数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 1-12

On p-adic Dedekind sums (II)

長崎大教養 工藤愛知 (Aichi Kudo)

§ 0. 序

整数 h, k, m (k, $m \geqq 1$) に対して，Dedekind 和 $S_{m+1}^{(r)}(h,k)$, $1 \leqq r \leqq m$ は

$$S_{m+1}^{(r)}(h,k)=\sum_{a=0}^{k-1}\bar{B}_{m+1-r}(\frac{a}{k})\bar{B}_r(\frac{ha}{k})$$

によって定義される．ここで，$\bar{B}_n(x)$ は

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}, \qquad \frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

で Bernoulli 数 B_n および Bernoulli 多項式 $B_n(x)$ をそれぞれ定義するとき，$\bar{B}_n(x) = B_n(x)$ $(0 \leqq x < 1)$, $\bar{B}_n(x+1) = \bar{B}_n(x)$ で与えられる．ただし，$\bar{B}_1(0) = 0$ とする．和 $S_{m+1}^{(r)}(h,k)$ は $r=m=1$ のとき通常の Dedekind 和 $s(h,k)$ であり，m が偶数のときは 0 となる．また，Carlitz [1] は奇数 m を固定してこれを $c_r(h,k)$ であらわした．さらに $(h,k)=1$ のとき奇数 m に対応する $S_{m+1}^{(m)}(h,k)$ は Apostol の Dedekind 和 $s_m(h,k)$ になる．

ここでは，素数 p を固定し m を変数として $S_{m+1}^{(r)}(h,k)$ を p 進補間する関数を考察することによって Dedekind 和 $S_{m+1}^{(r)}(h,k)$ のいくつかの p 進的性質を導く．あつかわれる関数 $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ は Apostol の Dedekind 和に対して Rosen - Snyder [5] によって構成されたものの一般化である．

§ 1. $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の定義

素数 p に対して Z_p を有理 p 進整数環，Q_p を有理 p 進数体とする．$p=2$ のとき $q=4$，$p>2$ のとき $q=p$ とおく．導手 q の Teichmüller 指標を ω とすると，p 進単数 $x\in Z_p$, $(x,p)=1$ は $x=\omega(x)\langle x\rangle$, $\langle x\rangle\in 1+qZ_p$ と一意的に分解される．e を ω の位数，すなわち，$p=2$ のとき $e=2$，$p>2$ のとき $e=p-1$ とする．

1 の巾根 ζ に対する Euler 数 $E_n(\zeta)$ $(n\geqq 0)$ を

$$\frac{\zeta}{e^t-\zeta}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(\zeta)\frac{t^n}{n!}\quad(\zeta\neq 1);\qquad E_n(1)=\frac{B_{n+1}}{n+1}$$

で与える．そのとき，公式

$$k^m S^{(r)}_{m+1}(h,k)=(m+1-r)\,r\sum_{\zeta^k=1}E_{m-r}(\zeta^h)E_{r-1}(\zeta^{-1}),\quad m\geqq 3,\tag{1.1}$$

$$k\,(S^{(1)}_2(h,k)+\frac{1}{4})=\sum_{\zeta^k=1}E_0(\zeta^h)E_0(\zeta^{-1})$$

がなりたつ [1]．一方，ζ の位数が p の巾でないとき，

$$\mu_\zeta(a+p^NZ_p)=\frac{\zeta^{p^N-a}}{1-\zeta^{p^N}},\quad |\mu_\zeta(a+p^NZ_p)|=1,\quad(0\leqq a\leqq p^N-1)$$

なる Z_p 上の有限加法的測度 μ_ζ が存在して，

$$\int_{Z_p}x^n\,d\mu_\zeta(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{a=0}^{p^N-1}a^n\frac{\zeta^{p^N-a}}{1-\zeta^{p^N}}=E_n(\zeta),\quad n\geqq 0\tag{1.2}$$

がなりたつ [2], [4]．ここで $|\ |$ は Q_p の代数的閉胞の完備化 C_p における $|p|=p^{-1}$ なる付値，極限はこの $|\ |$ に関するものである．p 進単数群 Z_p^* 上では

$$\int_{Z_p^*}x^n\,d\mu_\zeta(x)=E_n(\zeta)-p^nE_n(\zeta^p),\quad n\geqq 0\tag{1.3}$$

がなりたつ．

$S^{(r)}_{m+1}(h,k)$ の p 進補間関数 $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ を考察するにあたって，以後，$(h,k)=1$ とし，$k=k_0p^\nu$, $(k_0,p)=1$, $\nu\geqq 0$ とあらわす．r を任意の整数 $\geqq 1$，α を $0<\alpha\leqq e$ なる偶数とする．さらに p^ν と q の最小公倍数を $p^{\bar\nu}$ であらわし，$c=1+p^{\bar\nu}$ とおく．公式

(1.1) には $(h,k)=1$ という制限はない．

まず，p 巾位でない ζ に対して

$$G_{p,\alpha}(s;r,\zeta)=\int_{Z_p^*}\omega^{\alpha-1}(x)<x>^s\frac{1}{x^r}\,d\mu_\zeta(x),\quad s\in Z_p$$

とおく．これは明らかに Z_p 上の解析関数で

(1.4)
$$G_{p,\alpha}(s;r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{n,r}(\zeta)(s+1-r)^n,$$
$$c_{n,r}(\zeta)=\int_{Z_p^*}\omega^{\alpha-r}(x)\frac{(\log x)^n}{n!}\frac{1}{x}\,d\mu_\zeta(x)$$

(log は p 進対数関数) と展開される．次に，

(1.5)
$$\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)=(s+1-r)\,r\sum_{\substack{\zeta^k=1\\ \zeta^{p^\nu}\neq 1}}G_{p,\alpha}(s;r,\zeta^h)E_{r-1}(\zeta^{-1}),$$

(1.6)
$$T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)=r\sum_{\zeta^{p^\nu}=1}\sum_{\substack{\eta^c=1\\ \eta\neq 1}}G_{p,\alpha}(s;r,\zeta^h\eta)E_{r-1}(\zeta^{-1}),$$

(1.7)
$$U_{p,r}^{(\nu)}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(s+1-r)^n,\quad u_n=B_n\frac{(\log c)^{n-1}}{n!}$$

とおく．これらを用いて p 進 Dedekind 和 $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ を

(1.8)
$$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)=\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)+T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)U_{p,r}^{(\nu)}(s)$$

で定義する．

$m+1\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e)$ をみたす整数 $m\geqq r$ に対して

$$G_{p,\alpha}(m;r,\zeta)=\int_{Z_p^*}x^{m-r}\,d\mu_\zeta(x)=E_{m-r}(\zeta)-p^{m-r}E_{m-r}(\zeta^p),$$

また，任意の整数 $m\geqq r$ に対して

$$U_{p,r}^{(\nu)}(m)=\frac{m+1-r}{c^{m+1-r}-1}$$

である．したがって，定義式 (1.5) - (1.8) と，

(1.9)
$$\sum_{\xi^k=1}E_n(\zeta\xi)=k^{n+1}E_n(\zeta^k),\qquad n\geq 0,\quad k\geq 1,$$

および公式 (1.1) を用いて次の結果が得られる．

定理 1. $(h,k)=1$ なる整数 h, k $(k\geqq 1)$ と整数 $r\geqq 1$, 偶数 α, $0<\alpha\leqq e$ に対して $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ は Z_p 上の p 進解析関数で，$m+1\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e)$ なる整数 $m\geqq r$ に対して

$$S_{p,\alpha}(m,r,h,k)=k^m S_{m+1}^{(r)}(h,k)-p^{m-r}k^m S_{m+1}^{(r)}(ph,k) \tag{1.10}$$

をみたす．

注意． 定義から明らかなように，$k=p^\nu$ のときは

$$\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)=0;\qquad S_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)=T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)U_{p,r}^{(\nu)}(s)$$

である．したがって，一般に，(1.8) は

$$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)=\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)+S_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$$

ともかける．また，$(k,q)=1$ または 2 で r が奇数のとき Dedekind 和の簡単な性質から $S_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$ は恒等的に 0 になることがわかる．したがってこのとき，$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)=\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ となる．

§ 2. $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の性質 (I)

この節と次節において，関数 $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の p 進解析的性質を調べる．具体的には，$s=r-1$ で

$$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(s+1-r)^n \tag{2.1}$$

と展開したときの係数 a_n の性質を調べる．そのために，関数 $\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ および $T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$ をそれぞれ

$$\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\bar{a}_n(s+1-r)^n,\qquad T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}t_n(s+1-r)^n$$

とおく．$S_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$ についてはとくに

$$S_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)=\sum_{n=0}^{\infty}a'_n(s+1-r)^n \tag{2.2}$$

とおく．すると (1.4) – (1.8) の定義より

$$a_n = \bar{a}_n + a_n', \qquad a_n' = \sum_{i=0}^{n} t_i u_{n-i}, \qquad n \geqq 0, \tag{2.3}$$

$$\bar{a}_0 = 0; \qquad \bar{a}_n = r \sum_{\substack{\zeta^k=1 \\ \zeta^{p^\nu}\neq 1}} c_{n-1,r}(\zeta^h) E_{r-1}(\zeta^{-1}), \qquad n \geqq 1, \tag{2.4}$$

$$t_n = r \sum_{\zeta^{p^\nu}=1} \sum_{\substack{\eta^c=1 \\ \eta\neq 1}} c_{n,r}(\zeta^h \eta) E_{r-1}(\zeta^{-1}), \qquad n \geqq 0 \tag{2.5}$$

となる．そこで，この (2.4), (2.5) を見やすい形になおす．まず，整数 $0 < a < p^{\bar{\nu}}$, $(a,p) = 1$ に対して

$$I_n^{(\nu)}(a;\zeta) = \zeta^{-ha} \int_{Z_p} \frac{(\log(a + p^{\bar{\nu}} x))^{n-1}}{(a + p^{\bar{\nu}} x)(n-1)!}\, d\mu_{\zeta^{hp^{\bar{\nu}}}}(x), \qquad n \geqq 1$$

とおくと，(2.4) は

$$\bar{a}_n = r \sideset{}{^*}\sum_{a=1}^{p^{\bar{\nu}}-1} \omega^{\alpha-r}(a) \sum_{\substack{\zeta^{k_0}=1 \\ \zeta\neq 1}} I_n^{(\nu)}(a;\zeta) \sum_{\xi^{p^\nu}=1} E_{r-1}(\zeta^{-1}\xi^{-1})\xi^{-ha}, \qquad n \geqq 1 \tag{2.6}$$

とかける．ここに $*$ は p と素な a について和をとることをあらわす．$p = 2$ で，$\nu \geqq 1$ または $r > 1$ のときはさらに

$$\bar{a}_n = 2r \sum_{\substack{a=1 \\ a\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{2^{\bar{\nu}}-1} \sum_{\substack{\zeta^{k_0}=1 \\ \zeta\neq 1}} I_n^{(\nu)}(a;\zeta) \sum_{\xi^{2^\nu}=1} E_{r-1}(\zeta^{-1}\xi^{-1})\xi^{-ha}, \qquad n \geqq 1, \tag{2.7}$$

となる．証明には，

補題 1.　p 巾位でない ζ と $a + p^\nu Z_p$ $(0 \leqq a < p^\nu)$ 上の連続関数 f に対して

$$\int_{a+p^\nu Z_p} f(x)\, d\mu_\zeta(x) = \zeta^{-a} \int_{Z_p} f(a + p^\nu x)\, d\mu_{\zeta^{p^\nu}}(x).$$

補題 2.　同様の ζ と Z_p 上の連続関数 f に対して

$$\int_{Z_p} f(x)\, d\mu_\zeta(x) = -\zeta \int_{Z_p} f(-1-x)\, d\mu_{\zeta^{-1}}(x).$$

と関係式

$$E_0(\zeta^{-1}) = -1 - E_0(\zeta); \qquad E_{r-1}(\zeta^{-1}) = (-1)^r E_{r-1}(\zeta), \qquad r > 1 \tag{2.8}$$

を用いる．この (2.6), (2.7) から直ちに次の結果を得る：

命題 1. $k=k_0p^\nu$, $(k_0,p)=1$, $\nu \geqq 0$ のとき $\bar{S}_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の係数 $\bar{a}_n$ について,

$$(a) \qquad |\bar{a}_n| \leqq |\frac{rq^{n-1}p^\nu}{(n-1)!}|, \qquad n \geqq 1,$$

さらに, $p=2$ のとき $\nu \geqq 1$ または $r>1$ ならば,

$$(b) \qquad |\bar{a}_n| \leqq |\frac{rq^{n-1}2^{\nu+1}}{(n-1)!}|, \qquad n \geqq 1.$$

次に (2.5) について考える. 整数 $0<a<p^{\bar{\nu}}$, $(a,p)=1$ に対して

$$A_n^{(\bar{\nu})}(a) = \sum_{\substack{\eta^c=1 \\ \eta\neq 1}} \eta^a \int_{Z_p} \frac{(\log(a+p^{\bar{\nu}}x))^n}{a+p^{\bar{\nu}}x} d\mu_\eta(x)$$

とおく. また, $\{x\}$ で有理数 x の小数部分をあらわす. このとき次が得られる.

命題 2. $(h,p^\nu)=1$ のとき $T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$ の係数 t_n に対して,

$$(a) \qquad t_n = \frac{1}{n!}\sum_{a=1}^{p^{\bar{\nu}}-1}{}^{*}\, \omega^{\alpha-r}(a)A_n^{(\bar{\nu})}(a)(p^\nu)^r B_r(\{\frac{ha}{p^\nu}\}), \qquad n \geqq 0,$$

$p=2$ で, $\nu \geqq 1$ または $r>1$ のときはさらに

$$(b) \qquad t_n = \frac{2}{n!}\sum_{\substack{a=1 \\ a\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}}^{2^{\bar{\nu}}-1} A_n^{(\bar{\nu})}(a)(2^\nu)^r B_r(\{\frac{ha}{2^\nu}\}), \qquad n \geqq 0.$$

証明には, 補題 1, 2 と,

$$(2.9) \qquad k^n B_n(\{\frac{a}{k}\}) = n\sum_{\zeta^k=1} E_{n-1}(\zeta)\zeta^a, \qquad n \geqq 1, \ k \geqq 1$$

を用いる.

さて, $A_n^{(\bar{\nu})}(a)$ に対して次のことがわかる.

補題 3. (i) $$A_0^{(\bar{\nu})}(a) = \frac{1}{p^{\bar{\nu}}}\log(1+p^{\bar{\nu}}).$$

(ii) $p>2$ のとき,
$$A_1^{(\bar{\nu})}(a) \equiv \begin{cases} \log a + 3(1-\frac{1}{2}a) \pmod{3^2}, & p=3,\ \bar{\nu}=1, \\ \log a + \frac{p^{\bar{\nu}}}{2}(1-\frac{1}{a}) \pmod{p^{\bar{\nu}+1}}, & \text{その他}. \end{cases}$$

(iii) 一般に, $$A_n^{(\bar{\nu})}(a) \equiv (\log a)^n \pmod{p^{\bar{\nu}}q^{n-1}}, \qquad n \geqq 1.$$

ここで, 両辺が有理整数でない場合の $a \equiv b \pmod{\lambda}$ は $|a-b| \leqq |\lambda|$ の意味で用い

る．また，このあとの t_n および a'_n に関する記述で $\nu<\bar{\nu}$ の場合については r が偶数のときの結果のみ示す(前節の注意参照)．さらに，$\mathrm{ord}_p(x)$ で $\mathrm{ord}_p(p)=1$ なる指数付値をあらわし，$\nu=0$ のとき $\theta=\mathrm{ord}_p(B_r)$，$\nu\geqq 1$ のとき $\theta=0$ とする．

指標 ω^r に対して，

$$\sum_{a=0}^{q-1}\frac{\omega^r(a)te^{at}}{e^{qt}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_{n,\omega^r}\frac{t^n}{n!}$$

で一般 Bernoulli 数 B_{n,ω^r} を定義する．補題 3 を命題 2 の右辺に代入し，若干の計算をして整理すると，$T_{p,\alpha}(s;r,h,p^\nu)$ に関する次の一連の結果が得られる：

命題 2 と補題 3 (i) から，

命題 3. (i) $\nu=0$ のとき，

$$t_0=\begin{cases}(1-\frac{1}{p})B_r\log(1+q), & r\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e),\\ 0, & r\not\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e),\end{cases}$$

(ii) $\nu\geqq 1$ ($p=2,\ \nu=1$ ならば r：偶数) のとき，

$$t_0=\begin{cases}(1-p^{r-1})B_r\log(1+p^{\bar{\nu}}), & r\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e),\\ \omega^{r-\alpha}(h)B_{r,\omega^{\alpha-r}}\log(1+p^\nu), & r\not\equiv\alpha\ (\mathrm{mod}\ e).\end{cases}$$

命題 2, 3 と補題 3 (iii) から，

命題 4. (i) $p=2,\ \nu=0,\ 1,\ 2$ または $p>2,\ \nu=0,\ 1$ のとき，$|t_n|\leqq|\frac{2q^np^\theta}{n!}|,\quad n\geqq 0,$

(ii) $p=2,\ \nu=3$ のとき，　$|t_n|=|\frac{2q^n}{n!}|,\quad n\geqq 1,$

(iii) $p=2,\ \nu\geqq 4$ または $p>2,\ \nu\geqq 2,\ \alpha=e$ のとき，

$$n!\,t_n\equiv -h^rp^{\nu-1}q^nB_n\quad(\mathrm{mod}\ p^{\nu-1}q^n),\qquad n\geqq 0,$$

(iv) $p>2,\ \nu\geqq 2,\ \alpha\neq e$ のとき，　$|t_n|\leqq|\frac{p^{\nu-1+n}}{n!}|,\quad n\geqq 0.$

さらに，$|t_1|$ について，命題 2 と補題 3 (ii) から，

命題 5. $p \geqq 5$ ($\nu = 0$ なら r : 偶数) に対して,

(i) $\nu = 0$ のとき,
$$t_1 \equiv \begin{cases} p(W_{p,e} - \frac{1}{2})B_r & (\mathrm{mod}\ p^{2+\theta}), \quad r \equiv \alpha\ (\mathrm{mod}\ e), \\ pW_{p,\alpha_1}B_r & (\mathrm{mod}\ p^{2+\theta}), \quad r \not\equiv \alpha\ (\mathrm{mod}\ e), \end{cases}$$

(ii) $\nu = 1$ のとき,
$$t_1 \equiv \begin{cases} h^r p(W_{p,e} - \frac{1}{2}) & (\mathrm{mod}\ p^2), \quad \alpha = e, \\ h^r pW_{p,\alpha} & (\mathrm{mod}\ p^2), \quad \alpha \neq e, \end{cases}$$

(iii) $\nu \geqq 2$ のとき, $t_1 \equiv h^r p^\nu W_{p,\alpha} \pmod{p^{\nu+1}}$.

ここに, 偶数 $0 < \alpha \leqq e (= p - 1)$ に対して

$$W_{p,\alpha} = \begin{cases} \dfrac{B_{p-1}}{p-1} - \dfrac{1}{p}, & \alpha = e, \\ \dfrac{B_\alpha}{\alpha}, & \alpha \neq e \end{cases}$$

とおく. また, α_1 は $0 < \alpha_1 \leqq e$, $\alpha_1 \equiv \alpha - r \pmod{e}$ なる整数をあらわす.

命題 6. $p = 3$ に対して,

(i) $\nu = 0$ (r : 偶数) のとき, $t_1 \equiv -1 \pmod{3}$,

(ii) $\nu = 1$ のとき, $t_1 \equiv 3h^r \pmod{3^2}$,

(iii) $\nu \geqq 2$ のとき, $t_1 \equiv 3^\nu r h^r \pmod{3^{\nu+1}}$.

このうち命題 3 は Γ 変換の理論を用いても示すことができる [6]. これらの結果を (2.3) に代入して a_0 の値および $|a_n|$, $n \geqq 1$ の評価が得られる. たとえば命題 4 と $|a'_n| = |\sum_{i=0}^{n} t_{n-i}u_i|$ から, $p > 2$ の場合, $|a'_n|$ が次のように評価される.

命題 7. $p > 2$ に対して, (i) $\nu = 0$, 1 のとき,

$$|a'_n| \leqq |p^{n-1+\theta}|, \quad 0 \leqq n < e; \qquad |a'_n| \leqq |\frac{p^{n-2+\theta}}{n!}|, \quad e \leqq n.$$

($p = 3$ ならばさらに, $|a'_3| \leqq |3^{1+\theta}|$.)

(ii) $\nu \geqq 2$ のとき,

$$n!\,a'_n \equiv -h^r p^{n-1} B_n \pmod{p^{n-1}}, \qquad n \geqq 0, \qquad \alpha = e,$$

$$|a'_n| \leqq \left|\frac{p^{n-1}}{n!}\right|, \qquad n \geqq 0, \qquad \alpha \neq e.$$

これに，命題 3, 5, 6 を使った $|a'_1|$ (必要ならば $|a'_2|$) に対する結果を補って命題 1 の $|\bar{a}_n|$ に対する結果と比較し $|a_n|$ の評価を導くわけである．

§ 3.　$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の性質 (II)

このようにして得られる $S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の性質とそれから導かれる $S^{(r)}_{m+1}(h,k)$ の性質のいくつかを述べる．$p \geqq 5$ に対しては次が得られる．

定理 2.　(i) $p \geqq 5,\ k \not\equiv 0 \pmod{p}$ のとき，

$$a_0 = \begin{cases} (1-\dfrac{1}{p})B_r, & r \equiv \alpha \pmod{e}, \\[2ex] 0, & r \not\equiv \alpha \pmod{e}, \end{cases}$$

$$a_1 \equiv -\frac{1}{p}W_{p,\alpha} \pmod{p^0}, \quad |a_2| \leqq 1, \quad |a_n| \leqq \left|\frac{p^{n-3}}{n!}\right| \ (n \geqq 3), \qquad r \equiv 0 \pmod{e},$$

$$|a_1| \leqq |r|, \qquad |a_2| \leqq |rp|, \qquad |a_n| \leqq \left|\frac{rp^{n-2}}{n!}\right| \quad (n \geqq 3), \qquad r \not\equiv 0 \pmod{e}.$$

(ii) $p \geqq 5,\ k \equiv 0 \pmod{p}$ のとき，

$$a_0 \equiv \begin{cases} -\dfrac{h^r}{p} & \pmod{p^0}, \qquad \alpha = e, \\[2ex] h^{r-\alpha} r W_{p,\alpha} & \pmod{p}, \qquad \alpha \neq e, \end{cases}$$

$$a_1 \equiv h^r W_{p,\alpha} \pmod{p}, \qquad |a_2| \leqq |p|, \qquad |a_n| \leqq \left|\frac{p^{n-2}}{n!}\right| \quad (n \geqq 3).$$

そこで，この応用例を 2, 3 示そう．$m+1 \not\equiv 0 \pmod{e}$ なる奇数 $m \geqq 1$ に対して，$m+1 \equiv \alpha \pmod{e}$ なる α をとる．$k \equiv 0 \pmod{p}$ とすると上の定理から，

$$\begin{aligned} S_{p,\alpha}(m;r,h,k) &\equiv h^{r-\alpha} r W_{p,\alpha} + h^r W_{p,\alpha}(m+1-r) \pmod{p} \\ &= h^r W_{p,\alpha}(rh^{-\alpha} + (m+1-r)) \end{aligned}$$

がわかる．一方，$|S_{m+1}^{(r)}(h,k_0)| \leqq |1/p|$ $(m \geqq 3)$ と $|S_2^{(1)}(h,k_0)| \leqq 1$ に注意して，定理 1 と，$\nu = \mathrm{ord}_p(k)$ $(\geqq 1)$ に関する帰納法によれば

$$S_{p,\alpha}(m;r,h,k) = k^m S_{m+1}^{(r)}(h,k) - p^m (k/p)^m S_{m+1}^{(r)}(h,k/p) \equiv k^m S_{m+1}^{(r)}(h,k) \pmod{p}$$

がわかる．したがって，次のことが得られる．

系 1. $p \geqq 5$, $k \equiv 0 \pmod{p}$ のとき $m+1 \not\equiv 0 \pmod{e}$ なる奇数 m に対して

$$k^m S_{m+1}^{(r)}(h,k) \equiv h^r \frac{B_{m+1}}{m+1}(r(h^{-(m+1)}-1)+m+1) \pmod{p}, \qquad 1 \leqq r \leqq m.$$

同様にして次も得られる．

系 2. $p \geqq 5$, $k \equiv 0 \pmod{p}$, $m+1 \equiv 0 \pmod{e}$ に対して

$$k^m S_{m+1}^{(r)}(h,k) \equiv h^{pr}(1 - \frac{1}{p} + W_{p,e}(m+1)) \pmod{p}, \qquad 1 \leqq r \leqq m.$$

これには [3] の方法で得られる次の合同式を補助に用いる．

$$B_{r,\omega^{-r}} \equiv 1 - \frac{1}{p} + W_{p,e} r \pmod{p^{1+\mathrm{ord}_p(r)}}, \qquad r \geqq 1. \tag{3.1}$$

$S_{p,\alpha}(s;r,h,k)$ の連続性の程度については講演では触れなかったが，たとえば $p \geqq 5$ で $r \equiv 0 \pmod{e}$ または $k \equiv 0 \pmod{p}$ のとき，s, $t \in Z_p$ に対して，$W_{p,\alpha}$ の分子が p で割れるか割れないかにしたがってそれぞれ

$$|S_{p,\alpha}(s;r,h,k) - S_{p,\alpha}(t;r,h,k)| \leqq |p^{1+\theta}||s-t| \text{ ，または，} = |p^{\theta}||s-t| \tag{3.2}$$

となる．$k \not\equiv 0 \pmod{p}$, $r \not\equiv 0 \pmod{e}$ のときは，$r^{-1}a_1 \equiv 0 \pmod{p}$ であるかないかにしたがってそれぞれ (3.2) の θ を $\mathrm{ord}_p(r)$ にかえたものがなりたつ．また，これに関する考察から次のような結果が得られる．

命題 8. $p \geqq 5$, $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ とする．奇数 $1 \leqq r < m$ について，$m \equiv r \pmod{e}$，または，$1 < r \equiv 1 \pmod{e}$ とすると，$p \equiv 1 \pmod{k}$ のとき

$$\frac{1}{(m+1-r)r} S_{m+1}^{(r)}(h,k) \equiv 0 \pmod{p}.$$

$p=3$ に対しては次が得られる.

定理 3. (i) $p=3$, r : 偶数, $k \not\equiv 0 \pmod 3$ のとき,

$$a_0 = \frac{2}{3}B_r, \quad |a_1| \leqq 1, \quad a_2 \equiv \frac{1}{3} \pmod{3^0}, \quad |a_3| \leqq 1, \quad |a_n| \leqq |\frac{3^{n-3}}{n!}| \ (n \geqq 4),$$

(ii) $p=3$, $k \equiv 0 \pmod 3$ のとき,

$$a_0 = \begin{cases} (1-3^{r-1})B_r, & r : \text{偶数}, \\ \omega(h)B_{r,\omega}, & r : \text{奇数}, \end{cases} \qquad a_1 \equiv \begin{cases} 0 \pmod 3, & \nu = 1, \\ rh^r \pmod 3, & \nu \geqq 2, \end{cases}$$

$$a_2 \equiv -h^r \pmod 3, \qquad |a_3| \leqq |3|, \qquad |a_n| \leqq |\frac{3^{n-2}}{n!}| \quad (n \geqq 4).$$

したがってこの場合の $S_{3,\alpha}(s;r,h,k)$ については, s, $t \in Z_3$ に対して, $\nu=0$, 1 で $s+t \in (1-r)+3Z_3$ のとき, または, $\nu \geqq 2$ で $s+t \in 1+3Z_3$ のとき (3.2) の前者が, そうでないとき, 後者がなりたつ. $(k,3)=1$ で r が奇数の場合は $p \geqq 5$ のときと同じである.

$p=2$ の場合についてもこれまで調べてきたことと同等のことが示されるがここでは省略し, 最後に $(k,2)=1$ なる $S^{(r)}_{m+1}(h,k)$ に対する 1 つの結果を述べる.

簡単のために, $D^{(r)}_m(h,k) = \dfrac{1}{(m+1-r)r} k^m S^{(r)}_{m+1}(h,k)$ とおく. 一方, $(k,2)=1$ に対して, $k \equiv \pm 1 \pmod 4$ にしたがって,

$$Q(h,k) = 2\sum_{j=0}^{k-1} j\{\frac{(4j+1)h}{k}\} - \frac{(k-1)^2}{2} + \frac{1 \mp k}{4}$$

とおく. $(h,k)=1$ に対して, h^* を $hh^* \equiv 1 \pmod k$ なる 1 つの整数とすると, 次のことが知られる.

命題 9. $(h,k)=1$, $(k,2)=(r,2)=1$ のとき, 奇数 $m \geqq 3$ に対し

$$D^{(1)}_m(h,k) \equiv Q(h,k) \pmod 4, \qquad D^{(m)}_m(h,k) \equiv Q(h^*,k) \pmod 4,$$

$$D^{(r)}_m(h,k) \equiv Q(h,k) + Q(h^*,k) \pmod 8, \qquad 3 \leqq r \leqq m-2.$$

これから特に, H. Lang (Acta Arith., **51** (1988)) によって示されている結果 : (h,k) =

$(k,2)=(r,2)=1$ のとき，奇数 $m\geqq 3$ に対し

$$S^{(1)}_{m+1}(h,k)\equiv S^{(m)}_{m+1}(h,k)\equiv \frac{k^2-1}{8} \pmod 2,$$

$$S^{(r)}_{m+1}(h,k)\equiv 0 \pmod 2,\quad 3\leqq r\leqq m-2$$

が得られる．

$(k_0,2)=(r,2)=1$ に対してまた

$$S_{2,\alpha}(s;r,h,2k_0)=2S_{2,\alpha}(s;r,h,k_0)-2^r S_{2,\alpha}(s;r,2^*h,k_0),\quad 22^*\equiv 1 \pmod{k_0}$$

がなりたつので，$S^{(r)}_{m+1}(h,2k_0)$, $(h,2k_0)=(r,2)=1$ についても類似のことが得られる．

References

[1] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math., **3** (1953), 513-522.

[2] K. Shiratani, *On Euler numbers*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., **27** (1973), 1-5.

[3] W. Johnson, *p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers*, J. Number Theory, **7** (1975), 251-265.

[4] K. Shiratani and S. Yamamoto, *On a p-adic interpolation function for the Euler numbers and its derivatives*, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., **39** (1985), 113-125.

[5] K.H. Rosen and W.M. Snyder, *p-adic Dedekind sums*, J. reine angew. Math., **361** (1985), 23-26.

[6] A. Kudo, *On p-adic Dedekind sums*, to appear.

[7] A. Kudo, *On p-adic Dedekind sums* (II), to appear.