物に現れるため，最後の段階で擬微分作用素を作るときに $\lambda \mapsto \frac{\partial}{\partial x_0}$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} \mapsto -x_0$ という置き換えが必要で，結果として x_0 を係数に含むものが得られる．

６．結び

少なくともgeuge場と重力場については今のところD加群が積極的

な役割を演じる場面は少ない．本来の変数に基づいて議論する方がすっきりしている．この様な方向でD加群の方法が本当に新しい積分可能系の発見へと導くのかどうかは例えば大山氏の研究の今後の進展に待たねばならない．

筆者としてはむしろここで紹介したようなD加群の方法をもっと別の方向に応用してみたいと思っている．例えば１次元的な場合さえもまだまだやるべきことが多いような気がしている．super KP hierarchy についての最近の論文，RIMS-421, はそのほんの一例である．実のところ何故D加群がこの様な形で積分可能系の理論に現れるのかということが筆者にはまだよく判らない．

一方重力場型の問題については，確かにD加群の構造は引き出せたけれど，筆者にはそれが自然な取り扱い方だとはどうしても思えない．重力場型に関してはその本来の幾何学的な枠組でもっと面白いことが今後やれそうな気がする．例えば S.G. Gindikin が Functional Analysis and Its Applications **18**(4) に書いた論文は古典的な求積論（特性系の理論）の知識を縦横に駆使していてすこぶる難解だが，６０年代から７０年代にかけて Spencer や Goldschmidt 達が追及していたような問題（G構造，擬群構造，等）とも絡めて読み直してみると何か新しい側面が見えてくるのではないかと思われる．

中屋敷氏が研究しているような場合についてはむしろD加群の視点から眺めることが本質的な意味を持っている．この場合にはD加群の構造が

これまでの代数幾何学的方法には無い新しい視座を提供し得る可能性を秘めているのでは無いか？但し，Kolchinとその後継者（例えばBuium）の仕事が既に相当の部分をカバーしているようである．

参考文献

1. 佐藤幹夫，京都大学での連続講義 1984-86（梅田享　筆記）
2. 短期共同研究‘D加群と非線型積分可能系’　数理解析研究所講究録 640.
3. K. Takasaki, *Integrable Systems as Deformations of D-Modules*, RIMS-601, Kyoto University, Dec. 1987, to appear in *Prospect of Algebraic Analysis*, M. Kashiwara and T. Kawai eds.
4. K. Takasaki, *Hierarchy Structure in Integrable Systems of Gauge Fields and Underlying Lie Algebras*, RIMS-637, Kyoto University, Nov. 1988.
5. K. Takasaki, *An Infinite Number of Hidden Variables in Hyper-Kähler Metrics*, RIMS-621, Kyoto University, May 1988.
6. K. Takasaki, *Hidden Symmetries of Hyper-Kähler Metrics*, RIMS-625, Kyoto University, May 1988.
7. K. Takasaki, *Symmetries of the Super KP Hierarchy*, RIMS-641, Kyoto University, Nov. 1988.
8. K. Takasaki, *Conformally Self-Dual Metrics and Integrability*, 数理

解析研究所講究録 592, pp. 30-57.

9. S.G. Gindikin, *REduction of Manifolds of Rational Curves and Related Problems of the Theory of Differential Equations*, Funct. Anal. Appl. **18**, 278-298 (1984).