数理解析研究所講究録
第 759 巻 1991 年 36-45

Drinfeld加群のtensor積に同伴するTate加群について

京大数理研　浜畑芳紀
(Yoshinori Hamahata)

§0. 序

Drinfeld module は、1974年にDrinfeldによって導入されて以降、多くの人達(Anderson, Gekeler, Goss, Hayes, Stuhler, Thakur, Yu, …)によって調べられている。最近では田口雄一郎氏によってTate予想のanalogueも研究されている(本報告集の田口氏の論説を参照)。

本稿では、Drinfeld module のtensor積を定義し、そのv-進表現を見ていきたい。

記号　$A = \mathbb{F}_q[T]$　$K = \mathbb{F}_q(T)$　$K_\infty = \mathbb{F}_q((\frac{1}{T}))$　(q は p 巾)

$\overline{K_\infty} = K_\infty$ の代数的閉包

$\overline{K} = K$ の $\overline{K_\infty}$ における代数的閉包

§1. Drinfeld module

$\mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a) = \{K$ 上の $\mathbb{G}_a$ の endomorphism$\}$ とする。各 $\phi \in \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a)$

は $\phi^* \in \mathrm{End}_K(K[X])$ と1対1に対応し、ϕ^* は X の像 $\phi^*(X)$ によって一意に定まる．ϕ は $\mathbb{G}_a$ の群演算を保つので、ϕ^* は additive (i.e. $\phi^*(X+Y) = \phi^*(X) + \phi^*(Y)$) となり、

$$\phi^*(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i X^{p^i} \qquad (c_i \in K) \qquad (\mathrm{ch}(K) = p)$$

という形で書ける．$\phi^*(X) = X^q$ なる ϕ を τ と書く．

$K\{\tau\} := \{ K$-係数で τ を変数とする多項式$\}$ は

$$(a\tau^i)(b\tau^j) = ab^{q^i}\tau^{i+j} \qquad (a, b \in K)$$

によって積を定めて、非可換環になる．$\phi \in \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a)$ に対して、$\phi^*(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i X^{q^i}$ となるとき、$\phi = \sum_{i=0}^{s} c_i \tau^i$ と書くことによって $\phi \in K\{\tau\}$ である．$K\{\tau\} \subset \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a)$ である．

<u>定義 1.1</u>　ϕ が K 上の rank r の Drinfeld module とは環準同型

$$\phi : A \longrightarrow \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a)$$

で、T の像 $[T]_\phi$ が

$$[T]_\phi = T + a_1\tau + \cdots + a_r\tau^r \qquad (a_i \in K, \ a_r \neq 0)$$

と書けるものをいう．

<u>例</u>　$[T]_C = T + \tau$ で定まる環準同型 $C : A \to \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a)$ は、rank 1 の Drinfeld module である．これを Carlitz module という．

<u>定義 1.2</u>　ϕ, ψ を K 上の Drinfeld module とする．u が ϕ から ψ への morphism とは $\overline{K}$ 上の morphism $\mathbb{G}_a \longrightarrow \mathbb{G}_a$ で、

$$u \circ [a]_\phi = [a]_\psi \circ u \qquad ({}^\forall a \in A)$$

なるもののことであり、特に0でないとき isogeny という．

u に対応する環準同型 $u^*: \overline{K}[X] \to \overline{K}[X]$ による X の像が $u^*(X) = \sum_{i=0}^{s} c_i X^{q^i}$ $(c_i \in \overline{K})$ という形のとき $u = \sum_{i=0}^{s} c_i \tau^i$ と表すことにする.

<u>定義 1.3</u>　$0 \neq a \in A$ に対して、${}_a\phi := \mathrm{Ker}([a]_\phi)(\overline{K})$ とおく. $\mathrm{rank}(\phi) = r$ のとき、${}_a\phi \cong (A/a)^{\oplus r}$ であることが知られている.

$$[a]_\phi : {}_{a^{i+1}}\phi \to {}_{a^i}\phi \qquad (x \mapsto [a]_\phi(x))$$

によって $\{ {}_{a^i}\phi \mid i \geq 1 \}$ は射影系をなす. $T_a(\phi) := \varprojlim_i {}_{a^i}\phi$ とおく.

次に Drinfeld module を analytic な点から見る.

K 上の Drinfeld module ϕ に対して、

$$[a]_\phi(e_\phi(x)) = e_\phi(ax) \qquad (\forall a \in A)$$

なる巾級数 $e_\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^{q^i}$ $(e_i \in \overline{K},\ e_0 = 1)$ が一意的に存在する. この $e_\phi(x)$ を ϕ の exponential function といい、

$$L(\phi) := \mathrm{Ker}(e_\phi : \overline{K_\infty} \to \overline{K_\infty})$$

を ϕ の lattice という. $L(\phi)$ は $\overline{K_\infty}$ の中で discrete で $\mathrm{rank} = \mathrm{rank}(\phi)$ の自由 A-加群になる.

§ 2. abelian t-module

Anderson は、高次元の Drinfeld module として abelian t-module を導入した. この節では abelian t-module を定義する.

$\mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a^n)$ の各元 E は、$E^* \in \mathrm{End}_K(K[X_1, \cdots, X_n])$ と 1 対 1 に対応し、$E^*(X_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ を縦に並べると、

$$E^*\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} X_1^{p^i} \\ \vdots \\ X_n^{p^i} \end{bmatrix} \qquad (M_i \in M(n, K))$$

と書ける．$\mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a^n) = \left\{ \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} X_1^{p^i} \\ \vdots \\ X_n^{p^i} \end{bmatrix} \middle| M_i \in M(n, K) \right\}$ と同一視する．特に、

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}^{(i)} = \begin{bmatrix} X_1^{q^i} \\ \vdots \\ X_n^{q^i} \end{bmatrix}$$

とおく．

定義 2.1　E が K 上の abelian t－module とは、環準同型 $E: A \longrightarrow \mathrm{End}_K(\mathbb{G}_a^n)$ のことで、次の(1)、(2)をみたすもの．

(1) $$[T]_E \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}^{(i)}$$ と書けたとき、$(M_0 - 1_n)^N = 0$ $(\exists N > 0)$.

(2) T と $[T]_E$ との作用を区別するため $[T]_E = t$ と書く．

$M(E) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_a^n, \mathbb{G}_a)$ に、

$$xm := x \cdot m \qquad \tau m := \tau \cdot m \qquad tm := m \cdot t \qquad (m \in M(E)\ ,\ x \in K)$$

によって、$K[t, \tau]$－module の構造を定める．そのとき $M(E)$ は $K[t]$－加群として有限生成．

上の E に対して、n を $\rho(E)$ と書き、$r(E) := \mathrm{rank}_{K[t]} M(E)$ と書く．$w(E) := \dfrac{\rho(E)}{r(E)}$ を E の weight という．

例　K 上の rank r の Drinfeld module ϕ は K 上の abelian t－module である．$\rho(\phi) = 1$，$r(\phi) = r$，$w(\phi) = \frac{1}{r}$．

例 $[T]_E \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & 1 & & 0 \\ & T & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & \\ \vdots & 0 & \\ 0 & & \\ 1 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^q \\ \vdots \\ X_n^q \end{bmatrix}$

によって定義される abelian t-module E．$\rho(E)=n$、$r(E)=1$、$w(E)=n$．この E を higher Carlitz module という．

定義 2.2　$E_i=(\mathbb{G}_a^{n_i}, [\ ]_{E_i})$ $(i=1,2)$ を abelian t-module とする．f が E_1 から E_2 への morphism とは、$\overline{K}$ 上の $\mathbb{F}_q$-linear morphism $\mathbb{G}_a^{n_1} \to \mathbb{G}_a^{n_2}$ で、$f \circ [a]_{E_1} = [a]_{E_2} \circ f$ $(\forall a \in A)$ なるもののことである．

定義 2.3　abelian t-module E と $0 \neq a \in A$ に対して ${}_aE := \mathrm{Ker}([a]_E)(\overline{K})$ とおく．$[a]_E : {}_{a^{i+1}}E \longrightarrow {}_{a^i}E$ $(z \mapsto [a]_E(z))$ によって $\{ {}_{a^i}E \mid i \geq 1 \}$ は射影系をなし、$T_a(E) := \varprojlim_i {}_{a^i}E$ とおく．

abelian t-module E が

$$[T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)} \qquad (M_i \in M(n, K))$$

によって与えられているとする．E に対して

$$[T]_E (e_E(z)) = e_E(M_0 z)$$

なる巾級数 $e_E(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i z^{(i)}$ $(e_i \in M(n, \overline{K})$, $e_0 = 1_n)$ が一意的に存在する．この $e_E(z)$ を E の exponential function といい、

$$L(E) := \mathrm{Ker}(e_E : \overline{K_\infty}^n \to \overline{K_\infty}^n)$$

を E の lattice という．L(E) は $\overline{K_\infty}^n$ において discrete であり、自由 A-加群であって $\mathrm{rank}_A L(E) \leq r(E)$ である．

§ 3. Drinfeld module の tensor 積

ϕ、ψ は K 上の Drinfeld module で、

$$[T]_\phi = T + a_1\tau + \cdots + a_r\tau^r \quad , \qquad [T]_\psi = T + b_1\tau + \cdots + b_s\tau^s$$

によって定義されているとする.

定義 3.1 ϕ と ψ との tensor 積 $\phi\otimes\psi$ は、abelian t-module ($\mathbb{G}_a^{r+s}$, $[\ ]_{\phi\otimes\psi}$) で、$[T]_{\phi\otimes\psi}$ は次のように定義する：

$$[T]_{\phi\otimes\psi}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_r \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T x_1 + b_1 y_1 + \cdots + b_s y_s \\ T x_2 + b_1 x_1^q + b_2 y_1^q + \cdots + b_s y_{s-1}^q \\ T x_3 + b_1 x_2^q + b_2 x_1^{q^2} + b_3 y_1^{q^2} + \cdots + b_s y_{s-2}^{q^2} \\ \vdots \\ (*) \\ T y_1 + a_1 x_1^q + \cdots + a_r x_r^q \\ T y_2 + a_1 y_1^q + a_2 x_1^{q^2} + \cdots + a_r x_{r-1}^{q^2} \\ T y_3 + a_1 y_2^q + a_2 y_1^{q^2} + a_3 x_1^{q^3} + \cdots + a_r x_{r-2}^{q^3} \\ \vdots \\ (**) \end{bmatrix},$$

ただし、

$$(*) = \begin{cases} T x_r + b_1 x_{r-1}^q + \cdots + b_s x_{r-s}^{q^s} & (r > s) \\ T x_r + b_1 x_{r-1}^q + \cdots + b_{r-1} x_1^{q^{r-1}} + b_r y_1^{q^{r-1}} & (r = s) \\ T x_r + b_1 x_{r-1}^q + \cdots + b_{r-1} x_1^{q^{r-1}} + b_r y_1^{q^{r-1}} + \cdots + b_s y_{s-r+1}^{q^{r-1}} & (r < s) \end{cases}$$

$$(**) = \begin{cases} T y_s + a_1 y_{s-1}^q + \cdots + a_{s-1} y_1^{q^{s-1}} + a_s x_1^{q^s} + \cdots + a_r x_{r-s+1}^{q^s} & (r > s) \\ T y_r + a_1 y_{r-1}^q + \cdots + a_{r-1} y_1^{q^{r-1}} + a_r x_1^{q^r} & (r = s) \\ T y_s + a_1 y_{s-1}^q + \cdots + a_r y_{s-r}^{q^r} & (r < s) \end{cases}.$$

注意 3.2 上の定義を見ると、$\phi\otimes\psi$ と $\psi\otimes\phi$ との定義がちがっている. しかし、isomorphism $M : \phi\otimes\psi \xrightarrow{\sim} \psi\otimes\phi$ が存在する.

定理 3.3 ϕ, ψ を K 上の Drinfeld module、f を A の 0 でない non-constant monic element、$\hat{A}_f$ を A の f-進完備化とする. そのとき、

(1) $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ の作用と両立する $\hat{A}_f$-加群の同型

$$T_f(\phi) \underset{\hat{A}_f}{\otimes} T_f(\psi) \xrightarrow{\sim} T_f(\phi \otimes \psi)$$

がある.

(2) ϕ' も K 上の Drinfeld module とし、$u : \phi \to \phi'$ を morphism とすると、準同型 $T_f(\phi) \to T_f(\phi')$, $T_f(\phi \otimes \psi) \to T_f(\phi' \otimes \psi)$ がひきおこされ、次の図式は可換：

$$\begin{tikzcd}
T_f(\phi) \underset{\hat{A}_f}{\otimes} T_f(\psi) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T_f(\phi') \underset{\hat{A}_f}{\otimes} T_f(\psi) \arrow[d, "\wr"] \\
T_f(\phi \otimes \psi) \arrow[r] & T_f(\phi' \otimes \psi)
\end{tikzcd}$$

$T_f(\cdot)$ は $\cdot$ の f-進 Tate 加群

§4. Drinfeld module の tensor 積の分解

この節では、Drinfeld module ϕ に対して $\phi \otimes \phi$ を考える. この $\phi \otimes \phi$ が 2 つの abelian t-module の直積で書けることを見る. ただし、この節に限り $\mathrm{ch}(K) \neq 2$ とする.

ϕ は K 上の rank ≥ 2 の Drinfeld module で

$$[T]_\phi = T + a_1\tau + \cdots + a_r\tau^r$$

によって与えられているとする.

<u>定義 4.1</u> (1) $\overset{2}{\wedge}(\phi)$ は abelian t-module $(\mathbb{G}_a^{r-1}, [\ ]_{\overset{2}{\wedge}(\phi)})$ で、$[T]_{\overset{2}{\wedge}(\phi)}$ は

$$[T]_{\overset{2}{\wedge}(\phi)} = T \cdot 1_{r-1} + \begin{bmatrix} -a_2\tau & \cdots & -a_{r-1}\tau & -a_r\tau \\ -a_3\tau^2 & \cdots & -a_r\tau^2 & 0 \\ \vdots & \iddots & & \\ -a_r\tau^{r-1} & & & \text{\huge 0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & \text{\huge 0} \\ a_1\tau & 0 & & \\ a_2\tau^2 & a_1\tau & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots \\ a_{r-2}\tau^{r-2} & \cdots & a_1\tau & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める．

(2) $\mathrm{Sym}^2(\phi)$ は abelian t－module $(\mathbb{G}_a^{r+1}, [\ ]_{\mathrm{Sym}^2(\phi)})$ で、$[T]_{\mathrm{Sym}^2(\phi)}$ は

$$[T]_{\mathrm{Sym}^2(\phi)} = T \cdot 1_{r+1} + \begin{bmatrix} 0 & a_1 & \cdots & & a_{r-1} & a_r \\ a_1\tau & a_2\tau & \cdots & & a_r\tau & 0 \\ a_2\tau^2 & a_3\tau^2 & \cdots & a_r\tau^2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & & & \\ a_{r-1}\tau^{r-1} & a_r\tau^{r-1} & & & \mathbf{0} & \\ a_r\tau^r & & & & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & \mathbf{0} & \\ 0 & a_1\tau & 0 & & & \\ 0 & a_2\tau^2 & a_1\tau & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & a_{r-1}\tau^{r-1} & \cdots & a_2\tau^2 & a_1\tau & 0 \end{bmatrix}$$

によって定める．

<u>定理4.2</u> (1) $\phi \otimes \phi \cong \mathrm{Sym}^2(\phi) \times \overset{2}{\wedge}(\phi)$．

(2) $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の作用と両立する $\hat{A}_f$－加群の同型がある：

$$\mathrm{Sym}^2(T_f(\phi)) \xrightarrow{\sim} T_f(\mathrm{Sym}^2(\phi)), \quad \overset{2}{\wedge}(T_f(\phi)) \xrightarrow{\sim} T_f(\overset{2}{\wedge}(\phi)).$$

定理4.2 (1)によって、$r \geqq 2$ のとき $\phi \otimes \phi$ は simple でないことがわかる．因みに、Yu は $r=1$ のときに $\phi \otimes \phi$ が simple であることを示している．

<u>§5．証明の概略</u>

定理4.2 (1)は、$\phi \otimes \phi$ から $\mathrm{Sym}^2(\phi) \times \overset{2}{\wedge}(\phi)$ への isomorphism が具体的に計算できる．残りの claim については $\Omega(E, f)$（E：abelian t－module）を用いて示す．

<u>定義5.1</u>　E を abelian t－module とする．E が

$$[T]_E \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^{(i)}$$

によって定義されているとき、次のようにして A は $\overline{K_\infty}[[x]]^n$（縦ベクトルの集合）へ次のようにして作

用する：

$$[T]_E \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{s} M_i \begin{bmatrix} h_1^{(i)} \\ \vdots \\ h_n^{(i)} \end{bmatrix} \quad \left(\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \overline{K_\infty}[[x]]^n \right).$$

ただし、$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ に対し $h(x)^{(i)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^{q^i} x^j$ とする．このとき、

$$\Omega(E, f) := \left\{ \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \overline{K_\infty}[[x]]^n \;\middle|\; \begin{array}{l} (1)\ \text{各 } h_i \text{ は } |x| \leq 1 \text{ で収束（ただし } |T| = q) \\ (2)\ \begin{bmatrix} x h_1 \\ \vdots \\ x h_n \end{bmatrix} = [f]_E \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \end{array} \right\}$$

とおく．

$\mathrm{rank}(\phi) = r$, $\mathrm{rank}(\psi) = s$ のとき、$\Omega(\phi, f)$, $\Omega(\psi, f)$, $\Omega(\phi \otimes \psi, f)$ はそれぞれ rank が r, s, rs の自由 A－加群となる．一般に $\forall \tilde{h}(x) \in \Omega(E, f)$ は

$$\tilde{h}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} e_E\left([f]_E^{-j}(\omega)\right) x^{j-1} \quad \left(\mathrm{Res}_{x=f}(\tilde{h}(x)) = -\omega \text{ のとき}\right)$$

となるから、$\tilde{h_i} = \sum_{j=1}^{\infty} h_{ij} x^{j-1}$ $(1 \leq i \leq \mathrm{rank}_A \Omega(E, f))$ が $\Omega(E,f)$ の基底なら、$(h_{ij})_{j \geq 1}$ 全体は $T_f(E)$ の基底になる．そこで $\Omega(\phi, f)$ と $\Omega(\psi, f)$ の基底から $\Omega(\phi \otimes \psi, f)$ の元をつくり、その係数が $T_f(\phi \otimes \psi, f)$ の基底になることを示すことによって定理 3.3 (1) を証明できる．

<u>定義 5.2</u>　$\overline{K}\{\tau\}$ は $\overline{K_\infty}[[x]]$ へ次のようにして作用する：

$u(\tau) = \sum_{i=0}^{s} u_i \tau^i$ と $h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ に対して、

$$u(h(x)) = \sum_{i=0}^{s} u_i h(x)^{(i)}$$

と定める．

$h \in \Omega(\phi, f)$ と $u : \phi \to \phi'$ に対して、$u(h) \in \Omega(\phi', f)$ であることがわかり、下の図式が可換になる．これより定理3.3 (2)がわかる．

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega(\phi, f) \times \Omega(\psi, f) & \longrightarrow & \Omega(\phi', f) \times \Omega(\psi, f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\Omega(\phi \otimes \psi, f) & \longrightarrow & \Omega(\phi' \otimes \psi, f)
\end{array}
$$

最後に定理4.2 (2)を示す．注意3.2の同型 $M : \phi \otimes \phi \xrightarrow{\sim} \phi \otimes \phi$ によって $T_f(\phi) \otimes_{A_f} T_f(\phi)$ の自己同型 $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ がひきおこされる． $P_1 : \phi \otimes \phi \to \mathrm{Sym}^2(\phi)$, $P_2 : \phi \otimes \phi \to \wedge^2(\phi)$ を projection とすると、$P_1 = \dfrac{1+M}{2}$, $P_2 = \dfrac{1-M}{2}$ となり、$P_1^2 = P_1$, $P_2^2 = P_2$, $P_1 + P_2 = 1$, $P_2 \circ P_1 = P_1 \circ P_2 = 0$ をみたす．よって定理4.2 (2)もいえた．

参考文献

1. G. Anderson, t-motives. Duke Math. J. 53 (1986), 457-502.
2. G. Anderson and D. Thakur, Tensor powers of the Carlitz module and zeta values. Ann. of Math. 132 (1990), 159-191.
3. P. Deligne and D. Husemöller, Survey of Drinfeld modules. Contemp. Math. 67 (1987), 25-91.
4. J. Yu, Transcendence and special zeta values in characteristic p. Preprint.