数理解析研究所講究録
第 757 巻 1991 年 93-110

Levi problem for local cohomology classes and Bochner-Martinelli form associated to a supporting subvariety.

新潟大・教養 田島慎一
(Shinichi TAJIMA)

1966年の論文[3]において Andreotti-Norguet は古典的な Levi 問題を一般化し(local) cohomology classes に対して Levi 問題を定式化した。彼らはこの論文に於て Levi form が非退化となる実超曲面を境界として持つような領域を扱い、この問題を肯定的に解いている。解析接続の高次の obstructions の存在を意味する彼らの結果は、1972年の Andreotti-Hill の論文[2]において利用され、同じく Levi form が非退化な実超曲面上に induce される接 Cauchy-Riemann 方程式系の解の構造の研究に応用された。

さて、Microlocal Analysis の立場では、Levi form が非退化なる場合の接 Cauchy-Riemann 方程式系は microlocal に Lewy-Mizohata 方程式系となる。この場合の microfunction 解の構造は 佐藤-河合-柏原 [5] によって既に解明

されている。更に佐藤-河合-柏原は一般化されたLevi formの概念を導入し，その正及び負の固有値の個数と偏微分方程式系の高次のmicrofunctions解の消滅との関係を得ている。

しかしながら，古典的なLevi formに話を限っても，Levi formが退化する場合は，一般にはその退化の仕方は千差万別であり，正及び負の固有値の個数だけでは退化の仕方を捉えることは出来ない。そして対応する接Cauchy-Riemann方程式系の標準形を求めることは非常に困難である。

我々はLevi formが退化する場合も込めた解析を目標としているが，その目的の為にはLevi formの概念を使わないで，もっと直接的に領域の境界の複素幾何的な性質を捉えることが必要になると考えた。そこで我々は領域に対するlocal holomorphic supporting variety（の次元）を使って境界面の曲がり具合を図ることにする。

以下において，我々は，領域の境界として

1° 実超曲面である必要はない（次元は低くてもよい）。

2° smoothである必要もない。

という極めて一般的な条件の下で、local cohomology classes に対するLevi問題を考え、Andreotti-Norguet の結果を一般化する。 次にこうして得られた結果を実超曲面上に induce される接Cauchy-Riemann系の microfunctions 解の構造の研究に応用する。自明でない（高次の）microfunction 解の存在を示す。

これらの結果は87年の8月に得たものであり、数理解析研究所講究録639にも結果自体は報告させて頂いたが、その証明法については詳しく述べなかった。ここでは、主定理の証明に必要な Bochner-Martinelli 核の諸性質並びに証明の方法に重点をおいて述べさせて頂くことにする。

§1. local cohomology と supporting subvariety

この節では local cohomology のなす層の概念を使ってのLevi問題の定式化を復習する。次に supporting subvariety の存在が解析接続の高次の obstructions を与える（trancated derived category で）という主結果を述べる。

Dを複素多様体 X の領域とし $j : D \hookrightarrow X$ をその自然な open inclusion map とする。閉集合 F を $F = X - D$ で決める。X 上の正則函数の芽のなす層を $\mathcal{O}_X$ とおき、$\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O}_X)$ により F に台を持つ k 次の local cohomology groups のなす層を表わすことにする。

層に対する Mayer-Vietoris exact sequence

$$
\begin{aligned}
0 \longrightarrow \mathcal{H}^0_F(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X) \\
\longrightarrow 0 \longrightarrow R^1 j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X) \\
\longrightarrow 0 \longrightarrow R^2 j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathcal{H}^3_F(\mathcal{O}_X) \\
\longrightarrow \qquad\qquad \text{on } \partial D = \overline{D} - D
\end{aligned}
$$

において（解析接続の一意性より）$\mathcal{H}^0_F(\mathcal{O}_X)|_{\partial D} = 0$ が成り立つことから次の結果を得る。

$$
\begin{cases}
j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_X \cong \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X) \\
R^k j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X) \cong \mathcal{H}^{k+1}_F(\mathcal{O}_X) \qquad \text{on } \partial D
\end{cases}
$$

このことから層 $\mathcal{H}^k_F(\mathcal{O}_X)|_{\partial D}$ （$k = 1, 2, \cdots, \dim X$）は

解析接続の obstructions のなす層と見做すことが出来る。そこで「与えられた点 $P \in \partial D$ において如何なる幾何的条件の下で $\mathcal{H}^{k}_{F}(\mathcal{O}_X)_P \neq 0$ となるか？」という問題を local cohomology classes に対する Levi 問題と呼ぶことにする。

<u>定義1</u>　領域 D が点 $P \in \partial D$ において complex codimension n の local supporting subvariety を許すとは

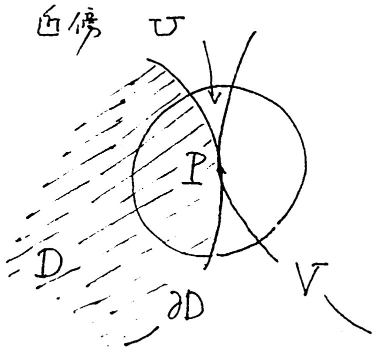
$\Longleftrightarrow$

点 P の近傍 U $(\subset X)$ 及び U 上定義される complex codimension n の complex subvariety V であって

i) $P \in V$

ii) $(V \cap U) \cap D = \phi$

をみたすものが存在することとする。



<u>例2</u>　V を X の complex subvariety とする。$D = X - V$ とおく。領域 D は V を supporting subvariety として持つ。

<u>例3</u>　$X = \mathbb{C}^3$, $D = \{ z \in \mathbb{C}^3 \mid \rho = x_1 + |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_3|^2 > 0 \}$ とおく。領域 $\rho < 0$ は擬凸領域になることに注意

しよう。今 $V=\{z \mid z_1=z_2=0\}$ とおけば、V は原点 $P=(0,0,0)$ における領域 D に対する supporting subvariety となる。実際、complex line V に境界面 ∂D に含まれている。

先ず、余次元 $n=1$ のときを考えてみる。すなわち、領域 D が点 $P\in\partial D$ において local supporting hypersurface V を持つとする。Vの局所定義函数 f で正則なものを取れば $\frac{1}{f} \bmod \mathcal{O}_{X,P}$ は明らかに解析接続の obstruction を与える。

次に領域 D が点 $P\in\partial D$ において complete intersection となる余次元 n の local supporting subvariety V を持つときを考えてみよう。今 V に台を持つ delta 函数を $\delta(V)$ で表わすことにすれば $\delta(V)$ は $\mathcal{H}_V^n(\mathcal{O}_X)_P$ の元を定める。更に自然な写像

$$\mathcal{H}_V^n(\mathcal{O}_X)_P \longrightarrow \mathcal{H}_F^n(\mathcal{O}_X)_P$$

によって $\delta(V)$ を $\mathcal{H}_F^n(\mathcal{O}_X)_P$ の元と見做したとき、零でないことがいえれば、もちろん $\mathcal{H}_F^n(\mathcal{O}_X)_P\neq 0$ が示せる。だが このこと自体は正しくないことがすぐに分かる。

実際、Dを強擬凸領域とし$P\in\partial D$がsmoothな境界点とすれば$\mathcal{H}^{k}_{F}(\mathcal{O}_X)_P=0$　$(k\geqq 2)$　となることはよく知られている。（注．この場合．何故高次のlocal cohomology groupsが消滅するのかという問いに対する幾何的説明は［8］に述べてある）

それにもかかわらず，local cohomologyのなす層の作る複体にtrancationも込めて，すなわち

$$(\tau_{\leqq n}\,\mathbb{R}\Gamma_{F}(\mathcal{O}_X))_P$$

において考えると次のことが成立する。

<u>定理4</u>　Dをm次元複素多様体Xの領域とする。Dは点$P\in\partial D$において複素余次元nのlocal supporting variety Vでcomplete intersectionなものを持つとする。

$\Longrightarrow$

このとき　$\mathcal{H}^{1}_{F}(\mathcal{O}_X)_P,\ \mathcal{H}^{2}_{F}(\mathcal{O}_X)_P,\ \cdots,\ \mathcal{H}^{n}_{F}(\mathcal{O}_X)_P$

の何れか少くとも一つは消滅しない。

この定理の証明については第3節において説明される。

点 P 自身は余次元 $m=\dim X$ の complex submanifold と見做せるから次の系が成立する。

系5　点 $P\in\partial D$ において $\mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P=\mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_P=$
$=\cdots=\mathcal{H}^m_F(\mathcal{O}_X)_P=0$ となることはありえない。

§2. Bochner-Martinelli 微分型式

この節では Bochner-Martinelli 核の基本的性質について述べる。これらは積分核に関する Sommer の古典的論文 [6] あるいは Grothendieck residue symbol と積分核に関する Tong の論文 [9] に述べられている内容を，我々の目的の為に使いやすい形にまとめ直したものである。

一般に n 個の関数を成分とする k 個の列ベクトル

$$c_i=\begin{pmatrix} c_{i1}\\ c_{i2}\\ \vdots\\ c_{in}\end{pmatrix}\qquad i=1,2,\cdots,k$$

及び n 個の 1-Form を成分とする $n-k$ 個の列ベクトル

$$\tau_j = \begin{pmatrix} \tau_{j1} \\ \tau_{j2} \\ \vdots \\ \tau_{jn} \end{pmatrix} \qquad j = k+1, k+2, \cdots, n$$

に対しそれらの行列式 D を次できめる。

$$D(c_1, c_2, \cdots, c_k, \tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \cdots, \tau_n)$$

$$= \sum_\sigma \operatorname{sgn}\sigma \cdot c_{1\sigma(1)} c_{2\sigma(2)} \cdots c_{k\sigma(k)} \tau_{k+1\,\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge \tau_{n\sigma(n)}$$

ここで σ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ の全ての置換を動くとする。

さて複素多様体 X の開集合 U において正則な n 個の函数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ によって complex subvariety V が次のように定義されるものとする。

$$V = \{ z \in U \mid t_1(z) = t_2(z) = \cdots = t_n(z) = 0 \}$$

これに対し

$$\bar{t} = \begin{pmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \vdots \\ \bar{t}_n \end{pmatrix}, \quad d\bar{t} = \begin{pmatrix} d\bar{t}_1 \\ d\bar{t}_2 \\ \vdots \\ d\bar{t}_n \end{pmatrix}, \quad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i \text{番目}$$

更に

$N = |t_1|^2 + |t_2|^2 + \cdots + |t_n|^2$ とおくと次がなりたつ。

補題 6　$0 \leq k \leq n-1$,　$1 \leq i_0, i_1, \cdots, i_k \leq n$ に対し

$$D(\overbrace{e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}}^{k+1\text{個}}, \bar{\partial}\left(\frac{\bar{t}}{N^{n-k-1}}\right), \overbrace{d\bar{t}, d\bar{t}, \cdots, d\bar{t}}^{n-k-2\text{個}})$$

$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k+j} t_{i_j} D(e_{i_0}, \cdots, \overset{\text{deletion}}{\widehat{e_{i_j}}}, \cdots e_{i_k}, \frac{\bar{t}}{N^{n-k}}, d\bar{t}, \cdots, d\bar{t})$$

on $U - U \cap V$

そこで

$$\begin{cases} B = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D\left(\frac{\bar{t}}{N^n}, d\bar{t}, d\bar{t}, \cdots, d\bar{t}\right) \\ \\ b(i_0, \cdots, i_k) = (-1)^{n(n-1)/2 + k(k+1)/2} D(e_{i_0}, \cdots, e_{i_k}, \frac{\bar{t}}{N^{n-k-1}}, \\ \qquad , d\bar{t}, \cdots, d\bar{t}) \end{cases}$$

と定める。$(0, n-1)$ 微分型式 B は（定数倍を除いて）Bochner-Martinelli form と一致する。

Bochner-Martinelli form は次の Bockstein coboundary map　$\delta: H^{n-1}(U - U \cap V, \mathcal{O}_U) \xrightarrow{\sim} H^n_{U \cap V}(\mathcal{O}_U)$

によって V に台を持つ delta 関数 $\delta(V)$ に移ることに注意しておく。

補題6 より直ちに次の性質が確かめられる。

補題7

(i) $$\sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} t_j \, b(1, 2, \cdots, \hat{j}, \cdots, m) = 1$$

(ii) $$\sum_{j=0}^{k} (-1)^{j} t_{i_j} \, b(i_0, \cdots, \hat{i_j}, \cdots, i_k) = \bar{\partial} b(i_0, \cdots, i_k)$$

for $1 \leq k \leq m-2$.

(iii) $\bar{\partial} b(i) = t_i B$, $\bar{\partial} B = 0$ on $U - U \cap V$

例えば，余次元 $m=3$ の場合に B, b達を計算してみると

$$B = - \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{t}_1}{N^3} & d\bar{t}_1 & d\bar{t}_1 \\ \dfrac{\bar{t}_2}{N^3} & d\bar{t}_2 & d\bar{t}_2 \\ \dfrac{\bar{t}_3}{N^3} & d\bar{t}_3 & d\bar{t}_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{-2}{(|t_1|^2 + |t_2|^2 + |t_3|^2)^3} \cdot (\bar{t}_1 d\bar{t}_2 \wedge d\bar{t}_3 - \bar{t}_2 d\bar{t}_3 \wedge d\bar{t}_1 + \cdots \quad)$$

$$b(1) = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{\bar{t}_1}{N^2} & d\bar{t}_1 \\ 0 & \frac{\bar{t}_2}{N^2} & d\bar{t}_2 \\ 0 & \frac{\bar{t}_3}{N^2} & d\bar{t}_3 \end{vmatrix} = \frac{-1}{N^2}\left(\bar{t}_2\, d\bar{t}_3 - \bar{t}_3\, d\bar{t}_2\right)$$

$$b(2,3) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\bar{t}_1}{N} \\ 1 & 0 & \frac{\bar{t}_2}{N} \\ 0 & 1 & \frac{\bar{t}_3}{N} \end{vmatrix} = \frac{\bar{t}_1}{(|t_1|^2 + |t_2|^2 + |t_3|^2)}$$

等となり　これらは

$$\begin{cases} t_1 b(2,3) - t_2 b(1,3) + t_3 b(1,2) = 1 \\ \bar{\partial} b(2,3) = -t_2 b(3) + t_3 b(2) \\ \bar{\partial} b(1) = t_1 B \qquad \text{etc} \end{cases}$$

を満たすことが確かめられる。

§3　主定理の証明の方針

この節では定理4の証明を与える。記号が煩雑になるのをさける為に余次元 n が 3 の場合の証明をする。

領域 D は点 $P \in \partial D$ において complete intersection となる余次元 3 の local supporting subvariety V を許すとする。正則函数 t_1, t_2, t_3 により

$$V = \{ z \in U \mid t_1(z) = t_2(z) = t_3(z) = 0 \}$$

と表わされるとしてよい。$F = X - D$ とおく。

我々は

$$(A) \qquad \mathcal{H}^1_F(\mathcal{O}_X)_P = \mathcal{H}^2_F(\mathcal{O}_X)_P = \mathcal{H}^3_F(\mathcal{O}_X)_P = 0$$

を仮定すると点 P において $0 = 1$ が導びかれることを示すことによって定理の証明をする。

先ず $(0, 2)$ $\overbrace{\text{微分型式}}^{\text{closed}}$ $B = -D(\frac{\bar{t}}{N^3}, d\bar{t}, d\bar{t})$ を $D \cap U$ 上考えると、これは $R^2 j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X)_P$ の元を定める。序に述べた同型と仮定 (A) により

$$B \in R^2 j_*(j^{-1}\mathcal{O}_X)_P \cong \mathcal{H}^3_F(\mathcal{O}_X)_P = 0$$

となる。従って必要ならば点 P の近傍 U を小さく取り直すことにより（それも U で表わすことにする），$D \cap U$ で定義される hyperfunction 係数の $(0, 1)$ 型

微分型式 β で

$$\bar{\partial}\beta = B \qquad \text{on} \quad D \cap U$$

を満たすものが存在する。さて

$$\bar{\partial}(b(1) - t_1\beta) = t_1 B - t_1 B = 0$$

より $b(1) - t_1\beta$ は $D \cap U$ 上 $\bar{\partial}$ closed な微分型式であることが分かる。同様に

$$\bar{\partial}(b(2) - t_2\beta) = t_2 B - t_2 B = 0$$

$$\bar{\partial}(b(3) - t_3\beta) = t_3 B - t_3 B = 0$$

も成りたつ。再び仮定 (A) を使えば 点 P の近傍 U を必要に応じて小さく取り直すことにより

$$\bar{\partial}\beta(1) = b(1) - t_1\beta$$

$$\bar{\partial}\beta(2) = b(2) - t_2\beta$$

$$\bar{\partial}\beta(3) = b(3) - t_3\beta \qquad D \cap U$$

とみたす $\beta(1), \beta(2), \beta(3)$ が存在する。ここで

$$\bar{\partial}\{b(i,j) - (t_i\beta(j) - t_j\beta(i))\}$$

$$= t_i b(j) - t_j b(i) - t_i(b(j) - t_j\beta) - t_j(b(i) - t_i\beta))$$

$$= 0$$

に注目する． $\mathcal{U}\cap D$ 上で

$$h(1) = b(2,3) - (t_2\beta(3) - t_3\beta(2))$$
$$h(2) = b(1,3) - (t_1\beta(3) - t_3\beta(1))$$
$$h(3) = b(1,2) - (t_1\beta(2) - t_2\beta(1))$$

とおけば これらはいずれも $D\cap \mathcal{U}$ において正則である。従って仮定(A)を再びここで使えば 函数 $h(1)$, $h(2)$, $h(3)$ は点 P の近傍で正則となる。ところが

$$t_1 h(1) - t_2 h(2) + t_3 h(3)$$
$$= t_1 b(2,3) - t_2 b(1,3) + t_3 b(1,2) = 1$$

が成りたつから．点 P において $0=1$ が成立することになり矛盾する。従って

$$\mathcal{H}^1_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X)_P,\ \mathcal{H}^2_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X)_P,\ \mathcal{H}^3_{\mathcal{F}}(\mathcal{O}_X)_P$$

のいずれか少なくとも一つは零にならない。

一般の余次元の場合も全く同様に証明することが出来る。

§4　接 Cauchy - Riemann 系への応用

Local cohomology に関する定理4の応用について簡単に述べる。

D は複素多様体 X の領域で その境界 ∂D は実余次元1の実解析的多様体から成るとする。この節では ∂D を N で表わすことにする。N を複素化して得られる複素多様体を Y で表わす。

Spherical conormal bundle $S^*_N Y$ 上に定義される microfunctions のなす層を $\mathcal{C}_N$ で表わす．更に擬微分作用素のなす環の作る層を $\mathcal{E}_Y$ で表わす． N 上に induce される接 Cauchy - Riemann 方程式系を $\mathcal{E}_Y$ - Module と見做したものを $\mathfrak{M}_b$ で表わす。

$\mathfrak{M}_b$ の実の characteristic variety は適当な同一視により spherical conormal bundle $S^*_N X = N_+ \sqcup N_-$ と同一視できる。ここに $N_\pm$ は境界面 N の（領域 D からみて）単位外法線ベクトル及び単位内法線ベクトル全体の成す集合である。

点 $p \in N$ における単位外法線ベクトルを p_+ で表わすことにする。

定理8　Dはn次元複素多様体 X の領域とする。Dの境界 N は X の実解析的な実超曲面であるとする。更に D は点 $P \in N$ において複素余次元 n の local supporting variety で complete intersection なものを許すとする。

$\Longrightarrow$

このとき $\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P+}$, $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P+}$, ……, $\mathcal{E}xt^{n-1}_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{J}_b, C_N)_{P+}$ の少くとも一つは消滅しない。

定理8に相当する結果を genericな（余次元が高い場合の）Cauchy-Riemann 多様体上に induce された接 Cauchy-Riemann 方程式系に対して考えることはまだ試みていない。

以上

References

[1] Andreotti, A., Fredricks, G. and Nacinovich, M. : On the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 8, 365 - 404 (1981)

[2] Andreotti, A. and Hill, C. D. : E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem, I and II. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 26, 325 - 363 and 747 - 806 (1972)

[3] Andreotti, A. and Norguet, F. : Problème de Levi et convexité holomorphe pour les classes de cohomologie. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa 20, 197 - 241 (1966)

[4] Nacinovich, M. : On strict Levi q-convexity and q-concavity on domains with piecewise smooth boundaries. Math. Ann. 281, 459 - 482 (1988)

[5] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M. : Microfunctions and pseudo-differential equations. Springer Lecture Notes in Math., 287, 265 - 529 (1973)

[6] Sommer, F. Über die Integralformeln in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen. Math. Ann. 125, 172 - 182 (1952)

[7] Tajima, S. : Local cohomology and the absence of Poincaré lemma in tangential Cauchy-Riemann complexes. Proc. Japan Acad. 64, 71 - 73 (1988)

[8] ———— : Bochner-Martinelli form associated to a supporting analytic subvariety and tangential Cauchy-Riemann complex with coefficients in microfunctions. preprint

[9] Tong, Y. L. L. : Integral representation formulae and Grothendieck residue symbol. Amer. J. Math. 95, 904 - 917 (1973)

[10] Trépreau, J. M. : Sur le prolongement holomorphe des fonctions C-R définies sur une hypersurface réelle de classe C^2 dans C^n. Invent. math. 83, 583 - 592 (1986)