数理解析研究所講究録
第 757 巻 1991 年 133-164

A remark on analytic hypoellipticity for operators with symplectic characteristics

T. Sakurai (Saitama Univ.)
桜井 力 (埼玉大・理)

It is well known (Grusin [2]) that the operator

$$P(\lambda) = \sum_{j=1}^{N-1} (D_j^2 + x_j^2 D_N^2) - \lambda D_N \qquad (D_j = -i\partial_{x_j})$$

is analytic hypoelliptic at $(0, dx_N)$ if and only if

(*) $\qquad \lambda \notin \{2j+N-1;\ j=0,1,2,\cdots\} = \mathrm{spec}(-\Delta' + |x'|^2).$

Under a suitable subellipticity condition, similar to above, analytic hypoellipticity has been proved in a satisfactorily generalized form for operators with symplectic characteristics. (see e.g. Metivier [6], Ōkaji [7].)

However, in respect to necessity of (*), Stein [8] showed that $P(N-1) + d$ $(d \neq 0)$ is also analytic hypoelliptic. This result has been generalized by Grigis-Rothschild [1] to operators of the form:

$$P = \sum_{|\alpha+\beta| \le m} C_{\alpha\beta}(D_y) t^\alpha D_t^\beta, \qquad (t,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n,\ C_{\alpha\beta} \in S^{\mu+(|\alpha|-|\beta|)/2},$$

with $\mathrm{Char}(P) = \{t=\tau=0\}$ and not being subelliptic at $(0, \mathring{\eta} dy)$. More precisely, they proved that

$$\exists\, H : (\mathcal{C}_y')^{k_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{t,y}'$$

with $WF_A'(H)$ inducing the isomorphism: $\dot{T}^*(\mathbb{R}^n_y) \longrightarrow \mathrm{Char}(A) \subset \dot{T}^*(\mathbb{R}^{d+n}_{t,y})$,

$$\exists\, M = M(D_y) \sim \sum_{j=0}^{\infty} |D|^{-j/2} M_j\left(\frac{D}{|D|}\right) : (\mathcal{C}_y')^{k_1} \longrightarrow (\mathcal{C}_y')^{k_2},$$

where $\begin{matrix} k_1 \\ (k_2) \end{matrix} = \dim \left(\begin{matrix}\mathrm{Ker} \\ (\mathrm{Coker}\end{matrix} \left(\sum_{|\alpha+\beta|\le m} \sigma_0(C_{\alpha\beta})(\mathring{\eta}) t^{\alpha} D_t^{\beta} \right) \cap \mathcal{S}_t \right)$ such that

$$Pu \in \mathcal{A}(0,\mathring{\eta}dy) \Longrightarrow u - HH^{*}u \in \mathcal{A}(0,\mathring{\eta}dy),\ MH^{*}u \in \mathcal{A}_y(0,\mathring{\eta}dy).$$

In this note we shall extend their results to the case when $C_{\alpha\beta}$ depends on y. Moreover, we can get a more explicite formula for M_j's.

In application, we can show the following:

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{N-1} (D_j^2 + x_j^2 D_N^2) - (N-1)D_N + \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{N-1} c_{ij} x_i x_j D_N, & \mathrm{tr}(c_{ij}) \ne 0 \\ \sum_{j=1}^{N-1} c_j D_j \ \text{ or } \ \sum_{j=1}^{N-1} c_j x_j D_N, & \sum c_j^2 \ne 0 \end{cases}$$

is analytic hypoelliptic.

$$(2) \qquad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + [ct^2 D_{y_2} \text{ or } c\,]$$

is not analytic hypoelliptic. Moreover, it is Gevrey^s hypoelliptic for $s \ge 2$ if $c \in \mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{R}^-}$ but not so for $c \in \overline{\mathbb{R}^-}$.

$$(3) \qquad D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + \tfrac{1}{2} y_1^2 D_{y_2} - c$$

is analytic hypoelliptic at 0 if $c \notin \{j+\frac{1}{2};\, j=0,1,2,\cdots\}$.

§ 1. 準備

Notation

M; $\mathbb{R}^m$ の開集合, $\pi: T^*(M) \to M$; 余接束と標準射影.

$\dot{T}^*(M) = T^*(M) - M$, $x^* = (x, \xi)$; point in $\dot{T}^*(M)$.

$WF_A(u)$ (resp. $WF(u)$); $u \in \mathcal{D}'(M)$ の analytic (resp. C^∞) wave front set ($\subset \dot{T}^*(M)$)

$\mathcal{A}_{M, x^*} = \{u \in \mathcal{D}'(M);\ x^* \notin WF_A(u)\}$

$\mathcal{C}^f_M$; presheaf of micro-distribution on $\dot{T}^*(M)$:

$$\mathcal{C}^f_M(\omega) = \mathcal{D}'(M) / \{u \in \mathcal{D}'(M);\ WF_A(u) \cap \omega = \phi\} \quad \left(\omega \underset{\text{open}}{\subset} \dot{T}^*(M)\right)$$

$\mathcal{C}^f_{M, x^*} = \varinjlim_{\omega \ni x^*} \mathcal{C}^f_M(\omega) = \mathcal{D}'(M)/\mathcal{A}_{M, x^*}$; germ of micro-distribution.

($\mathcal{D}'$ が soft sheaf なることより $\mathcal{C}^f_{M, x^*} \simeq \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^m, x^*}$)

$\mathcal{L}(A, B)$; A から B への連続線型作用素の空間.

1.1. $M \subset \mathbb{R}^m$, $N \subset \mathbb{R}^n$ を2つの開集合とする. Schwartz の核定理により $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), \mathcal{D}'(M))$ はその distribution 核. $K(x, y) \in \mathcal{D}'(M \times N)$ と同一視され $Ku(x) = \int K(x, y) u(y)\, dy$ と書かれる. また formal adjoint $K^* \in \mathcal{L}(C_0^\infty(M), \mathcal{D}'(N))$ は $K^* v(y) = \int \overline{K(x, y)}\, v(x)\, dy$ で与えられる.

核 $K(x, y)$ を持つ作用素 K に対し.

$$WF'(K)_N = \{(y,\eta);(x,y;0,-\eta) \in WF(K) \text{ for some } x \in M\},$$

$$WF(K)_M = \{(x,\xi);(x,y;\xi,0) \in WF(K) \text{ for some } y \in N\},$$

$$WF'_A(K) = \{(x,\xi;y,\eta);(x,y;\xi,-\eta) \in WF_A(K)\}$$

と書く。もし $WF'(K)_N = \phi$ なら Kは $\mathcal{E}'(N) \to \mathcal{D}'(M)$ に拡張され次が成立する；

$$WF_A(Ku) \subset WF'_A(K) \circ (WF_A(u) \cup \operatorname{supp}(u)).$$

以下では $m \geq n$ とし，$\iota : \dot{T}^*(N) \to \dot{T}^*(M)$ なる斉次な injection map が与えられているとする。 $\omega \subset \dot{T}^*(N)$ を開集合とする。とき、

<u>定義</u>(1.1) $K \in \mathcal{L}(C_0^\infty(N), \mathcal{D}'(M))$ が "ι に関して ω で micro-local である" とは $\iota(\omega)$ の近傍 $\tilde{\omega} \subset \dot{T}^*(M)$ があり次をみたすこととする：

(i) $WF'(K)_N = WF(K)_M = \phi$,

(ii) $WF'_A(K) \cap (\tilde{\omega} \times \pi_N^{-1}\pi_N(\omega)) \subset \{(\iota(y^*), y^*); y^* \in \omega\}$,

(ii)* $WF'_A(K) \cap (\pi_M^{-1}\circ\pi_M(\tilde{\omega}) \times \omega) \subset \{(\iota(y^*), y^*); y^* \in \omega\}$.

このとき $\mathring{y}^* \in \omega$ に対し $\chi \in C_0^\infty(\pi_N(\omega))$, $\tilde{\chi} \in C_0^\infty(\pi_M(\tilde{\omega}))$ を $\mathring{y}^*$, $\iota(\mathring{y}^*)$ の近傍で $\equiv 1$ となるようにとり，$(K)_{\mathring{y}^*} \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'(N), \mathcal{E}'(M))$ を $(K)_{\mathring{y}^*} u(x) = \tilde{\chi}(x) K(\chi u)(x)$ と定めれば $(K)_{\mathring{y}^*}$ (resp. $(K)^*_{\mathring{y}^*}$) は $\mathcal{C}^+_{N,\mathring{y}^*}$ から $\mathcal{C}^+_{M,\iota(\mathring{y}^*)}$ への homomorphism (resp. $\mathcal{C}^+_{M,\iota(\mathring{y}^*)}$ から $\mathcal{C}^+_{N,\mathring{y}^*}$ への homo.) を induce する。我々はこの factrized op. を $\underline{K}$ (resp. $\underline{K}^*$) と書く。

1.2. Tempered micro diff. ops.

$N=\mathbb{R}^n_y\subset\mathbb{C}^n$ とし，$\mu\in\mathbb{Z}/2$ に対し．

定義(1.2)

$$\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2\,(\mu)}=\begin{cases}\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}\Big|_{i\dot{T}^*_N(\mathbb{C}^n)}\otimes\{1,|D_y|^{-\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu\in\mathbb{Z}\\ \mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu-\frac{1}{2})}\Big|_{i\dot{T}^*_N(\mathbb{C}^n)}\otimes\{1,|D_y|^{\frac{1}{2}}\} & \text{if } \mu-\frac{1}{2}\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\left(D_{y_j}=-i\frac{\partial}{\partial y_j},\ j=1,\dots,n,\quad \sigma(|D_y|)=\sqrt{\eta_1^2+\dots+\eta_n^2}\right)$$

とおく，ただし，$\mathcal{E}_{\mathbb{C}^n}^{(\mu)}$ は $T^*(\mathbb{C}^n)$ 上の高々 μ 階の micro-diff. op の層とする．ここでは $\dot{T}^*(N)$ と $i\dot{T}^*_N(\mathbb{C}^n)$ を同一視し $\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2\,(\mu)}$ を $\dot{T}^*(N)$ 上の層と考える

$A=A(y,D_y)\in\mathcal{E}_N^{\mathbb{Z}/2}(\omega)$ は次をみたす symbol 列 $\{a_j\}_{j=0}^{\infty}$ で定義することもできる：

(i) ω の複素近傍 $\omega^{\mathbb{C}}\subset\mathbb{C}^n\times(\mathbb{C}^n\setminus0)$ があり $a_j(y,\eta)$ は $\omega^{\mathbb{C}}$ で正則で η について $(\mu-\frac{j}{2})$次斉次．

(ii) $\forall\omega_0^{\mathbb{C}}\subset\subset\omega^{\mathbb{C}}$ $\exists C>0$ st $\sup_{y^*\in\omega_0^{\mathbb{C}}}|a_j(y^*)|\le C^{j+1}\sqrt{j!}$．

このとき a_0 を $\sigma^0(A)$ と書き A の主 symbol と呼ぶ．

$A\in\mathcal{E}^{\mathbb{Z}/2}_{N,y^*}$ は $\mathcal{C}_{N,y^*}$ (germ of micro f.t. at y^*) に準同型として作用するが，この作用は distribution 核を持つ作用素により実現される．これにより，A の $\mathcal{C}^f_{N,y^*}$ への作用が well defined となる．(Metivier [6] p21〜p35 を見よ)

§2. 結果

$\{0\}\times N = \{0\}\times \mathbb{R}^n_y \hookrightarrow M = \mathbb{R}^1_t\times N$, $\iota : \dot{T}^*(N)\ni (y,\eta)\mapsto (0,y;0,\eta)\in \dot{T}^*(M)$,

$\Sigma = \iota(\dot{T}^*(N)) = \dot{T}^*(M)\cap\{t=\tau=0\}$ とする.

$\dot{y}^* = (\dot{y},\dot{\eta})\in \dot{T}^*(N)$ $(|\dot{\eta}|=1)$, $\mu\in \mathbb{Z}/2$ に対し, $\iota(\dot{y}^*)$ の近傍で定義された次の形の micro diff. op. を考える.

$$(2.1)\qquad P = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} C_{\alpha\beta}(y,D_y)\, t^\alpha D_t^\beta, \quad C_{\alpha\beta}\in \mathcal{E}^{\mathbb{Z}/2\,(\mu+\frac{|\alpha|}{2}-\frac{|\beta|}{2})}_{N,\dot{y}^*}$$

この P に対し

$$\sigma^0(P)_{\dot{y}^*}(t,\tau) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} \sigma^0(C_{\alpha\beta})(\dot{y}^*)\, t^\alpha \tau^\beta$$

$$\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\dot{y}^*} = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} \sigma^0(C_{\alpha\beta})(\dot{y}^*)\, t^\alpha D_t^\beta \in \mathcal{L}(\mathcal{S}'_t, \mathcal{S}'_t)$$

とおき, 次を仮定する.

(A-1) $\exists c>0$ s.t. $|\sigma^0(P)_{\dot{y}^*}(t,\tau)| \ge c(|t|+|\tau|)^m$,

(A-2) $\dim(\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\dot{y}^*})\cap \mathcal{S}_t) \neq 0$.

(注意) (A-1) の仮定の下 $\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\dot{y}^*}$ は $\mathcal{S}'_t\to\mathcal{S}'_t$ の Fredholm op となり $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\dot{y}^*})$ は $\mathcal{S}_t$ に含まれる. 加えて $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{\dot{y}^*}) = \{0\}$ ならば, P が $\dot{y}^*$ で A-m.h.e. (: analytic micro hypo elliptic) となることは $C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(t,y;D_t,D_y)$ の場合もこめて Metivier [6] により証明されている.

さて $k_+ = \dim(\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}))$, $k_- = \dim(\mathrm{Coker}(\hat{\sigma}(P)_{y^*}))$ とおいて我々の主定理を述べる.

<u>定理</u> (2.2) P は (A-1), (A-2) をみたすとせよ. このとき,

$$M \in \mathcal{E}_{N,y^*}^{\mathbb{R}/2\,(m)} \otimes \mathbb{C}^{k_- \times k_+} : (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-}$$

と 2 に関して micro local な 2 つの作用素

$$H_+ : (\mathcal{E}'(N))^{k_+} \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$$

$$H_- : (\mathcal{E}'(N))^{k_-} \longrightarrow \mathcal{D}'(M)$$

が存在し, 次の同型を与える.

$$\underline{H}_+ : \mathrm{Ker}(M; (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(P; \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)} \to \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)})$$

$$[\underline{H}_-^*] : \mathrm{Coker}(P; \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)} \to \mathcal{C}^f_{M,(0,y^*)}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coker}(M; (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_+} \to (\mathcal{C}^f_{N,y^*})^{k_-})$$

(注意) (1) $H_\pm$ は $y^* \sim y^*$ で主 symbol $(h^{(0)}_{\pm 1}(t; y^*), \ldots, h^{(0)}_{\pm k_\pm}(t; y^*))$ を持ち $\{h^{(0)}_{+\ell}(t; y^*)\}_{\ell=1}^{k_+}$ (resp. $\{h^{(0)}_{-\ell}(t, y^*)\}_{\ell=1}^{k_-}\}$) は $\mathrm{Ker}\,\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}$ (resp. $\mathrm{Ker}(\hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}^*)$) の base となっている.

(2) Grigis - Rothschild [1] は $c_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta}(D_y)$ の場合にこの結果を証明している. また $d=1$ の時は Kashiwara - Kawai - Oshima [3] に同様の結果がある.

(3) 我々は M の定める micro-diff. system を "<u>Interior boundary system</u> on Σ (, induced by P)" と呼ぶことにする.

系(2.3) (1) P が $\tau(y^*)$ で $\mathcal{A}$-micro hypoelliptic (resp. C^∞-m.h.e)

$\Longleftrightarrow$ M が y^* で $\mathcal{A}$-microhypoelliptic (resp. C^∞-m.h.e)

(2) $f \in \mathcal{E}'(M)$ とする. $\exists u \in \mathcal{E}'(M)$ s.t. $Pu - f \in \mathcal{A}_{M,\tau(y^*)}$

$\Longleftrightarrow$ $\exists v_+ \in (\mathcal{E}'(N))^{k_+}$ s.t. $\mathcal{H}_-^* f + M v_+ \in (\mathcal{A}_{N,y^*})^{k_-}$

(ただし、P, M は distribution 核による適当な realization を表わす)

具体例の計算は§6で行なうが M, $\mathcal{H}_\pm$ のイメージを持ってもらうため ここでも一つ例を上げる

例(2.4) $P = D_t^2 + t^2(D_{y_1}^2 + D_{y_2}^2) - D_{y_2} + c$ in $\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_y^2$

を $(0, dy_2)$ で考えると

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_- = \left(\frac{|D_y|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|D_y|} : \mathcal{E}'(\mathbb{R}_y^2) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3_{t,y})$$

$$M = |D_y| - D_{y_2} + c = D_{y_2}^{-1}\left(\tfrac{1}{2} D_{y_1}^2 + c D_{y_2}\right) + O\left(\left|\frac{D_{y_1}}{D_{y_2}}\right|^4\right) D_{y_2}$$

となる. ゆえに $c \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}^-}$ ならば P は $(0, dy_2)$ で C^∞-m.h.e. であるが いかなる c に対しても そこで $\mathcal{A}$-m.h.e とはならない

§3. Symbol と Banach scale.

3.1. Symbol Spaces.

$y^* = (\mathring{y}, \mathring{\eta}) \in \dot{T}^*(N)$ ($|\mathring{\eta}| = 1$) を固定し，次の形の $\mathring{y}^*$ の近傍を考える．

$$\omega_\rho = \{(y,\eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) ; |y - \mathring{y}| < \rho, |\eta - \mathring{\eta}| < \rho\}$$

$$\omega_\rho^{\mathbb{C}} = \{(y,\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0) ; |y - \mathring{y}| < \rho, |\eta - \mathring{\eta}| < \rho\}$$

ただし．$0 < \rho < 1$，また．

$$\Gamma\omega_\rho = \{(y, \lambda\eta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0) ; (y,\eta) \in \omega_\rho, \lambda > 0\}$$

$$\Gamma\omega_\rho^{\mathbb{C}} = \{(y, \lambda\eta) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0) ; (y,\eta) \in \omega_\rho^{\mathbb{C}}, \lambda > 0\}$$

とおく．

$B = B(\lambda)$ は ある Banach space で その norm は λ に依存してもよいものとする．

<u>定義</u> (3.1.1) $\mu \in \mathbb{Z}/2$，$y^* = (y, \eta)$ とする．

(1) $p(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $p(y^*)$ は $\Gamma\omega_\rho^{\mathbb{C}}$ で定義された B に値をとる正則函数．

(ii) $\|p(y, \lambda\eta)\|_{B(\lambda)} = \lambda^\mu \|p(y,\eta)\|_{B(1)}$ for $(y,\eta) \in \omega_\rho$，$\lambda > 0$

(iii) $\sup_{y^* \in \omega_\rho^{\mathbb{C}}} \|p(y^*)\|_{B(1)} < +\infty$．

(2) $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(y^*) \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{(i)} \quad p_j(y^*) \in \mathcal{O}^{(\mu - j/2)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\, C \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \sup_{y^* \in \omega^*} \| p_j(y^*) \|_{B(1)} \leq C^{j+1} \sqrt{j!}$$

(3) $\quad p(y^*) \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_\rho} ; B)$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{(i)} \quad p(y^*) \in C^\infty(\Gamma_{\omega_\rho} ; B)$$

$$\text{(ii)} \quad \exists\, C \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \forall \alpha = (\alpha_+, \alpha_-) \in \mathbb{N}^d$$

$$\| \partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} p(y,\eta) \|_{B(|\eta|)} \leq C^{|\alpha|+1} (1+|\eta|)^\mu |\alpha_+|^{|\alpha_+|} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|} \right)^{\alpha_-}$$

$$\text{for} \quad (y,\eta) \in \Gamma_{\omega_\rho}, \quad |\eta| \geq C(|\alpha_-| + 1)$$

（注意） Cauchy の不等式により $\rho_0 < \rho$ なる $\mathcal{O}^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)\big|_{\Gamma_{\omega_{\rho_0}}} \hookrightarrow S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}} ; B)$

定義 (3.1.2) $\quad 0 < \rho_0 < \rho$ とする. $p \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}} ; B)$, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$ に対し, $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ とは. 適当な $C > 0$ に対して. 次が成立することとする:

$$\| \partial_y^{\alpha_+} \partial_\eta^{\alpha_-} \Big(p(y,\eta) - \sum_{j=1}^{N-1} p_j(y,\eta) \Big) \|_{B(|\eta|)} \leq C^{|\alpha|+N+1} (1+|\eta|)^{\mu - N/2} N^{\frac{N}{2}} |\alpha_+|^{|\alpha_+|} \left(\frac{|\alpha_-|}{|\eta|} \right)^{|\alpha_-|}$$

$$\text{for} \quad (y,\eta) \in \Gamma_{\omega_{\rho_0}}, \quad |\eta| \geq C(|\alpha_-| + N + 1)$$

補題 (3.1.3) $\quad \sum_{j=0}^{\infty} p_j \in FS^{(\mu)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}} ; B)$ とすると $\forall \rho_0 \in (0, \rho)$ に対し $p \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}} ; B)$ で $p \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ となるものが構成できる.
また 他の $p' \in S^{(\mu)}(\Gamma_{\omega_{\rho_0}} ; B)$ について $p' \sim \sum p_j$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$ となれば $p - p' \sim 0$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_0}}$.
∵) Métivier [6] Lemma 3.2 と同じ.

3.2. ここで $a\in S^m(\Gamma_{\omega_\rho})\equiv S^m(\Gamma_{\omega_\rho};\mathbb{C})$ の $\mathcal{C}^f_{N,\dot y^*}$ への作用について述べておく。

補題 (3.2.1) $0<\rho_0<\rho_1<\rho$ に対し $g=g(\eta)\in C^\infty(\mathbb{R}^n_\eta)$ で

(i) $$\begin{cases} g(\eta)\equiv 0 & \text{for } \left|\frac{\eta}{|\eta|}-\mathring{\eta}\right|>\rho_1 \text{ or } |\eta|<1 \\ g(\eta)\equiv 1 & \text{if } \left|\frac{\eta}{|\eta|}-\mathring{\eta}\right|<\rho_1 \text{ and } |\eta|>2 \end{cases}$$

及び、適当な C について、

(ii) $$|\partial_\eta^\alpha g(\eta)|\le C^\alpha\left(\frac{|\alpha|}{|\eta|}\right)^{|\alpha|/2} \quad \text{for } |\eta|\ge|\alpha|$$

をみたすものが存在する。(Metivier [6] Lemma 3.1)

そこで

$$A(y,y')=\int e^{i(y-y')\eta}\,a(y,\eta)\,g(\eta)\,\frac{d\eta}{(2\pi)^n}\in\mathcal{D}'(\pi(\omega_\rho)\times N)$$

とおけば、$WF_A'(A)\subset\mathrm{diag}(\Gamma_{\omega_\rho})$ となる。(loc. cit Lemma 3.3)

これが定める作用素 $A\in\mathcal{L}(\mathcal{E}'(N),\mathcal{D}'(\pi(\omega_\rho)))$ を factrize して

$\underline{A}:\mathcal{C}^f_{N,\dot y^*}\to\mathcal{C}^f_{\pi(\omega_\rho),\dot y^*}\simeq\mathcal{C}^f_{N,\dot y^*}$ が得られる。また $a\sim 0$ in $\Gamma_{\omega_{\rho'}}$ ($\rho'<\rho_0$) ならば $WF_A'(A)\cap(\omega_{\rho'}\times\omega_{\rho'})=\phi$ がいえ、$\underline{A}$ が g の選び方によらないこと及び、$FS^{(m)}(\omega_\rho)$ の $\mathcal{C}^f_{N,\dot y^*}$ への作用が和のとり方によらず well defined となることがわかる。このAあるいは $\underline{A}$ を $a(y,D_y)_{\dot y^*}$ と書く。また σ により $\mathcal{E}^{\pi/2,(m)}_{N,\dot y^*}\simeq\bigcup_{\rho>0}FS^{(m)}(\omega_\rho)$ だから $\mathcal{E}^{\pi/2}_{N,\dot y^*}$ の $\mathcal{C}^f_{N,\dot y^*}$ への作用も定義されたことになる。

3.3. ここでは主定理の証明で必要となるいろいろなBanach空間 $B(\lambda)$ を定義する. また積に関する評価をMetivier [6] と Okaji [7] から引用しまとめておく.

定義(3.3.1) $A^{(m)} = \{ p = \sum_{|\alpha|+|\beta|\le m} C_{\alpha\beta}\, t^{\alpha} D_t^{\beta} \,;\, C_{\alpha\beta}\in \mathbb{C}\}$, $\|p\|_{A^{(m)}(\lambda)} = \max_{\alpha,\beta}\{|C_{\alpha\beta}|\lambda^{(|\beta|-|\alpha|)/2}\}$ とする. また $\sigma(p) = \sum C_{\alpha\beta}\, t^{\alpha}\tau^{\beta}$ と書く.

定義(3.3.2) $m(\pm) = \{M \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{k_+}, \mathbb{C}^{k_-})\} \simeq \{(m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}} \in \mathbb{C}^{k_-\times k_+}\}$

$\|M\|_{m(\pm)} = \max_{\ell,\ell'}|m_{\ell,\ell'}|$ とする. $\sigma(M) = (m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}}$ と書く.

- $T_j = T_j(\lambda) = \lambda^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial t_j}$, $T_{-j} = T_{-j}(\lambda) = i\lambda^{\frac{1}{2}} t_j$ $(j=1,\cdots,d)$ とおく.
- $I=(i_1,\cdots,i_k)$ に対し $|I|=k$, $T_I = T_{i_1}T_{i_2}\cdots T_{i_k}$ とする.
- $L\in\mathcal{L}(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}'_t)$ に対し $(\mathrm{ad}T_j)(L) = [T_j, L] = T_jL - LT_j$ と書き,

  $(\mathrm{ad}\,T)^{\alpha} = \prod_j (\mathrm{ad}\,T_j)^{\alpha_j}$ for $\alpha=(\alpha_+,\alpha_-)\in\mathbb{N}^{2d}$ とする.

  また $\|L\|_{(0)} = \|L\|_{\mathcal{L}(L^2,L^2)} = \sup_{u\neq 0}\frac{\|Lu\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}$ と書く.

定義(3.3.3) $m\ge 0$, $R>0$ に対し,

$L\in\mathcal{L}_R^{(m)} \underset{\mathrm{def}}{\iff}$ (i) $L\in\mathcal{L}(\mathcal{S}_t,\mathcal{S}'_t)$

(ii) $\exists C$ s.t. $\|T_I(\mathrm{ad}T)^{\alpha}(L)T_J\|_{(0)} \le C R^{|\alpha|}\alpha!$

for $|I|+|J|\le m+|\alpha|$

とする. また (ii) を成立させる最小の C を $\|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.4) $\exists\, C = C(d,m)$ s.t.

$$\|PL\|_{\mathcal{L}_R^0(\lambda)} \leq C \|P\|_{A^{(m)}(\lambda)} \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\lambda)} \quad \text{for} \quad P \in A^{(m)}(\lambda),\ L \in \mathcal{L}_R^{(m)}(\lambda)$$

$K \in \mathcal{L}(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}'_t)$ の核を $K(t,t')\ (\in \mathcal{S}'_{t,t'})$ と書く。また、

$$\tilde{K}(\tau,\tau') = \iint e^{-it\tau + it'\tau'} K(t,t')\,dt\,dt'$$ とおく。($\widehat{Ku} = \tilde{K}\hat{u}$)

定義 (3.3.5) $\varepsilon > 0$ に対し、$B_\varepsilon = B_\varepsilon(\lambda)$ を次をみたす Hilbert-Schmidt 作用素 K の空間とする:

(i) $\| e^{\lambda\varepsilon |t_j^2 - t_j'^2|} K(t,t') \|_{L^2(\mathbb{R}^{2d}_{t,t'})} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$,

(ii) $\| e^{\varepsilon |\tau_j^2 - \tau_j'^2|/\lambda} \tilde{K}(\tau,\tau') \|_{L^2(\mathbb{R}^{2d}_{\tau,\tau'})} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$.

また i), (ii) の norm の中で最大となるものを $\|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)}$ と書く。

補題 (3.3.6) (Metivier [6] Prop 2.8) $m \geq d+1$ ならば、任意の $R > 0$ に対し、適当な ε_0, C_0 があり、次が成立する:

$$\|L\|_{B_{\varepsilon_0}(\lambda)} \leq C_0 \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(m)}(\lambda)} \quad \text{for} \ {}^\forall L \in \mathcal{L}_R^m.$$

補題 (3.3.7) (loc. cit Prop 2.9) 任意の $R > 0$ に対し、$\varepsilon_0 > 0$, $C_0 > 0$ があり、$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ なら、

$$\|LK\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \leq C_0 \|L\|_{\mathcal{L}_R^{(0)}} \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for} \quad L \in \mathcal{L}_R^{(0)}(\lambda),\ K \in B_\varepsilon(\lambda).$$

定義 (3.3.8)　$h(t) \in H_\varepsilon(\lambda)$　$(\varepsilon > 0)$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i)　$h(t) \in \mathcal{S}_t$

(ii)　$\| e^{\lambda\varepsilon t_j^2} h(t) \|_{L^2(\mathbb{R}^d_t)} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$.

(iii)　$\| e^{\varepsilon \tau_j^2/\lambda} \hat{h}(\tau) \|_{L^2(\mathbb{R}^d_\tau)} < +\infty$, $j = 1, 2, \cdots d$.

また (ii)、(iii) の norm のうち最大のものを $\|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と書く.

補題 (3.3.9)　$\forall R > 0$ に対し、$\varepsilon_0 > 0, C_0 > 0$ があり、$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対し.

$$\| L h \|_{H_\varepsilon(\lambda)} \leq C_0 \| L \|_{\mathcal{L}^{(0)}_R(\lambda)} \| h \|_{H_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } L \in \mathcal{L}^{(0)}_R(\lambda),\ h \in H_\varepsilon(\lambda).$$

さて、$(h_1, \cdots h_k) \in (H_\varepsilon(\lambda))^k$ に対し 作用素 $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*$ を

$$\mathcal{H} : \mathbb{C}^k \ni (z_\ell)_{\ell=1}^{k} \longmapsto \sum_{\ell=1}^{k} h_\ell(t) z_\ell \in \mathcal{S}_t$$

$$\mathcal{H}^* : \mathcal{S}'_t \ni u(t) \longmapsto \left(\int \bar{h}_\ell(t)\, u(t)\, dt \right)_{\ell=1}^{k} \in \mathbb{C}^k$$

で定義する.　このような作用素の空間を $\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)$, ${}^*\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)$ と書き.　$\| H \|_{\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)} = \| H^* \|_{{}^*\mathscr{H}^k_\varepsilon(\lambda)} = \max_\ell \| h_\ell \|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ と定める

また $\sigma(\mathcal{H}) = (h_1, \cdots, h_k) \in (H_\varepsilon(\lambda))^k$ と書く.

定義 (3.3.10)　$\mathscr{H}^+_\varepsilon(\lambda) = \mathscr{H}^{k+}_\varepsilon(\lambda)$, $\mathscr{H}^-_\varepsilon(\lambda) = \mathscr{H}^{k-}_\varepsilon(\lambda)$

また　${}^*\mathscr{H}^+_\varepsilon(\lambda) = {}^*\mathscr{H}^{k+}_\varepsilon(\lambda)$, ${}^*\mathscr{H}^-(\lambda) = \mathscr{H}^{k-}_\varepsilon(\lambda)$

補題 (3.3.11) $K \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_0, H_1 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)$, $H_2 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k'}(\lambda)$ $(\varepsilon > 0)$

とすると $KH_0 \in \mathcal{H}_\varepsilon^{k}(\lambda)$, $H_0 H_1^* \in B_\varepsilon(\lambda)$, $H_2^* H_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^{k}, \mathbb{C}^{k'})$. さらに

(1) $\|KH_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^k(\lambda)} \leq \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^k}$

(2) $\|H_0 H_1^*\|_{B_\varepsilon(\lambda)} \leq k \|H_0\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^k(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^k(\lambda)}$

(3) $\|H_2^* H_1\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^{k'})} \leq \|H_2\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^{k'}(\lambda)} \|H_1\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^k(\lambda)}$

補題 (3.3.12) (Metivier [6] prop 2.10. Okaji [7] Lemma 4.2)

$M = M(d)$ が存在し、任意の $0 < \varepsilon' < \varepsilon < 1$ に対し次が成立:

(1) $\|(\mathrm{ad}\, T_j)(K)\|_{B_{\varepsilon'}(\lambda)} \leq M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'}\right)^{\frac{1}{2}} \|K\|_{B_\varepsilon(\lambda)}$ for $\begin{cases} K \in B_\varepsilon(\lambda) \\ j = \pm 1, \cdots, \pm d \end{cases}$

(2) $\|T_j(h)\|_{H_{\varepsilon'}(\lambda)} \leq M \left(\frac{M}{\varepsilon - \varepsilon'}\right)^{\frac{1}{2}} \|h\|_{H_\varepsilon(\lambda)}$ for $\begin{cases} h \in H_\varepsilon(\lambda) \\ j = \pm 1, \cdots, \pm d \end{cases}$

定義 (3.3.13) $k(t, z) \in G_R^{\frac{1}{2}(m)}(\lambda)$ $(m \geq 0,\ R > 0)$

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $k(t, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^{2d}_{t,z})$

(ii) $\exists\, C$ s.t.

$$\sup_{\mathbb{R}^{2d}_{t,z}} \left(\frac{|\partial_t^{\alpha_+} \partial_z^{\alpha_-} k(t,z)|}{\lambda^{(|\alpha_+| - |\alpha_-|)/2} (1 + \lambda^{\frac{1}{2}} t + \lambda^{-\frac{1}{2}} z)^m} \right) \leq C R^{|\alpha|} \sqrt{\alpha!}$$

$K(s,t) \in \mathcal{S}'_{t,t'}$ を核関数とする作用素 K に対し、$k = \sigma(K)$

を

$$\tilde{k}(t,\tau) = \int k(t, t-t') e^{-it'\tau} dt'$$

とおけば

$$K u(t) = \tilde{k}(t, D_t) u(t) = \int e^{it\tau} \tilde{k}(t,\tau) \hat{u}(\tau) \frac{d\tau}{(2\pi)^d}$$

と書ける。

$\sigma((\mathrm{ad}\,T)^\alpha(k)) = \lambda^{(|\alpha_-|-|\alpha_+|)/2} \partial_t^{\alpha_+} \partial_\tau^{\alpha_-} \sigma(k)$ と補題(3.3.12)より次を得る.

<u>補題</u>(3.3.15) $\forall \varepsilon > 0$ に対し. $R > 0$. $C > 0$ があり

$$\| \sigma(k) \|_{G_R^{\frac{1}{2}(0)}(\lambda)} \le C \| K \|_{B_\varepsilon(\lambda)} \quad \text{for } K \in B_\varepsilon(\lambda).$$

§4. パラメトリックスの構成

$P = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le m} C_{\alpha\beta}(y, D_y)\, t^\alpha D_t^\beta$ は§2で与えたものとする.
以下では簡単のため $\mu = 0$ と仮定しておく. ρ を小さくとり
$\sigma(C_{\alpha\beta}) - \sum_{j \ge 1} C_{\alpha\beta}^{(j)}(y^*) \in FS^{(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2})}(\omega_\rho^\varepsilon)$ としてよい.

$$\hat{P}_j(y^*) = \sum_{|\alpha|+|\beta| \le m} C_{\alpha,\beta}^{(j)}(y^*)\, t^\alpha D_t^\beta \in O^{(-j/2)}(\omega_\rho^\varepsilon; A^{(m)})$$

とおけば. $\hat{P}(y^*) \equiv \sum \sigma(C_{\alpha\beta})(y^*)\, t^\alpha D_t^\beta = \sum_{j=1}^{\infty} \hat{P}_j(y^*) \in FS^{(0)}(\omega_\rho^\varepsilon; A^{(m)})$
となる また $\hat{P}_j^*(y^*) = \hat{\sigma}_\Sigma(P)_{y^*}$ である.

$y^* \in \omega_\rho^\varepsilon$ に対し. $\hat{P}_j^*(y^*) = (\hat{P}_j(\bar{y}^*))^*$ とし

$\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) = \hat{P}_0^*(y^*)\,\hat{P}_0(y^*)$, $\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*) = \hat{P}_0(y^*)\,\hat{P}_0^*(y^*)$ と書く.

必要なら ρ をとりなおし $\forall y^* \in \omega_\rho^{\mathbb{C}}$ で

$$\Big| \sum_{|\alpha|+|\beta|=m} c_{\alpha\beta}^{(0)}(y^*)\, t^\alpha \tau^\beta \Big| \geq C(|t|+|\tau|)^m \qquad (c>0)$$

が成立しているものとする. このとき $\hat{P}_0^*\hat{P}_0$ 及び $\hat{P}_0\hat{P}_0^*$ は $\hat{P}_0$ とともに $\mathcal{S}'_t$ から $\mathcal{S}'_t$ への Fredholm op となる.

さて $\gamma \subset \mathbb{C}$ を原点を正の向きにまわる閉曲線で, $\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*)$ 及び $\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*)$ の 0 以外の固有値を内部に含まないものとする. $\rho_0 \in (0,\rho)$ を小さくとれば $\forall y \in \omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$, $\forall \zeta \in \gamma$ に対し resolvent $(\hat{P}_0^*\hat{P}_0 - \zeta)^{-1}$, $(\hat{P}_0\hat{P}_0^* - \zeta)^{-1}$ が存在する. そこで, $y^* \in \omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$ に対し.

$$\hat{Q}_0(y^*) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_\gamma \zeta^{-1}(\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta\Big)\, \hat{P}_0^*(y^*)$$

$$\hat{\pi}_+^{(0)}(y^*) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma (\hat{P}_0^*\hat{P}_0(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta$$

$$\hat{\pi}_-^{(0)}(y^*) = \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma (\hat{P}_0\hat{P}_0^*(y^*) - \zeta)^{-1} d\zeta$$

$$\hat{E}_\pm^{(0)}(y^*) = \hat{\pi}_\pm^{(0)}(y^*)\,\mathcal{S}'_t \subset \mathcal{S}_t.$$

とおく. $\hat{\pi}_+^{(0)}(y^*)$ (resp. $\hat{\pi}_-^{(0)}(y^*)$) は $\mathrm{Ker}\,\hat{P}_0(y^*)$ (resp. $\mathrm{Ker}\,\hat{P}_0^*(y^*) \simeq \mathrm{Coker}\,\hat{P}_0(y^*)$) への射影作用素となることに注意する. また ρ_0 のとり方から $\dim \hat{E}_\pm^{(0)}(y^*)$ は $\omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}$ 上一定 (すなわち $k_\pm$) である.

命題 (4.1) (1) $\exists R_0$ s.t. $\hat{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^c_{\rho_0}; \mathcal{L}^m_{R_0})$

(2). $\hat{E}^{(0)}_+(y^*)$ (resp. $\hat{E}^{(0)}_-(y^*)$) の $L^2(\mathbb{R}^d_+)$ における直交基底 $\{h^{(0)}_{+\ell}(t;y^*)\}^{k_+}_{\ell=1}$ (resp. $\{h^{(0)}_{-\ell}\}^{\ell_-}_{\ell=1}$) で適当な ρ_0 に対し.

$$h^{(0)}_{\pm\ell}(t;y^*) \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^c_{\rho}; \mathcal{H}_{\varepsilon_0}), \quad \ell = 1, 2, \cdots, k_\pm$$

となるものがとれる.

注) (1) については Metivier [6] Prop 2.3. (2) については Kato [4] VII, Theorem 3.9 と Melin [5] Appendix をみよ.

この $\{h^{(0)}_{\pm\ell}\}$ から作用素 $\hat{H}_{\pm 0} \in \mathcal{H}^{\pm}_{\varepsilon_0}$, $\hat{H}^*_{\pm 0} \in {}^*\mathcal{H}^{\pm}_{\varepsilon_0}$ を

$$\hat{H}_{\pm 0}(y^*) ; \mathbb{C}^{k_\pm} \ni (z_\ell)^{k_\pm}_{\ell=1} \longmapsto \sum_{\ell=1}^{k_\pm} h^{(0)}_{\pm\ell}(t;y^*) z_\ell \in \mathcal{S}_t$$

$$\hat{H}^*_{\pm 0}(y^*) ; \mathcal{S}'_t \ni u(t) \longmapsto \left(\int \overline{h^{(0)}_{\pm\ell}(t;\bar{y}^*)}\, u(t)\, dt\right)_{\ell=1}^{k_\pm} \in \mathbb{C}^{k_\pm}$$

で定めると、$\hat{\pi}^{(0)}_\pm(y^*) = \hat{H}_{\pm 0}(y^*) \cdot \hat{H}^*_{\pm 0}(y^*)$ と表わされる.

さらに

$$\hat{M}_0(y^*) = -\hat{H}^*_{-0}(y^*)\, \hat{P}_0(y^*)\, \hat{H}_{+0}(y^*);$$

とおけば.

$$(4.2) \qquad \hat{M}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega^c_{\rho_0}; \mathfrak{M}(\pm))$$

となり 次が成立する.

命題 (4.3) $\forall y^* \in \omega_{P_0}^{\sigma}$ に対し

(1) $$\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{S_+^l} & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{C}^{k-}} \end{pmatrix}$$

(2) $$\begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{S_+^l} & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{C}^{k+}} \end{pmatrix}$$

(証明はレゾルベント方程式を用いて容易にできる Kato [4] p38-39を見よ.)

そこで

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{P} & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{P}_0 & \hat{H}_{-0} \\ \hat{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty}\begin{pmatrix} \hat{P}_j & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\equiv \hat{L}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \hat{L}_j$$

とおき $\hat{L}$ の右パラメトリックス $\hat{E}$ を

$$\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 & \hat{H}_{+0} \\ \hat{H}_{-0}^* & \hat{M}_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{E} = \sum_{j=0}^{\infty} \hat{E}_j$$

なる形で構成しよう.

(4.7) の Ψ.d.op の symbol 積を # で表わし. $\hat{L}^{(\alpha)} = \partial_\eta^\alpha \hat{L}$

$\hat{E}_{(\alpha)} = D_y^{\alpha}\hat{E}$ なる記法を用いると、

$$\hat{L} \# \hat{E} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \Big(\sum_{i+j+2|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} \Big)$$

となるから、$\{\hat{E}_j\}$ を

$$(4.4) \qquad \sum_{i+j+2|\alpha|=\ell} \frac{1}{\alpha!} \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} = 0, \quad \ell = 1, 2, \cdots$$

がみたされるように求めればよい。

(4.4) の左から $\hat{E}_0$ を作用させ、(4.3) の (i) を用いると、$\{E_j\}_{j\geq 1}$ は次式により帰納的に決定される:

$$(4.5) \quad \begin{cases} \hat{E}_1 = -\hat{E}_0\hat{L}_1\hat{E}_0 = \begin{pmatrix} -\hat{Q}_0\hat{P}_1\hat{Q}_0 & -\hat{Q}_0\hat{P}_1\hat{H}_{+0} \\ -\hat{H}_{-0}^{*}\hat{P}_1\hat{Q}_0 & -\hat{H}_{-0}^{*}\hat{P}_1\hat{M}_0 \end{pmatrix} \\[2ex] \hat{E}_2 = -\hat{E}_0\hat{L}_2\hat{E}_0 - \hat{E}_0\hat{L}_1\hat{E}_1 - \sum_{j=1}^{n} \hat{E}_0(\partial_{\eta_j}\hat{L}_0)(D_{y_j}\hat{E}_0) \\[1ex] \qquad = -\hat{E}_0\hat{L}_2\hat{E}_0 + \hat{E}_0\hat{L}_1\hat{Q}_0\hat{L}_1\hat{E}_0 + i\,\hat{E}_0\langle \nabla_\eta\hat{L}_0, \nabla_y\hat{E}_0\rangle \\ \quad\vdots \\ \hat{E}_\ell = -\Big(\sum_{\substack{i+j+2|\alpha|=\ell \\ j\leq \ell-1}} \frac{1}{\alpha!} \hat{E}_0 \hat{L}_i^{(\alpha)} \hat{E}_{j(\alpha)} \Big) \\ \quad\vdots \end{cases}$$

命題(4.6) r は $(2r+1)m \geq d+1$ となる最小の整数とする。
$\hat{E}_j = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j & \hat{H}_{+j} \\ \hat{H}_{-j} & \hat{M}_j \end{pmatrix}_{(j\geq 1)}$ を (4.5) により定めると、適当な $\rho_1 > 0$

$\varepsilon_1>0$, $R_1>0$ に対して, 次が成立する.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{Q}_j)\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}};\ G_{R_1}^{\frac{1}{2},(2rm)}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{H}_{\pm,j})\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}};\ (H_{\varepsilon_0})^{k_\pm}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sigma(\hat{M}_j)\in FS^{(0)}(\omega_{\rho_1}^{\mathbb{C}})\otimes\mathbb{C}^{k_-\times k_+}.$$

(証明の概略は §5 で与える.)

まったく同様にして $\hat{\mathcal{L}}$ の左パラメトリックスも構成されるから, $\hat{E}=\sum_{j\geq 0}\hat{E}_j$ は # 積に関して $\hat{\mathcal{L}}$ の両側パラメトリックスとなることがわかる.

さて, $\rho_2\in(0,\rho_1)$ に対して, 補題 (3.1.3) により

$$q(t,\tau;y,\eta)\in S^{(0)}(\Gamma_{\omega_{\rho_2}};\ G_{R_1}^{\frac{1}{2}(2rm)})$$

$$(h_{\pm\ell}(t;y,\eta))_{\ell=1}^{k_\pm}\in S^{(0)}(\Gamma_{\omega_{\rho_2}};(H_{\varepsilon_1})^{k_\pm})$$

$$(m_{\ell,\ell'}(y,\eta))_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}}\in S^{0}(\Gamma_{\omega_{\rho_2}})\otimes\mathbb{C}^{k_-\times k_+}$$

で $q\sim\sum\sigma(\hat{Q}_j)$, $(h_{\pm\ell})_{\ell=1}^{k_\pm}\sim\sum\sigma(\hat{H}_{\pm,j})$, $(m_{\ell\ell'})_{\substack{\ell=1\cdots k_-\\ \ell'=1\cdots k_+}}\sim\sum\sigma(\hat{M}_j)$ in $\Gamma_{\omega_{\rho_2}}$ となるものがとれる.

また,

$$\phi_N(y)\in C_0^{\infty}(|y-\mathring{y}|<\rho_2),\quad \phi_M(t,y)\in C_0^{\infty}(|t|<\rho_2,\ |y-\mathring{y}|<\rho_2)$$

を $\dot{\eta}$, $(0, \dot{\eta})$ の近傍で $\equiv 1$ となるもの;

$$g_N(\eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\eta),\ \mathrm{supp}\, g_N \subset \{\eta \in \mathbb{R}^n;\ |\tfrac{\eta}{|\eta|} - \dot{\eta}| < \rho_2\}$$

$$g_M(\tau, \eta) \in C^\infty(\mathbb{R}^{d+n}_{\tau,\eta}),\ \mathrm{supp}\, g_M \subset \{(\tau, \eta) \in \mathbb{R}^{d+n};\ \tfrac{|\tau|}{|\eta|} < \rho_2,\ |\tfrac{\eta}{|\eta|} - \dot{\eta}| < \rho_2\}$$

を $\dot{\eta}$, $(0, \dot{\eta})$ の錐近傍で $\equiv 1$ となる, 補題 (3.2.1) で与えられる cut off f.t とする。

これらを用いて.

$$Q = \sigma(\hat{Q})(t, D_t; y, D_y)_{\chi(\dot{y}^*)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))$$

$$H_\pm = \hat{H}_\pm(t; y, D_y)_{\dot{y}^*} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_\pm}, \mathcal{E}'(M))$$

$$M = \hat{M}(y, D_y)_{\dot{y}^*} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_+}, (\mathcal{E}'(N))^{k_-})$$

を.

$$Qu(t, y) = \iint e^{it\tau + iy\eta}\, q(t, \tau; y, \eta)\, \phi_M(t, y)\, g_M(\tau, \eta)\, \hat{u}(\tau, \eta)\, \frac{d\tau\, d\eta}{(2\pi)^{d+n}}$$

$$H_\pm v(t, y) = \sum_{\ell=1}^{k_\pm} \int e^{iy\eta}\, h_{\pm\ell}(t; y, \eta)\, \phi_M(t, y)\, g_N(\eta)\, \hat{v}_\ell(\eta)\, \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

$$(Mv(t, y))_\ell = \sum_{\ell'=1}^{k_+} \int e^{iy\eta}\, m_{\ell\ell'}(y, \eta)\, \phi_N(y)\, g_N(\eta)\, \hat{v}_{\ell'}(\eta)\, \frac{d\eta}{(2\pi)^n}$$

により定める.

また，

$$\underline{P} = \sigma(\hat{P})(t, D_t; y, D_y)_{\lambda(y^*)} \in \mathcal{L}(\mathcal{E}'(M), \mathcal{E}'(M))$$

$$\mathcal{H}_{\pm 0} = \hat{\mathcal{H}}_{\pm 0}(t; y, D_y)_{y^*} \in \mathcal{L}((\mathcal{E}'(N))^{k_\pm}, \mathcal{E}'(M))$$

と同様に定義しておく．すると，これらはすべて，micro local で

$$\begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{H}_+ \\ \underline{H}_-^* & \underline{M} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{H}_{-0} \\ \underline{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^f_{M, \lambda(y^*)} \\ (\mathcal{C}^f_{N, y^*})^{k_-} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{P} & \underline{H}_{-0} \\ \underline{H}_{+0}^* & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{Q} & \underline{H}_+ \\ \underline{H}_-^* & \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix} \quad \text{on} \begin{pmatrix} \mathcal{C}^f_{M, \lambda(y^*)} \\ (\mathcal{C}^f_{N, y^*})^{k_+} \end{pmatrix}$$

となる．すなわち

定理.(4.7) Q は $\lambda(y^*)$ の近傍で micro local，$H_{\pm 0}$ $H_\pm$ は y^* の近傍で λ に関し micro local で，次が成立する：

$\forall u \in \mathcal{E}'(M)$ に対し

(1) $\quad Q P u + H_+ H_{+0}^* u \equiv u \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{A}_{M, \lambda(y^*)}$

(2) $\quad P Q u + H_{-0} H_-^* u \equiv u \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{A}_{M, \lambda(y^*)}$

(3) $\quad H_-^* P u + M H_{+0}^* u \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ (\mathcal{A}_{N, y^*})^{k_-}$

$\forall v_+ \in (\mathcal{E}'(N))^{k_+}$ に対し．

(4) $\quad P H_+ v_+ + H_{-0} M v_+ \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{A}_{M, \lambda(y^*)}$

(5) $\mathcal{H}^*_{+0} H_+ v_+ \equiv v_+ \qquad \mathrm{mod}\ (A_N g^*)^{k_+}$

$\forall v_- \in (\mathcal{E}'(N))^{k_-}$ に対し.

(6) $\mathcal{H}^*_- H_{-0} v_- \equiv v_- \qquad \mathrm{mod}\ (A_N g^*)^{k_-}$.

[定理(4.7) ⇒ 定理(2.2)]

(4) は $\mathcal{H}_+$ が $\mathrm{Ker}(\underline{M})$ を $\mathrm{Ker}(\underline{P})$ の中にうつすことを示す.
(5) によりこれは単射. (1) によりこれは全射となる.
一方 (3) は $\underline{\mathcal{H}}^*_-(\mathrm{Rang}(\underline{P})) \subset \mathrm{Rang}(\underline{M})$ を示す. ゆえに $[\underline{\mathcal{H}}^*_-]$:
$\mathrm{Coker}(\underline{P}) \to \mathrm{Coker}(\underline{M})$ を induce する. (2) よりこれは単射.
(6) よりこれは全射である.

<u>公式</u> (4.8)

$$\hat M_0(y^*) = -\hat H^*_{-0}\hat P_0 \hat H_{+0}$$

$$\sigma(M_0)_{\ell,\ell'} = -\int \overline{h^{(0)}_{-\ell}(t;y^*)}\,(\hat P_0(y^*)\, h^{(0)}_{+\ell'}(\cdot\,;y^*))(t)\,dt$$

$$\hat M_1(y^*) = -\hat H^*_{-0}\hat P_1 \hat H_{+0}$$

$$\sigma(M_1)_{\ell\ell'} = -\int \overline{h^{0}_{-\ell}(t;y^*)}\,(\hat P_0(y^*)\, h^{(0)}_{+\ell'}(\cdot\,;y^*))(t)\,dt.$$

$$\hat M_2(y^*) = -\hat H^*_{-0}\hat P_2 \hat H_{+0} + \hat H^*_{-0}\hat P_1\hat Q_0\hat P_1\hat H_{+0}$$
$$+\, i\,[\hat H^*_{-0}\langle \nabla_\eta \hat P_0, \nabla_y \hat H_{+0}\rangle + H^*_{-0}\langle \nabla_\eta H_{-0}, \nabla_y M_0\rangle$$
$$+\, M_0\langle \nabla_\eta H^*_{+0}, \nabla_\eta H_{+0}\rangle]$$

$\vdots$

$$M_j(y^*) = -\hat H^*_{-0}\hat P_j H_{+0} + F(\hat P_0 \cdots \hat P_{j-1}, \hat Q_0, \hat H_{\pm 0}, \hat M_0)$$

$\vdots$

§5 命題(4.6)の証明の概略.

r を $(2r+1)m \geq d+1$ととり, $\hat{A}_0 = (P_0 P_0^* + 1)^r \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho}^{\mathbb{C}}; A^{(2rm)})$

とおくと $\mathrm{Ker}\,\hat{A}_0(y,\eta) = \{0\}$ より $\hat{A}_0^{-1}$ が存在し.

(5.1) $\qquad \hat{A}_0^{-1} \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{R_0}^{(2rm)}) \qquad$ for some $\rho_0, R_0 > 0$

となる. また $\tilde{Q}_0 = \hat{Q}_0 \hat{A}_0^{-1}$ とおけば. $\tilde{Q}(\hat{A}_0 \hat{P}_0) = 1 - \pi_+^{(0)}$,

$(\hat{A}_0 \hat{P}_0)\tilde{Q}_0 = 1 - \pi_-^{(0)}$ となることに注意し Metivier [ ] prop 2.3 を用いると

(5.2) $\qquad \tilde{Q}_0 \in \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}; \mathcal{L}_{R_0}^{(2r+1)m}) \hookrightarrow \mathcal{O}^{(0)}(\omega_{\rho_0}^{\mathbb{C}}; B_{\varepsilon_0})$

for some $\rho_0, R_0, \varepsilon_0 > 0$.

を得る.

<u>定義</u> (5.3) $\varepsilon > 0$ に対し. $\mathcal{E}_\varepsilon$ を次の形の作用素の空間とする:

$$E = \begin{pmatrix} Q & H_+ \\ H_- & M \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \mathcal{S}'_+ \\ \mathbb{C}^{k_+} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \mathcal{A}'_+ \\ \mathbb{C}^{k_-} \end{pmatrix}$$

s.t. $\quad Q \in B_\varepsilon$, $H_\pm \in \mathcal{H}_\varepsilon^\pm$, $M \in \mathfrak{m}(\pm)$, また.

$$\|E\|_{\mathcal{E}_\varepsilon} \equiv \max\{\|Q\|_{B_\varepsilon}, \|H_\pm\|_{\mathcal{H}_\varepsilon^\pm}, \|M\|_{\mathfrak{m}(\pm)}\}$$

とする.

さて, $\tilde{E}_j = \hat{E}_j \begin{pmatrix} \hat{A}_0^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_j \hat{A}_0^{-1} & \hat{H}_{+j} \\ \hat{H}_j^* \hat{A}_0^{-1} & \hat{M}_j \end{pmatrix}$ とおくと.

補題(3.3.4), (3.3.7), (3.3.9), (3.3.11), と Cauchy の不等式を用いることにより, 次が示される.

命題 (5.4)　$\rho_0>0$　$\varepsilon_0>0$　$C>0$ が存在し，$\forall\rho\in(0,\rho_0)$ に対し次が成立：

$$\sup_{y^*\in\omega_\rho^{\mathbb{C}}}\|\tilde{E}_j\|_{\mathcal{E}_{\varepsilon_0}} \le C\left(\frac{Cj}{\rho_0-\rho}\right)^{j/2} \qquad j=0,1,2,\cdots.$$

$$\tilde{E}_j = \begin{pmatrix}\tilde{Q}_j & \tilde{H}_{+j}\\ \tilde{H}_{-j} & \tilde{M}_j\end{pmatrix}$$ と書けば 命題 (5.4) は $\forall\rho\in(0,\rho_0)$ に対し

- $\sum\tilde{Q}_j\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};B_{\varepsilon_0}) \xrightarrow{\subset} FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};G_R^{\frac{1}{2}(0)})$　$(R=R(\varepsilon_0))$
- $\sum\hat{H}_\pm\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};\mathcal{H}_{\varepsilon_0}^{\pm}) \xrightarrow{\subset} FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};(\mathcal{H}_{\varepsilon_0})^{k_\pm})$
- $\sum\hat{M}\in FS^{(0)}(\omega_\rho^{\mathbb{C}};m(\pm)) \xrightarrow{\subset} FS^{0}(\omega_\rho^{\mathbb{C}})\otimes\mathbb{C}^{k_-\times k_+}$

と意味する．

$\sigma(\hat{A}_0)=a_0(t,\tau;y,\eta)$，$\sigma(\hat{A}_0^*)=a_0^*(t,\tau;y,\eta)$ と表わし．

$$q_j(t,\tau;y,\eta)=\sum_{|\alpha|\le 2rm}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\tau^\alpha\sigma(\tilde{Q}_j))(t,\tau;y,\eta)(D_t^\alpha a_0)(t,\tau;y,\eta)$$

$$h_-^{(j)}(t;y,\eta)=\sum_{|\alpha|\le 2rm}\frac{1}{\alpha!}(\partial_\tau^\alpha a_0^*)(t,0;y,\eta)(D_t\,\sigma(\tilde{H}_-))(t;y,\eta)$$

$$h_+^{(j)}(t;y,\eta)=\sigma(\tilde{H}_+)(t;y,\eta),\quad (m_{\ell\ell'}^{(j)})=\sigma(\tilde{M}_j)$$

とおけば．これらが $\hat{Q}_j$, $\hat{H}_{\pm j}$, $\hat{M}_j$ の symbol を与え，補題 (3.3.12) と (3.3.15) により 命題 (4.6) が証明される。

§6. 例

まず、$k=0,1,2,\cdots$ に対し

$$\psi_k(t)=(2^k k!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\left(t-\frac{d}{dt}\right)^k e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad (t\in\mathbb{R})$$

とおく，

$$\left(-\left(\frac{d}{dt}\right)^2+t^2\right)\psi_k(t)=(2k+1)\psi_k(t)$$

$$(\psi_\ell(t),\psi_k(t))_{L^2}=\delta_{\ell,k}$$

である．また

$$(\psi_\ell(t),t\psi_k(t))_{L^2}=\sqrt{\frac{k+1}{2}}\,\delta_{\ell,k+1}+\sqrt{\frac{k}{2}}\,\delta_{\ell,k-1}$$

$$(\psi_\ell(t),t^2\psi_k(t))_{L^2}=(k+\tfrac{1}{2})\delta_{\ell,k}+\frac{\sqrt{(k+1)(k+2)}}{2}\delta_{\ell,k+2}+\frac{\sqrt{k(k-1)}}{2}\delta_{\ell,k-2}$$

にも注意しておく．

<u>例</u> (6.1)

$$P(k)=D_y^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{d}(D_{t_j}^2+t_j^2)-(d+2k)D_y\right\} \quad \text{at } (0,0;dy)\in T^*(\mathbb{R}^{d+1}_{t,y})$$

を考える．$\hat{t}_j=t_j|\eta|^{\frac{1}{2}}$，$\hat{D}_j=|\eta|^{-\frac{1}{2}}D_{t_j}$ と書くと．

$$\hat{P}(k)=\hat{P}_0=|\hat{D}|^2+|\hat{t}|^2-(d+2k)$$

である．また上の $\psi_k(t)$ を用いて，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_d)\in\mathbb{N}^d$ に対し

$$\hat{h}_\alpha(t;\eta)=|\eta|^{\frac{d}{4}}\prod_{j=1}^{d}\psi_{\alpha_j}(\hat{t}_j)$$

とおき，

$$|\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C} \ni z \longmapsto z\hat{h}_\alpha(t;\eta) \in \mathcal{S}_t$$

$$\langle \hat{h}_\alpha| : \mathcal{S}'_t \ni u(t) \longmapsto (\hat{h}_\alpha(t;\eta), u(t))_{L^2(\mathbb{R}^d_t)} \in \mathbb{C}$$

と書くと（Dirac 記法）

$$\hat{Q}(k) = \sum_{|\alpha| \neq k} \frac{1}{2(|\alpha| - k)} |\hat{h}_\alpha\rangle\langle\hat{h}_\alpha|$$

$$\hat{H}_+(k) = \hat{H}_-(k) = \bigoplus_{|\alpha|=k} |\hat{h}_\alpha\rangle : \mathbb{C}^{\#\{|\alpha|=k\}} \to \mathcal{S}_t$$

で与えられ，　$\hat{M} = -\langle\hat{h}_{\alpha_2}|\hat{P}_0|\hat{h}_{\alpha_1}\rangle_{|\alpha_1|=|\alpha_2|=k} = (0)$

となる．

よって，

$$H(k) = \bigoplus_{|\alpha|=k} \hat{h}_\alpha(t;D_y) : \left(\mathcal{E}'(\mathbb{R}_y)\right)^{\#\{|\alpha|=k\}} \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{d+1}_{t,y})$$

が同型

$$\left(\mathcal{C}^f_{\mathbb{R},(0,dy)}\right)^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \mathrm{Ker}\left(P(k) : \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)} \to \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)}\right)$$

$$\left(\mathcal{C}^f_{\mathbb{R},(0;dy)}\right)^{\#\{|\alpha|=k\}} \simeq \mathrm{Coker}\left(P(k) : \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)} \to \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}^{d+1},(0,0;dy)}\right)$$

を与える．（$\#\{|\alpha|=k\} = \binom{d+k-1}{k}$）

<u>例</u> (6.2)（$P(0)$ からの摂動計算）

$$P = P(0) + D_y^{-1}\left\{\sum_{i \leq j} a_{ij} t_i t_j D_y + \sum_{j=1}^{d}(b_j D_{t_j} + b'_j t_j D_y) + c\right\}$$

at $(0,0;dy)$．を考える．

$$\hat{P}(\eta) = \hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2$$

$$= (|\hat{D}|^2 + |\hat{t}|^2 - d) + |\eta|^{-\frac{1}{2}} \sum (b_j \hat{D} + b'_j \hat{t}_j) + |\eta|^{-1} \left(\sum_{i \le j} a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c \right)$$

$$\hat{Q}_0(\eta) = \sum_{|\alpha| \neq 0} \frac{1}{2|\alpha|} \, | \hat{h}_\alpha \rangle \langle \hat{h}_\alpha |$$

$$\hat{H}_0(\eta) = \hat{H}_{-0}(\eta) = | \hat{h}_{(0)} \rangle \qquad ((0) = (0, \cdots, 0))$$

である．よって

$$\hat{M}_0(\eta) = - \langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_0 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$\hat{M}_1(\eta) = - \langle \hat{h}_{(0)} | \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle = 0$$

$$|\eta| \hat{M}_2(\eta) = - \langle \hat{h}_{(0)} | \, |\eta| \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle + \langle \hat{h}_{(0)} | \, |\eta| \hat{P}_1 \hat{Q}_0 \hat{P}_1 | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= - \sum_{i \le j} \langle \hat{h}_{(0)} | a_{ij} \hat{t}_i \hat{t}_j + c | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$+ \sum_{i,j} \left(\sum_{|\alpha| \neq 0} \frac{1}{2|\alpha|} \langle \hat{h}_{(0)} | b_i \hat{D}_i + b'_i \hat{t}_i | \hat{h}_\alpha \rangle \langle \hat{h}_\alpha | b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle \right.$$

ここで

$$\langle \hat{h}_{(0)} | \hat{t}_i \hat{t}_j | \hat{h}_{(0)} \rangle = \frac{1}{2} \delta_{i,j}$$

$$(b_j \hat{D}_j + b'_j \hat{t}_j) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \left(\frac{1}{2}(b'_j + i b_j)(\hat{t}_j - i \hat{D}_j) + \frac{1}{2}(b'_j - i b_j)(\hat{t}_j + i \hat{D}_j) \right) | \hat{h}_{(0)} \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (b'_j + i b_j) \, | \hat{h}_{(j)} \rangle \qquad ((j) = (0 \cdot \overset{j}{1} \cdot 0))$$

等を用いると

$$|\eta| \hat{M}_2 = -\left(c + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} a_{jj}\right) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{d} (b_j^2 + b_j'^2)$$

故に $\sum_{j=1}^{d} (b_j^2 + b_j'^2 - 2a_{jj}) - 4e \neq 0$

$\Longrightarrow$ P は $(0.0;dy)$ で A-m.h.e

必要なら さらに高次の項も計算可能

例えば: $b_j = b_j' = 0$. $(\forall j)$, $e = 0$ の場合.

$$\hat M_0 = \hat M_1 = \hat M_2 = \hat M_3 = 0$$

$$|\eta|^2 \hat M_4 = |\eta|^2 \langle \hat h_{(0)} | \hat P_2 \hat Q_0 \hat P_2 | \hat h_{(0)} \rangle$$

$$= \sum_{i<j} a_{ij}^2 \frac{|\langle \hat h_{(i,j)} | \hat t_i \hat t_j | h_{(0)} \rangle|^2}{4} + \sum_{j=1}^{d} a_{jj}^2 \frac{|\langle \hat h_{2(j)} | \hat t_j^2 | \hat h_{(0)} \rangle|^2}{4} \qquad \left(\begin{array}{l} (i,j) = (0 \cdots \overset{i}{1} \cdots \overset{j}{1} \cdots 0) \\ 2(j) = (0, \cdots \overset{j}{2} \cdots 0) \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \sum_{i<j} a_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{d} a_{jj}^2 \right).$$

例(6.3) (P(2) (d=2) からの摂動計算).

$$\underline{P} = D_y^{-1} \{ D_{t_1}^2 + D_{t_2}^2 - (t_1^2 + t_2^2) D_y^2 - 6D_y + (a_1 t_1^2 + a_2 t_2^2 + 2b\, t_1 t_2) D_y \}$$

at $(0;dy) \in T^*(\mathbb{R}^3_{t,y})$, を考える.

$$\hat P = \hat P_0 + \hat P_2 = (|\hat D|^2 + |\hat t|^2 - 6) + |\eta|^{-1} (a_1 \hat t_1^2 + a_2 \hat t_2^2 + 2b\, \hat t_1 \hat t_2)$$

$$\hat H_{+0} = \hat H_{-0} = \bigoplus_{|\alpha|=2} |\hat h_\alpha\rangle = (\hat h_{(2,0)}, \hat h_{(1,1)}, \hat h_{(0,2)}) : \mathbb{C}^3 \to \mathcal{S}_t .$$

$\therefore \hat M_0 = \hat M_1 = 0$

$$|\eta|\hat{M}_2(\eta) = -\sum_{j=1}^{2} a_j \langle \hat{h}_{\alpha_1} | \hat{t}_j^2 | \hat{h}_{\alpha_2} \rangle - 2b \langle \hat{h}_{\alpha_1} | \hat{t}_1 \hat{t}_2 | \hat{h}_{\alpha_2} \rangle$$

$(|\alpha_1| = |\alpha_2| = 2)$

$$= -a_1 \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - a_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} - 2b \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

となる.

$$\det(|\eta|\hat{M}_2) = -\frac{3}{8}(a_1+a_2)(5a_1+a_2)(a_1+5a_2) + 6(a_1+a_2)b^2$$

だから. 次の十分条件を得る:

$a_1 + a_2 \neq 0$. かつ $5(a_1+a_2)^2 + 16(a_1 a_2 - b^2) \neq 0$

$\Longrightarrow$ P は $(0.dy)$ で A-m.h.e

以下は結果のみを書く.

例 (6.4) $P = D_{y_2}^{-1}\{D_t^2 + t^2 D_{y_2}^2 - (1+iy_1)D_{y_2} - D_{y_1}\}$ at $(0; dy_2)$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \left(\frac{\eta_2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}\eta_2} \qquad (\eta_2 > 0)$$

$$\hat{M} = \hat{M}_0 + \hat{M}_2 + \cdots, \quad \hat{M}_0 = \eta_2^{-1}(\eta_1 + iy_1\eta_2)$$

よって

(1) P は $(0.dy_2)$ で A-m.h.e.

(2) $\mathrm{Coker}(P) \simeq \mathrm{Coker}(M) \simeq \mathcal{C}^f_{\mathbb{R}_{y_2},(0.dy_2)}$

例 (6.5) $P = D_{y_2}^{-1}\{D_t^2 + t^2|D_y|^2 - (1 - \frac{1}{2}y_1^2)D_{y_2} - c\}$ at $(0; dy_2)$

$$\hat{H}_{+0} = \hat{H}_{-0} = \left(\frac{|\eta|}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{t^2}{2}|\eta|}$$

$$\hat{M}_0 = -\eta_2^{-1}(|\eta| - \eta_2) - \frac{1}{2}y_1^2 = -\frac{1}{2}\left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2 - y_1^2\right) + O\left(\left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^4\right)$$

$$\hat{M}_1 = 0$$

$$\hat{M}_2 = -\eta_2^{-1}\left(c + O\left(y_1^2 + \left(\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)^2\right)\right)$$

$$\vdots$$

すなわち．　$\hat{M}(\eta) \fallingdotseq -\frac{1}{2}\eta_2^{-2}(\eta_1^2 + y_1^2\eta_2^2 - 2c\eta_2)$

ゆえに

$c \notin \{j+\frac{1}{2} ; j=0,1,2,\cdots\} \Rightarrow P$ は $(0, dy_2)$ で A-m.h.e.

文献

[1] Grigis, A. - Rothschild, L. : Ann. Math 118(1983) 443-460

[2] Grušin, V.V. : Math. USSR Sb. 13(1971) 155-185

[3] Kashiwara, M. - Kawai, T. - Oshima, T. : Proc. Japan Acad. 50(1974) 549-550

[4] Kato, T. : Perturbation Theory for Linear Operators (Springer)

[5] Melin, A. : Comm. P.D.E. 6(1981) 1363-1405

[6] Métivier, G : Comm. P.D.E. 6(1981) 1-90

[7] Ōkaji, T. : J. Math. Kyoto Univ. 25(1985) 489-514

[8] Stein, E.M. : Inv. Math 69(1982) 209-216