数理解析研究所講究録
第 758 巻 1991 年 49-63

ESSENTIAL COMPONENT OF THE FIXED POINT SET について

関西学院大・理　　米沢　康 (Yasushi Yonezawa)

fixed point property(f.p.p.)を持つ continuum に対し，不動点集合の本質的成分，及び f* p.p.の概念を導入する([2],[6],[7],[8]).

定義 0.1　X を continuum とするとき，連続写像 f: X→X の不動点集合の成分 C が以下の条件を満たすならば，C は f の不動点集合の本質的成分(essential component of the fixed point set)であるという.
「任意の開集合U⊃Cに対し，ある $\delta>0$が存在して $|f'-f|<\delta$ [1)]
となる任意の連続写像 f′: X→X は，U の中に不動点を持つ」
注1). $|f'-f| = \sup_{x\in X} d(f'(x), f(x))$.

定義 0.2　X を continuum とするとき，任意の連続写像 f : X→X が不動点集合の本質的成分を持つならば，X は f* p.p.を持つという.

f* p.p.は，f.p.p.を持つ continuum に対してのみ定義される概念であり，ここで扱う空間はすべて f.p.p.を持つことを仮定する.
なお，写像はすべて連続とし，空間は separable metric を仮定する.

I. f* p.p.についての基本的な性質

定理1.1　continuum X が convex[2)]で f.p.p.を持つならば，X は f* p.p.を持つ.
注 2). linear space を仮定する.

系1.2 Hirbert cube I^{∞} は f^* p.p.を持つ[2].

定理1.3 continuum X が f^* p.p.を持つならば, X の retract も f^* p.p.を持つ[2].

系1.4 absolute retract (AR) は f^* p.p.を持つ[2].

例1.5 n次元球体B^n (線分, 円板 etc.) は f^* p.p.を持つ.

定理1.6 2つの continuum X, Y が1点のみを共有し, 各々 f^* p.p.を持つならば, X∪Y も f^* p.p.を持つ([1],[6]).

問題 「f.p.p.を持つが f^* p.p.を持たない空間が存在するか?」[2]

に対して, 次の様な肯定的な解答が得られた[7].

II. f.p.p. を持つが f^* p.p.を持たない空間

1. not locally connected continuum の例

定理 2.1 Y_1 を以下に構成される continuum とする.

(1) X は f.p.p.を持つ continuum.

(2) 1点 $p \in X$ と, ある $f: X \to X$ が存在して $f(p)=p$, pを含む不動点集合の成分は本質的でないと仮定する.

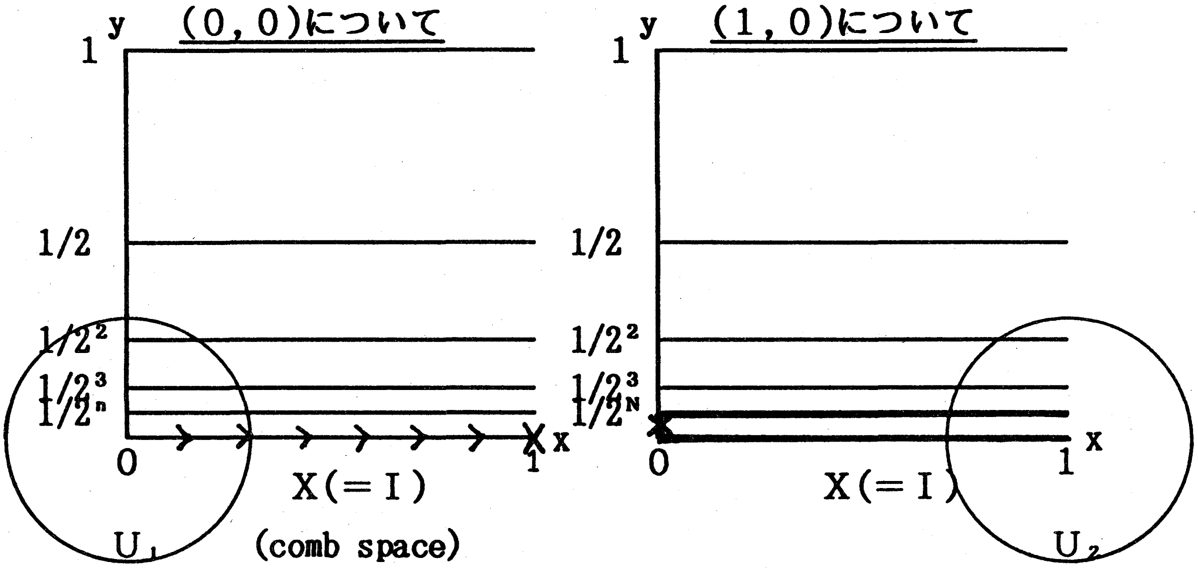
(3) Iを線分[0,1] として, $Y_1 \subset X \times I$ を次の様に定義する.

$$Y_1=(\{p\}\times I) \cup (X\times\{0\}) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty}(X\times\{1/2^n\}).$$

このとき, Y_1 は f.p.p.を持つが f^* p.p.を持たない.

ここでは, X=Iとした場合(comb space)の証明を与えるが, 一般の場合にも容易に拡張できる[7].

<u>証明</u>(X＝Ｉの場合)．　$f(x, y)=(\sqrt{x}, 0)$ は２つの不動点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ を持つが，いずれも本質的でないことを示す．それぞれの不動点の 1/3近傍をU_1，U_2 とする．



<u>(0，0)について</u>

任意の$\delta>0$に対して，

$$f'(x, y)=((1-\delta/2)\sqrt{x}+\delta/2,\ 0)$$

とすれば，$|f'-f|<\delta$ かつ，f' は U_1 の中に不動点を持たない．

<u>(1，0)について</u>

任意の$\delta>0$に対して，$1/2^N<\delta$ を満たす１つの自然数 N をとる．

$$f_N(x, y)=\begin{cases}(\sqrt{x},\ 1/2^N), & y\leqq 1/2^{N+1}\\ (\sqrt{x},\ 0), & y\geqq 1/2^N\\ (0,\ 1/2^{N-1}-2y), & 1/2^{N+1}<y<1/2^N\end{cases}$$

とすれば，$|f_N-f|<\delta$ かつ，f_N は U_2 の中に不動点を持たない(f_N は点$(0, 1/3\cdot 2^{N-1})$ に，ただ１つの不動点を持つ)．

<u>定理 2.2</u>　定理 2.1 の Y_1 において，線分Ｉを１点 P に縮めた空間 Y_2 も f^* p.p.を持たない[7]．

次の定理は，さらに別のタイプの例を与えるものである．

<u>定理 2.3</u>　Y_3 を以下に構成される continuum とする．

(1) X は f.p.p.を持つ continuum.

(2) 2点 p, q∈X (p≠q) と，ある f: X→X が存在して，
f(p)=p, f(q)=q, pとqとは不動点集合の異なる成分に属すると仮定する．

(3) Iを線分 [0,1] として，$Y_3 \subset X \times I$ を次の様に定義する．

$$Y_3=(X\times\{0\})\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}(X\times\{1/2^n\})\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}(\{p\}\times[1/2^{2n},1/2^{2n+1}])$$
$$\cup\bigcup_{n=0}^{\infty}(\{q\}\times[1/2^{2n+1},1/2^{2(n+1)}]).$$

このとき，Y_3 は f.p.p.を持つが f* p.p.を持たない[7].

<u>補題 2.4</u> (Borsuk)　X を以下に構成される continuum とする．

(1) X_n(n=1,2･･･) は f.p.p.を持つ continuum.

(2) $X_n \subset X$ (n=1,2･･･).

(3) 任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある f_n: $X\to X_n$ が存在して
$$|f_n(x)-x|<\varepsilon.$$

このとき，X は f.p.p.を持つ([1],[4] p.343).

<u>注意 2.5</u>　Y_1, Y_2, Y_3 が f.p.p.を持つことは，Borsuk の補題によって証明できる．このことから，Borsuk の補題は f* p.p.には拡張できないことがわかる．

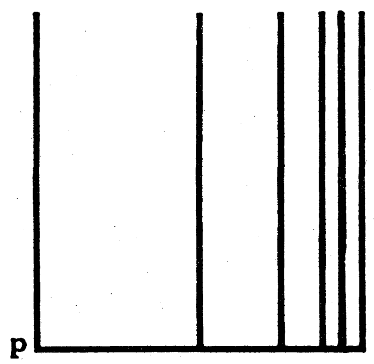
<u>定理 2.6</u>　Polish circle(Warsaw circle) は f.p.p.を持つが f* p.p.を持たない[7].

f.p.p. を持つが f* p.p.を持たない空間

(not locally connected continuum の例)

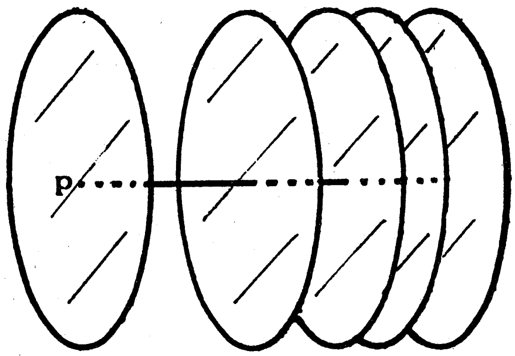
定理 2.1の例

X＝I



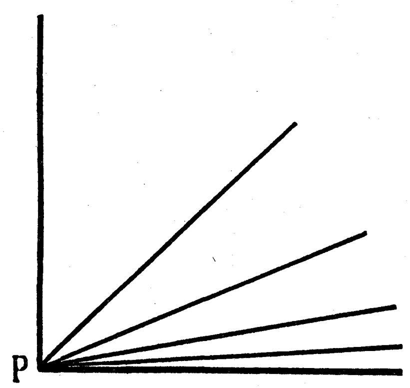
comb space

X＝D (2-disk)

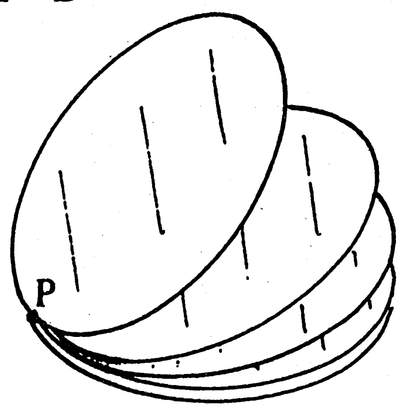


定理 2.2の例

X＝I

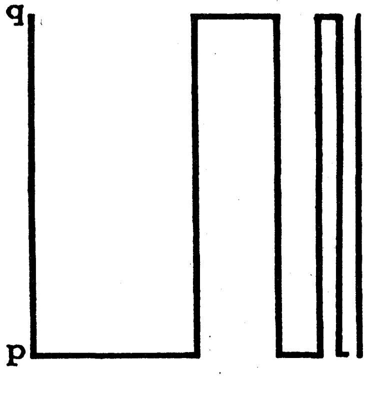


X＝D

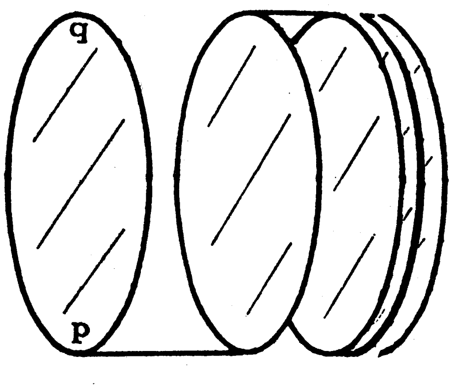


定理 2.3の例

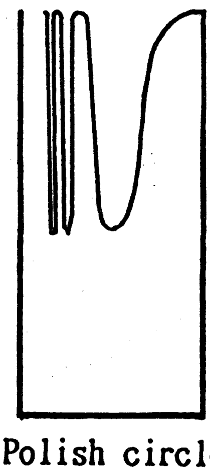
X＝I



X＝D



定理 2.6



Polish circle

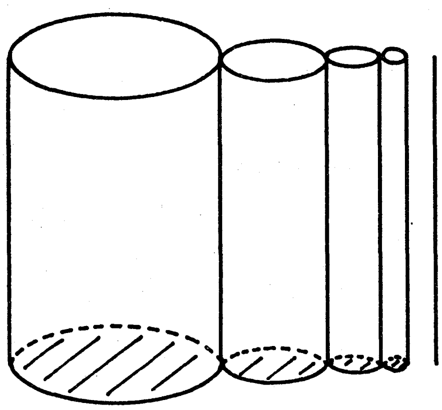
2．locally connected continuum の例

<u>定理 2.7</u>　Y_4 を以下に定義される R^3 内の continuum とする．
円板 $B_n = \{x \mid (x-1/2^n)^2 + y^2 \leq (1/3\cdot 2^n)^2\}$ とし，

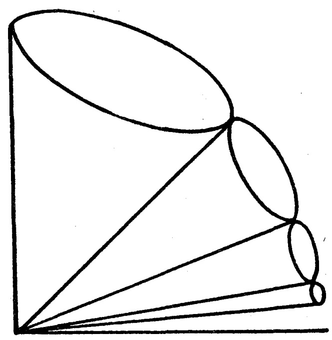
$$Y_4 = (\{(0,0)\}\times I) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} \partial B_n \times I) \cup (\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \times \{0\}).$$

このとき，Y_4 は f.p.p. を持つが f*. p.p. を持たない．

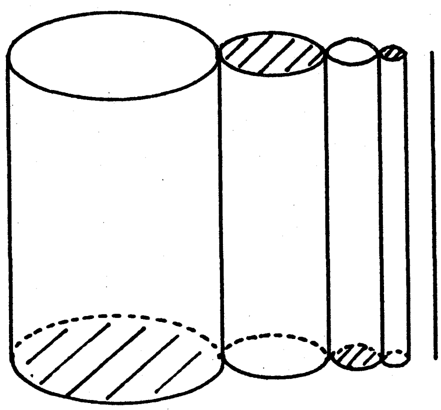
これは，定理 2.1 に対応する locally connected continuum の例[a]となっている．また，定理 2.2，定理 2.3 に対応する同様の例[b],[c]も構成することができる．他にも，下に示すような例[d] が存在する．



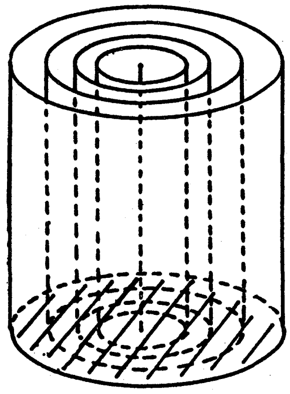
[a]Y_4



[b]



[c]



[d]

Ⅲ. f^* p.p.を持つ空間(1)

not locally connected continuum で f^* p.p.を持つ空間の例をあげる.

<u>定理 3.1</u>　Z を以下に定義される R^2 内の continuum とする.
極座標を用いて,

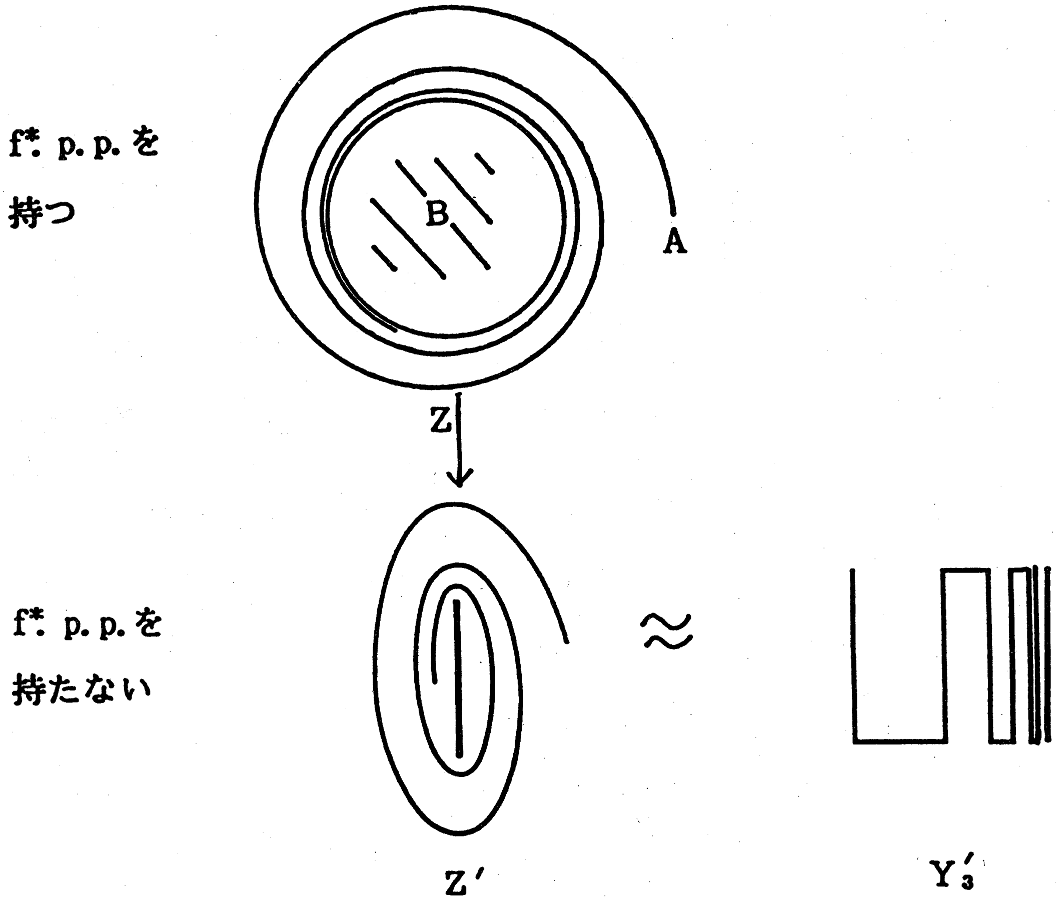
$$A=\{(r,\theta)\mid r=2\pi/\theta+1,\ \theta\geqq 2\pi\},$$

$$B=\{(r,\theta)\mid r\leqq 1\}$$ とする.

$Z=A\cup B$ は f^* p.p.を持つ[7].

<u>注意 3.2</u>　Z の上に作った cone は, f.p.p. を持たない[3].

<u>注意 3.3</u>　Z の円板の部分Bを線分Ｉに縮めた空間 Z' は, 定理 2.3 において X＝Ｉとした空間 Y_3' に homeomorphic であるから, f^* p.p. を持たないことがわかる.



Ⅳ. f* p.p.を持つ空間(2)

この章では，定理 1.6 の空間の個数を可算無限個に拡張した場合の定理について述べる．この定理によって，f* p.p.を持つ空間について fractal を含む興味ある新しい例が得られる．一般に，空間が locally connected の場合，ある性質のこの様な拡張性は cyclic extensibility と呼ばれる．

注）以下，Bdry X，Int X，diam(X) は，それぞれ X の境界，X の内部，X の diameter を表す．

<u>定義 4.1</u> separable metric space X の部分集合 A が <u>A-set</u> であるとは，$X - A = \bigcup_i G_i$ として，G_i が以下の条件を満たすときにいう[5].

(1) G_i は open.

(2) $G_i \cap G_j = \phi$ $(i \neq j)$.

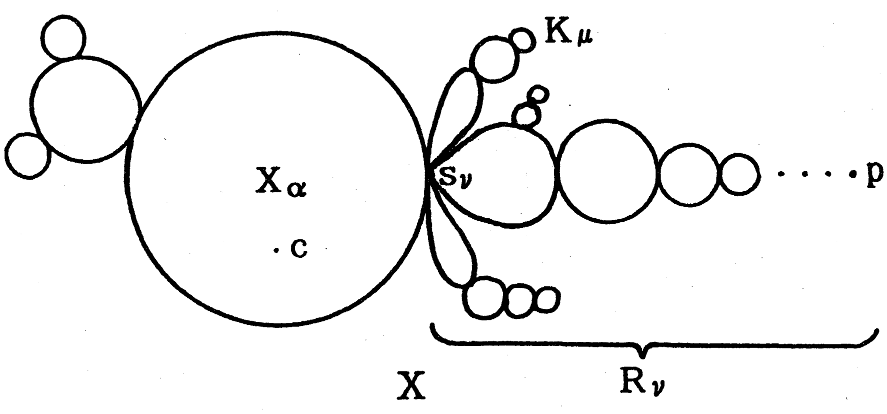
(3) Bdry G_i はたかだか 1 点.

(4) $\lim_{i \to \infty} \mathrm{diam}(G_i) = 0$.

<u>定義 4.2</u> continuum X のある点 s と subcontinua A，B が，次の条件を満たすならば，<u>s は X を A と B に separate する</u>といい，s を X の <u>separating point</u> という.

(1) $A \cup B = X$.

(2) $A \cap B = \{s\}$.



<u>主定理 4.3</u>　X を continuum, $\{X_\alpha\}$ を次の条件を満たす X の subcontinuum の族とする. 但し, s_ν は X の separating point とする.

(1) $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$.

(2) $\alpha \neq \beta$ のとき $X_\alpha \cap X_\beta = \phi$ または s_ν.

(3) X_α は X の A-set.

このとき, 各々の X_α が f^* p.p. を持てば, X も f^* p.p. を持つ.

<u>定義 4.4</u>　Y を locally connected continuum, $\{Y_\alpha\}$ を次の条件を満たす Y の subcontinuum の族とする. 但し, s_ν は Y の separating point とする.

(1) $Y = \bigcup_\alpha Y_\alpha$.

(2) $\alpha \neq \beta$ のとき $Y_\alpha \cap Y_\beta = \phi$ または s_ν.

(3) Y_α は Y の A-set.

(4) 各々の Y_α の内部に separating point は含まれない.

このとき「各々の Y_α が 性質 P を持てば Y も性質 P を持つ」ならば, 性質 P は <u>cyclic extensible</u> であるといい, Y_α を Y の <u>cyclic element</u> という([4],[5]).

<u>定理 4.5</u> (Borsuk)　f.p.p. は cyclic extensible である([1],[5]).

主定理 4.3 より, ただちに次の系が得られる.

<u>系 4.6</u>　f^* p.p. は cyclic extensible である.

以下, 主定理の証明に必要な定義と補題を述べる(証明の詳細については, [8]を見よ). まず, 定理 4.5 は X に対して容易に拡張できて, 次の補題を得る.

<u>補題 4.7</u>　X は f.p.p.を持つ.

<u>定義 4.8</u>　X の点 p が <u>endpoint</u> であるとは，boundary が1点である様な十分小さい p の近傍が存在することである[5].

<u>定義 4.9</u>　X の2点 x, y について，点 $c \in X$ に関する partial order(半順序)を次の様に定義する.

1. $x, y \in X$ が，次の2つの条件のいずれかを満たすとき，$x \underset{c}{=} y$ とする.

(1) x, y は，同じ X_α の内部に含まれる.

(2) x, y は，同じ separating point,または endpoint である.

2. $x, y \in X$ が，$x \underset{c}{\neq} y$ かつ次の2つの条件を満たすとき，$x \underset{c}{>} y$ とする.

(1) X は，x を含む subcontinuum A，y と c を含む subcontinuum B に separate される.

(2) $y \underset{c}{=} c$ または，X は，x と c を含む subcontinuum A′，y を含む subcontinuum B′ に separate されない.

<u>定義 4.10</u>　X の異なる2点 a, b を含む，X のすべての A-set の交わりを <u>a から b への cyclic chain</u> といい，<u>C(a, b)</u> で表す[5].

<u>定義 4.11</u>　subspace 及び retraction を次の様に定義する.

$R_{\nu(c)}$: $\{x \mid x \underset{c}{\geqq} s_\nu\}$

$K_{\mu(\nu)}$: $X - s_\nu$ の1つの成分の閉包

$$r_{\nu(c)}(x) = \begin{cases} x, & x \in R_{\nu(c)} \\ s_\nu, & x \in X - R_{\nu(c)} \end{cases}$$

$$r_{\mu(\nu)}(x) = \begin{cases} x, & x \in K_{\mu(\nu)} \\ s_\nu, & x \in X - K_{\mu(\nu)} \end{cases}$$

$$r_\alpha(x) = \begin{cases} x, & x \in X_\alpha \\ s_\nu, & x \in R_{\nu(c)} \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{但し，} s_\nu \in X_\alpha,\ c \in \mathrm{Int}\ X_\alpha \text{ とし} \\ \overline{X - X_\alpha} = \bigcup_\nu R_{\nu(c)} \text{ に注意せよ.} \end{array}\right)$$

注意.（c),（ν)は，前後関係から明らかな場合は省略する.

補題 4.12 $K_{\mu(\nu)}$ の boundary s_ν が，いかなる $X_\beta \subset K_{\mu(\nu)}$ にも含まれないならば，s_ν は $K_{\mu(\nu)}$ の endpoint である[5].

補題 4.13 $f: X \to X$ の不動点集合の成分のうち $C_\gamma \subset \mathrm{Int}\ X_\alpha$ となるものを C_γ とする．C_γ が $f: X \to X$ の本質的成分でないならば，C_γ は $r_\alpha f\,|_{X_\alpha}: X_\alpha \to X_\alpha$ の本質的成分でない．

補題 4.14 $f: X \to X$ の不動点集合の成分のうち $C_\gamma \cap \mathrm{Bdry}\ X_\alpha \neq \phi$ となるものを C_γ とする．C_γ に対し開集合 $U_\gamma \supset C_\gamma$ が存在して，任意の n に対し次の条件を満たす $f_n: X \to X$ が存在するならば，$C_\gamma \cap X_\alpha$ は $r_\alpha f\,|_{X_\alpha}: X_\alpha \to X_\alpha$ の本質的成分でない．

(i) $|f_n - f| < 1/n$.

(ii) f_n は U_γ の中に不動点を持たない．

(iii) $x \in \mathrm{Int}\ X_\alpha$ として，任意の $s_\nu \in U_\gamma$ に対し $f_n(s_\nu) \underset{X}{\not>} s_\nu$.

補題 4.15 p を X の endpoint とし，$f(p)=p$とする．X の1点を $c(\neq p)$ とし，cyclic chain $C(p, c)$ 上の separating point を s_ν とするとき，任意の $U(p)$ の中に $f(s_\nu) \underset{C}{>} s_\nu$ となる s_ν が存在するならば，不動点集合の，p を含む成分 C は本質的である．

証明 p を含む成分 C が本質的でないと仮定する．C に対し開集合 $U \supset C$ が存在して，任意の δ に対し f' が存在して，

(i) $|f' - f| < \delta$.

(ii) f' は U の中に不動点を持たない．

U の中に，その boundary が 1 点 s_ν，かつ $f(s_\nu) \underset{C}{>} s_\nu$ となる様な $U(p)$ が存在する．$d(s_\nu, f(s_\nu))=a$ とし，$\delta = a/2$ とおく．(i)より

$f'(s_\nu)\underset{C}{>}s_\nu$. f' は R_ν の中に不動点を持たないから, $r_\nu f'|_{R_\nu}$: $R_\nu \to R_\nu$ は不動点を持たない. これは R_ν が f.p.p.を持つことに反す.

補題 4.16　p を X の endpoint とし, $f(p)=p$とする. X の1点を $c(\neq p)$ とし, cyclic chain $C(p,c)$ 上の separating point を s_ν とするとき, 任意の $U(p)$ の中に s_ν を含む成分 C_ν が本質的でないものが存在して次の条件を満たすとする. C_ν に対し開集合 $U_\nu \supset C_\nu$ が存在して, 任意の n に対し f_n が存在して,

(i) $|f_n - f| < 1/n$.

(ii) f_n は U_ν の中に不動点を持たない.

(iii) $f_n(s_\nu)\underset{C}{>}s_\nu$.

このとき, 不動点集合の, p を含む成分 C は本質的である.

証明　p を含む成分 C が本質的でないと仮定する. C に対し開集合 $U \supset C$ が存在して, 任意の n に対し f'_n が存在して,

(i) $|f'_n - f| < 1/n$.

(ii) f'_n は U の中に不動点を持たない.

p は endpoint であるから, s_ν と X_α $(\ni s_\nu)$が存在して, 次を満たす.

(i) s_ν, X_α は, cyclic chain $C(p,c)$ に含まれる.

(ii) R_ν は U に含まれる.

s_ν 以外の X_α の separating point を $s_{\nu'}$とする. $x \in \mathrm{Int}\ X_\alpha$ として $f'_n(s_{\nu'})\underset{X}{>}s_{\nu'}$ であれば, $r_{\nu'} f'_n|_{R_{\nu'}}$: $R_{\nu'} \to R_{\nu'}$ は不動点を持たないが, これは $R_{\nu'}$が f.p.p. を持つことに反すから $f'_n(s_{\nu'})\underset{X}{\ngtr}s_{\nu'}$でなければならない. 一方, 仮定(iii)より $f_n(s_\nu)\underset{X}{\ngtr}s_\nu$ ($x\underset{C}{>}s_\nu$ に注意). ゆえに, 補題 4.13, 補題 4.14より, X_α は f^* p.p. を持たないことになり矛盾.

<u>注意 4.17</u>　K_μ の endpoint s_ν に対しても，補題 4.15，補題 4.16 と同様のことが成り立つ．

<u>補題 4.18</u>　C_γ を s_ν を含む f の不動点集合の成分とする．C_γ が本質的成分でなければ，ある K_μ が存在して，$C_\gamma \cap K_\mu$ は $r_\mu f|_{K_\mu}: K_\mu \to K_\mu$ の本質的成分でない．

以上の補題を用いて，主定理 4.3 の証明を行なう．

<u>主定理 4.3 の証明</u>

$f: X \to X$ が不動点集合の本質的成分を持たないと仮定する．対応 $F: \{s_\nu\} \to X$ を次の様に定義する．

Case 1. $f(s_\nu) \neq s_\nu$.　この場合には $F(s_\nu) = f(s_\nu)$ とせよ．

Case 2. $f(s_\nu) = s_\nu$.　この場合には 補題 4.18 より，s_ν を含む不動点集合の成分 C_γ に対し，ある K_μ が存在して，$C_\gamma \cap K_\mu$ は，$r_\mu f|_{K_\mu}: K_\mu \to K_\mu$　の本質的成分でない．K_μ の内部に 1点 k_μ をとり，$F(s_\nu) = k_\mu$ とせよ．

証明は次の2つの場合に分かれる．$x \in \mathrm{Int}\ X_\alpha$ として，

Case 1. ある X_α が存在して，すべての $s_\nu \in X_\alpha$ に対して

$$F(s_\nu) \underset{x}{\not>} s_\nu \text{ となる場合.}$$

補題 4.13，補題 4.14 より X_α が f^* p.p. を持たないことになり矛盾．

Case 2. 任意の X_α に対して $F(s_\nu) \underset{X}{>} s_\nu$ となる $s_\nu \in X_\alpha$ が存在する場合.

ある X_{α_0} に対する s_{μ_0} から初めて，次の条件を満たす separating point の順序集合 $\{s_\mu\}$ $(\subset \{s_\nu\})$ を構成できる．この X_{α_0} の内部の1点を c として，

(1) すべての μ に対して $F(s_\mu) \underset{c}{>} s_\mu$.

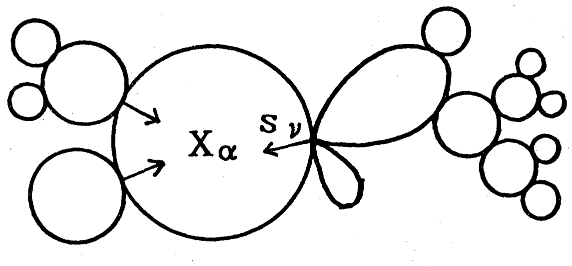
(2) $K_\mu \supset K_{\mu'}$ $(\mu < \mu')$.

(3) $\{s_\mu\}$ は endpoint p に収束するか，または，separating point s_ν を，ただ1つしか持たないある X_e の separating point s_ν で終わる.

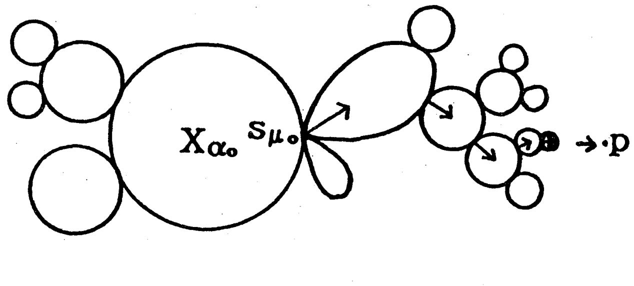
補題 4.15，補題 4.16 より，endpoint p が $f: X \to X$ の不動点集合の本質的成分に属して，背理法の仮定に矛盾，または,補題 4.13，補題 4.14 より，X_e が f^* p.p. を持たないことになり矛盾.

注意. separating point s_ν は，X_α の内部に含まれるものは除く.

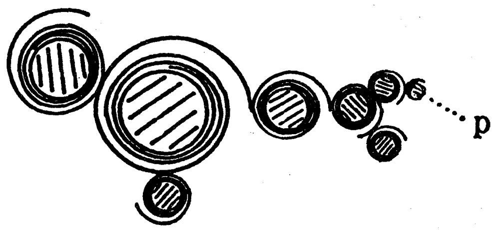
Case 1.



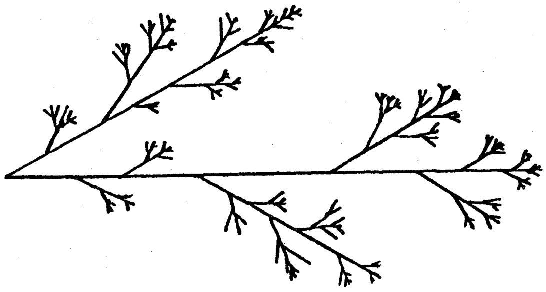
Case 2.



例.



[a]



[b]

References

[1] Borsuk, K., "Einige Sätze über stetige Streckenbilder," Fund. Math., 18 (1932), 198 - 214.

[2] Kinoshita, S., "On essential components of the set of fixed points," Osaka Math. J., 4 (1952), 19-22.

[3] Knill, R. J., "Cones, Product and fixed points," Fund. Math., 60 (1967), 35 - 46.

[4] Kuratowski, K., Topology II, Academic Press, New York, 1968.

[5] Whyburn, G. T., Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., 28, 1942.

[6] Yonezawa, Y., and Kinoshita, S., "A property of essential components of the fixed point set," Kwansei Gakuin Annual Studies, 37 (1988), 147-151.

[7] Yonezawa, Y., "On f.p.p. and f^* p.p. of some not locally connected continua,"(to appear in the Fundamenta Mathematicae).

[8] Yonezawa, Y., "The cyclic extensibility of essential components of the fixed point set,"(preprint).