数理解析研究所講究録
第757巻 1991年 165-174

A calculus approach to hyperfunctions

名大理学部　松澤 忠人
(Tadato Matsuzawa)

$K \subset \mathbb{R}^n$ をコムパクト集合とするとき K に support をもつ解析的汎関数の空間を $A'[K]$ とかこう。即ち $u \in A'[K]$ とは $\mathbb{C}^n$ 上の整関数の空間 $A = A(\mathbb{C}^n)$ 上の線型汎関数であって、任意の複素近傍 $\omega \supset K$ に対して

(1) $\quad |u(\varphi)| \leqq C_\omega \sup_\omega |\varphi|, \quad \varphi \in A$

の形の評価式が成り立つものをいう。n-次元熱核を

$$E(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[\frac{-x^2}{4t}\right], \quad t>0, \quad x \in R^n$$

とかこう。すると $u \in A'[K]$ に対して、

$$U(x,t) \equiv u_y(E(x-y,t)) \in C^\infty(R^{n+1}_+),$$

$$R^{n+1}_+ = \{(x,t) \in R^{n+1};\ t>0\}.$$

定理 1. (cf. [2]) $u \in A'[K]$ とすると

(i) $\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) U(x,t) = 0$ in R^{n+1}_+;

(ii) $|U(x,t)| \leqq C_\varepsilon \exp\left[\frac{\varepsilon - \mathrm{dis}(x,K)^2}{4t}\right]$ in R^{n+1}_+, $\varepsilon > 0$;

(iii) $\int_{R^n} U(x,t)\chi(x)\varphi(x)dx \longrightarrow u(\varphi)$ as $t \to 0_+$, $\varphi \in A$,

$\chi \in C_0^\infty(R^n)$, $\chi \equiv 1$ in a nbd of K.

逆にある $U(x,t) \in C^\infty(R^{n+1}_+)$ が条件 (i) と (ii) をみたすならば、一意的に $u \in A'[K]$ が存在して

$$U(x,t) = u_y(E(x-y,t)), \quad (x,t) \in R^{n+1}_+$$

の形に表わされる。

この定理は [2] で証明された。

次に $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とする。この時

$$\mathcal{B}(\Omega) = A'[\bar{\Omega}] / A'[\partial\Omega]$$

のように定義する。

$\mathcal{B}(R^n)$ の定義を与えよう。$\Omega_j \subset R^n$ は有界開集合で $\bigcup_{j=1}^{n} \Omega_j = R^n$ となっているとする。このとき $u_j \in A'[\overline{\Omega}_j]$, $j=1,2,\cdots,$ であって

(2) $$u_j = u_k \quad \text{on } \Omega_j \quad \text{if} \quad 1 \leqq j < k < \infty$$

なる条件をみたす列 $u \equiv \{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ の集合を $\mathcal{B}(R^n)$ と定義する。この定義が上記のような $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ のとり方に関係しないことは [2], Theorem 2.4 によって保証される。

$\mathcal{B}(R^n)$ の元に対しても熱方程式の解の族が対応することを示そう。そのために次の定義をおこう。即ち $U(x,t) \in C^\infty(R^{n+1}_+)$ が "locally infra-exponential solution of the heat equation" であるとは、$\forall K \subset\subset R^n$ と $\forall \varepsilon > 0$ に対して

(3) $$|U(x,t)| \leqq C_{\varepsilon,K}\, e^{\frac{\varepsilon}{t}} \quad , x \in K,\ t > 0$$

の形の評価式をみたし

(4) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) U(x,t) = 0 \quad \text{in } R^{n+1}_+$$

をみたすこととしよう。

<u>定理</u>2. (a) $U(x,t)$: infra-exponential sol. $\Rightarrow$ $\exists!\, u \in \mathcal{B}(R^n)$ s.t.

(5) $U(\cdot,t) \to u$ as $t \to 0_+$.

(5)の意味は $u=\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ として u_j の defining function を $U_j(x,t)$ とするとき 各 j に対して

(6) $U(x,t) - U_j(x,t) \rightrightarrows 0$ in Ω_j as $t \to 0_+$

が成り立つこととする。

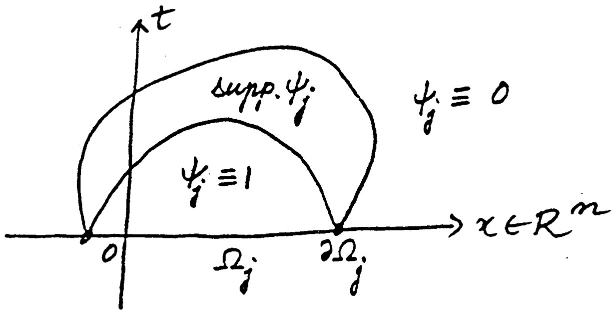
(b) 逆に $\forall u \in \mathcal{B}(R^n)$ に対してある infra-exponential sol. $U(x,t)$ が存在して (6)の意味で

$U(\cdot,t) \to u$ as $t \to 0_+$.

(この場合 $u \to U$ の対応は一意的ではない。熱方程式の Cauchy 問題には null solution が存在するからである。)

(証明) (a) 定理1の必要条件の証明 ([2], Theorem 1.2) とほぼ同じなので概略をかこう。

$\psi_j(x,t) \in C^\infty(R^{n+1}_+)$, $j=1,2,\dots$, は $0 \leqq \psi_j(x,t) \leqq 1$ でその support が下図のようなものが存在する: (cf. Hörmander Vol. I.)



条件 (3) から

$$\widetilde{\psi_j U} = \begin{cases} \psi_j U & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

なる ultradistribution $\widetilde{\psi_j U} \in \mathcal{D}^{\{s\}'}(R^{n+1})$ が存在する。

これに熱作用素を施したものを $\tilde{F}_j \in \mathcal{D}^{\{s\}'}(R^{n+1})$ とおこう。

i.e.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right) \widetilde{\psi_j U}(x,t) = \tilde{F}_j(x,t) \in \mathcal{E}^{\{s\}'}(R^{n+1}).$$

次に

$$\tilde{V}_j = E * \tilde{F}_j \in \mathcal{D}^{\{s\}'}(R^{n+1})$$

とおく。

$$\tilde{U}_j(x,t) = \widetilde{\psi_j U}(x,t) - \tilde{V}_j(x,t)$$

とおくと

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)\tilde{U}_j(x,t) = 0 \qquad \text{in } R^{n+1}_+$$

かつ $\tilde{U}_j$ は infra-exponential function で、

(*) $\qquad \tilde{U}_j(\cdot,t) \rightrightarrows 0 \quad \text{as } t \to 0_+ \quad \text{in } C\bar{\Omega}_j$

なることが分る。従って定理1により

$$\tilde{U}_j(\cdot,t) \longrightarrow {}^{\exists}u_j \in A'[\bar{\Omega}_j] \quad , j=1,2,\cdots .$$

この $\{u_j\}$ によって定まる hyperfunction $u = \{u_j\}$ が求めるものである。

(b). $\Omega_j \nearrow R^n$, $\quad u_j \in A'(\bar{\Omega}_j)$ s.t. $u_j = u_k$ on Ω_j if $1 \leq j < k < \infty$, なる $\{u_j\}_{j=1}^{\infty}$ が与えられたとき ある infra-exponential solution $U(x,t)$ が存在して

$$U(\cdot,t) \longrightarrow u \qquad \text{as } t \to 0_+ \quad (\text{上記(*)の条件})$$

なることを示す。

以下では簡単のため $n=1$ の場合について説明しよう。

$$\Omega_j = \{ |x| < r_j \equiv \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{i} \} \quad , j=1,\cdots,$$

は R^1 の開区間で $\Omega_j \nearrow R^1$ as $j \to \infty$ である。

この場合について証明すれば充分である。(cf. [2], Th. 4.3.)

$u_j \in A'[\bar{\Omega}_j]$, $j=1,\cdots,$ に対してその defining function を

$$U_j(x,t) = u_{jy}(E(x-y,t)) \quad , j=1,\cdots,$$

とおく。もし

$$\lim_{j\to\infty} U_j(x,t) = U(x,t) \qquad \text{in } R^{n+1}_+$$

が存在すれば証明は終りだが一般にこの lim は発散する。そこで各 j 毎に補助関数 $V_j(x,t)$ を構成して

$$\lim_{j\to\infty} (U_j(x,t) - V_j(x,t)) = U(x,t)$$

が存在するようにしたい:

◎ $V_j(x,t)$ に対する要請.

(7) $\quad (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta) V_j(x,t) = 0 \qquad \text{in } R^{n+1}_+ ;$

(8) $\quad V_j \rightrightarrows 0 \quad \text{in } \complement \Omega_j \quad \text{as } t \to 0 \quad , j=1,2,\cdots,$

(9) $\quad |U_{j+1} - U_j + V_j - V_{j+1}| \leqq C\, 2^{-j} e^{\frac{\varepsilon_j}{t}} \quad , t>0,$

$\qquad \varepsilon_j \downarrow 0$ as $j \to \infty$.

$\forall R>0$ に対して $\exists j_R$, $\exists C_R$ s.t.

(10) $$j \geqq j_R \Rightarrow |U_{j+1}-U_j+V_j-V_{j+1}| \leqq C_R\, 2^{-j} \exp[-C_R/t],$$

$$t>0,\quad |x| \leqq R.$$

これ等の4条件をみたす $V_j(x,t)$ を構成すればよい。

∵ 例えば (9) より

$$\lim_{j\to\infty}(U_j-V_j) = U_j - V_j + \sum_{k=j}^{\infty}(U_{k+1}-U_k+V_k-V_{k+1})$$

が存在する。他は省略する。以下では $V_1(x,t)\equiv 0$ とする。

さて $V_j(\cdot,t) \Longrightarrow v_j \in A'[\partial\Omega_j]$, $j=1,2,\cdots$, とし

$$u_{j+1}-u_j+v_j \equiv g_j \in A'[\bar{\Omega}_{j+1}]$$

とおくと

$$\mathrm{supp.}\, g_j \subset [-r_{j+1},-r_j] \cup [r_j, r_{j+1}]$$

であり

(**) $$U_{j+1}-U_j+V_j = \int E(x-y,t)\, g_j(y)\, dy$$

と表わされる。ここで積分記号は超関数の意味である。

更に簡単のため $\mathrm{supp}\, g_j \subset [r_j, r_{j+1}]$ と仮定しよう。

$E(x-y,t)$ を $y=r_{j+1}$ のまわりで Taylor 展開することにより (**) の右辺は

$$\sum_{\alpha\geqq 0}\frac{1}{\alpha!}E^{(\alpha)}(x-r_{j+1},t)\int(r_{j+1}-y)^{\alpha}g_j(y)dy$$

に等しい。そこで N を後できめる large number として

$$V_{j+1}(x,t)=\sum_{0\leqq\alpha\leqq N}\frac{1}{\alpha!}E^{(\alpha)}(x-r_{j+1},t)\int(r_{j+1}-y)^{\alpha}g_j(y)dy$$

とおくと [3], Prop. 1.1 による $E(x,t)$ の導関数の評価が適用できて、又 (1) も適用して

$$|U_{j+1}-U_j+V_j-V_{j+1}|$$

$$\leqq \left|\sum_{\alpha\geqq N+1}\frac{1}{\alpha!}E^{(\alpha)}(x-r_{j+1},t)\right|\left|\int(r_{j+1}-y)^{\alpha}g_j(y)dy\right|$$

$$\leqq C_j C\sum_{\alpha\geqq N+1}C^{\alpha}t^{\frac{-(1+\alpha)}{2}}\alpha!^{\frac{1}{2}}\exp[-(x-r_{j+1})^2/8t]\cdot\left(\frac{2}{j}\right)^{\alpha}$$

$$\leqq C_j' t^{\frac{-1}{2}}\exp\left[\frac{\varepsilon}{t}\right]\exp\left[\frac{-(x-r_{j+1})^2}{8t}\right]\sum_{\alpha\geqq N+1}\left(\frac{2C}{j\sqrt{\varepsilon}}\right)^{\alpha},\quad \varepsilon>0.$$

ここで $\varepsilon=\varepsilon_j=(4C/j)^2$ とおくと

$$\leqq {}^{\exists}C_j\, t^{\frac{-1}{2}}\exp\left[\frac{-(x-r_{j+1})^2}{8t}\right]\cdot\underbrace{\sum_{\alpha\geqq N+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}}_{=\left(\frac{1}{2}\right)^{N}}\cdot\exp\left[\frac{\varepsilon_j}{t}\right]$$

ここで各j毎にNを充分大きくとれば(9)が得られる。(7),(8),(10)も容易に分る。これで定理2の証明の概略の説明を終る。

Microlocal analysisに関しては論文Ⅲに詳しく書いたのでここでは省略する。

References

[1] Hörmander, L: Springer Verlag (1983, Vol. I.

[2] Matsuzawa, T: A calculus approach to hyperfunctions I, Nagoya Math. J. Vol. 108 (1987), 53-66.

[3] Matsuzawa, T; 同 Ⅱ, to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[4] Matsuzawa, T; 同 Ⅲ, Preprint.