数理解析研究所講究録
第759巻 1991年 106-117


# 3次体の単数群の$\mathbf{R}_+{}^3$への action の基本領域について

京都大学理学部 岡崎龍太郎(Okazaki, Ryotaro)

## §0 Introduction.

$F$を総実な代数的数体とし、その次数を$n$とする。$F$は自然に$\mathbf{R}^n$ 埋め込まれる。

$$F \longrightarrow \mathbf{R}^n,\ \alpha \longrightarrow {}^t(\alpha^{(1)},\ldots,\alpha^{(n)})$$

($x^{(i)}$は相異なる埋め込み。)

さらに、$E_+$ を$F$の総正な単数の群とすると、$E_+$ は$\mathbf{R}_+{}^n$に成分ごとの掛け算で作用する。

$$e \in E_+,\ x = {}^t(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) \in \mathbf{R}_+{}^n$$
$$\longrightarrow ex = {}^t(e^{(1)}x^{(1)},\ldots,e^{(1)}x^{(n)}) \in \mathbf{R}_+{}^n$$

Shintani は有限個の半空間の共通部分をとることによりこの作用の基本領域を構成し、その基本領域がいくつかの "simplicical cone" の disjoint union であることを使い$L$-関数の特殊値を表わす公式を導いた。この公式は "simplicical cone" の辺が具体的に決定されれば特殊値の計算に使える形になっている。しかし Shintani の構成に現われる半空間の境界となる(超)平面のうちどの平面が実際に必要なのか、またそれらの交わってできる辺がどこにあるのかは実2次体 [Shintani] と巡回3次体[Nakamula] 以外には分かっていない。従って辺を具体的に決められるような "simplicical cone" の和の形の基本領域を求めることが意味を持って来る。筆者は一部の場合にはそのような基本領域を見つけられるという印象を持ったのでここに報告する。

線形独立な $r$ 個のベクトル $v_1,\dots,v_r \in \mathbf{R}_+{}^n$ に対して

$$C(v_1,\dots,v_r)=\{t_1v_1+\dots+t_rv_r : t_1,\dots,t_r\in\mathbf{R}\}$$

と定義する。$C(v_1,\dots,v_r)$ は$v_1,\dots,v_r$ を頂点とするランク$r$ の simplicical cone と呼ばれる。 $E_+$ の $\mathbf{R}_+{}^n$ への作用の基本領域で有限個の simplicical cone の disjoint union になっているものを $\mathbf{R}_+{}^n$ の Shintani 分解と呼ぶ。

以下では、$E_+$の生成元を基本単数系と呼ぶことにし、また $x={}^t(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\in\mathbf{R}^n$ に対して次の略記をする。

$$\mathrm{tr}\,x = x_1+\dots+x_n \ ;\ N(x)=x_1\dots x_n\,.$$

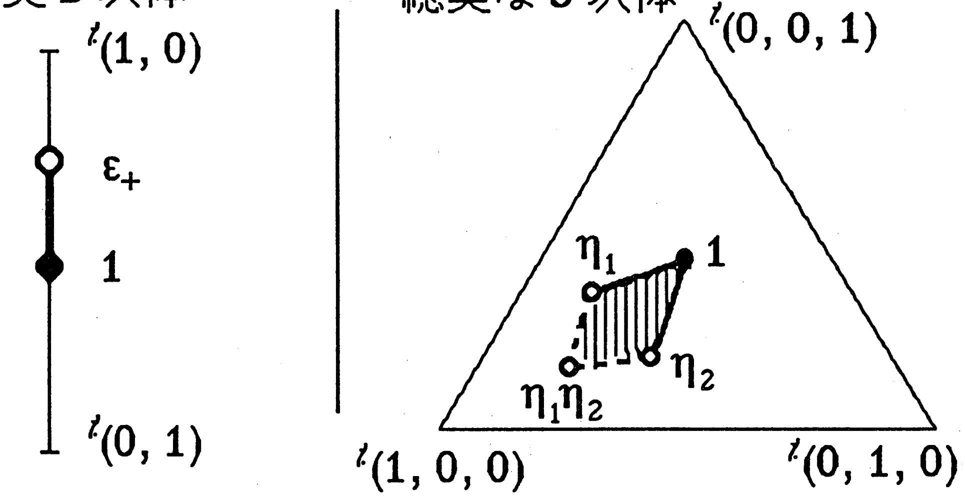
明らかに $E_+$ の作用とスカラー倍は可換であり $E_+$-orbit は光線 $\mathbf{R}x$ と2点以上で交わることはないのでここで扱う問題は $E_+$ の $\mathbf{R}_+{}^n/\mathbf{R}$ への作用の基本領域を求めることに帰着する。

そこで $\mathbf{R}_+{}^n/\mathbf{R}$ の代表系として次の(超)平面を考える。

$$T=\{x\in\mathbf{R}_+{}^n : \mathrm{tr}\,x=1\}$$

これを $\mathbf{R}1$ の方向から見ると下図のようになる。

実 2 次体　　　　総実な 3 次体




ここに、ε は実2次体の総正な基本単数、$\eta_1, \eta_2$ は総実な

3次体のある種の基本単数系である。

これらの場合には前述の基本領域より簡単なShintani分解が見つかっている。実2次体の場合は、$D_T^2 = C(1) \cup C(1, \varepsilon_+)$ であり[Shintani]、総実な3次体の場合は、$D_T^3 = C(1) \cup C(1, \eta_1) \cup C(1, \eta_2) \cup C(1, \eta_1, \eta_1\eta_2) \cup C(1, \eta_1\eta_2, \eta_2)$ である[Nakamula][Thomas-Vasquez]。

一方、普通のlog map：

$$\log : \mathbf{R}^n / \mathbf{R} \longrightarrow \mathrm{P} \subset \mathbf{R}^n$$

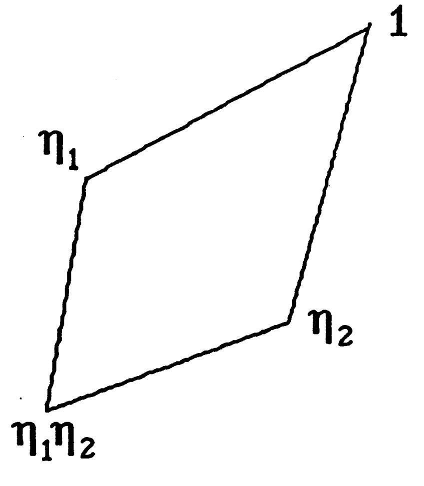
$$P = \{ u = {}^t(u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}) \in \mathbf{R}^n : u^{(1)} + \ldots + u^{(n)} = 0 \}$$

が $\log(x) = {}^t(\log(x^{(1)} / \sqrt[n]{Nx}), \ldots, \log(x^{(n)} / \sqrt[n]{Nx}))$ によって定義される。$E_+$ は $P$ に translation で作用する。

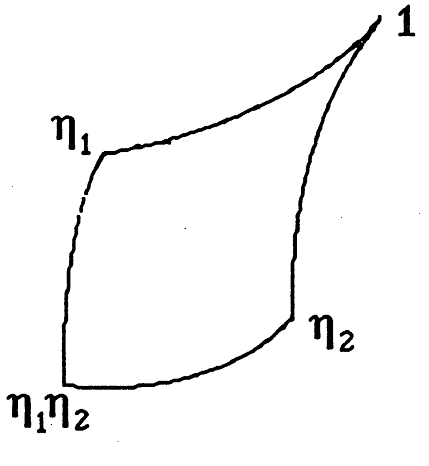
$$e \in E_+,\ u \in P \longrightarrow u + \log e \in P$$

$E_+$の生成元を決めるとこの作用の基本平行四辺形$D_P^n$ が取れる。総実な3次体の場合に $D_P^n$ と$D_T^n$ の図を $P$ の中で書くと下の様になり、$\log D_T^3$ は $D_P^3$ の辺を少し変形した形になる。

$D_P^3$




$\log D_T^3$



## §1 Expectation.

前の節の観測を少し精密にして次のような期待をする。

期待 1.

$F$ を一般の総実な代数体 とする。$E_+$ の適当な生成元 $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ を選び、対応する基本平行多面体

$$D_P{}^n = \{s_1 \log \eta_1 + \dots + s_{n-1} \log \eta_{n-1} : 0 \leq s_i < 1\}$$

をうまく分解して、

$$D_P{}^n = \cup_{j \in J} \mathrm{S}(\log \xi_{j,1}, \dots, \log \xi_{j,r(j)})$$

(但し、$J$ は添え字の有限集合、$r(j)$ は $j$ に依存するランクであり、$\xi_{j,i}$ は$\{\eta_1{}^{e_1} \dots \eta_{n-1}{}^{e_{n-1}} : e_i = 0, 1\}$の元すなわち$D_P{}^n$の頂点である。またS$(u_1, \dots, u_r)$ は $r = 1$ ならば $\{u_1\}$であり $r > 1$ の場合は $\{s_1 u_1 + \dots + s_r u_r : s_1 + \dots + s_r = 1, 0 < s_i < 1\}$である。) とすると、

$$D_T{}^n = \cup_{j \in J} \mathrm{C}(\xi_{j,1}, \dots, \xi_{j,r(j)})$$

という形の Shintani 分解が取れるのではないか。

期待 2.

さらに、上記の基本単数系として具体的に見つけることのできるような単数系があるのではないか。

これらのことを一般に証明する方法は見当もつかないが、3次体の場合はこの形になっている。また、4次体についても特殊な場合にはこれらの期待が成り立っている

ようだ。

期待2の基本単数系の選び方については3次体まではある種の最小性による特徴付けがあった。

1. Berwick の基本単数系

$\eta^{(1)} > 1 > \eta^{(2)}, \eta^{(3)} > 0$ を満たす単数のうちが最小となるものを$\eta_1$とする。

同様に$\eta^{(2)} > 1 > \eta^{(1)}, \eta^{(3)} > 0$ を満たす単数から$\eta_2$を選ぶ。

この単数系は3次体の場合には基本単数系になっていてShintani 分解を作るために使えるが、このような単数系は高次体の場合にはありそうにない。

2. 簡約された基本単数系

基本単数系$\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$に対応する$n-1$変数の2次形式

$$|x_1 \log \eta_1 + \ldots + x_{n-1} \log \eta_{n-1}|$$

が簡約されているとき$\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$を簡約された基本単数系という。簡約された基本単数系は高次体にも存在し、また3次体と後述する一部の4次体ではShintani 分解を作るために使えるが一般の4次体では使えない。

このような事情からShintani 分解に使う基本単数系を一般的に何らかの最小性で特徴付けるということはできないと考えられる。

## §2 Results

以下に、3次体とある種の4次体の場合について得られた結果をあげる。

**定理 1.**

$F$ を総実な3次体とする。$F$ の基本単数系 $\eta_1, \eta_2$ で

$$\eta_1^{(1)} > \eta_1^{(2)} > \eta_1^{(3)};\ \eta_2^{(1)} > \eta_2^{(3)} > \eta_2^{(2)}$$

を満たすものが無限に多数存在する。さらにこのような $\eta_1, \eta_2$ に対して、

$$D_T^3 = \{t_1 1 + t_2\eta_1 + t_3\eta_2 + t_4\eta_1\eta_2 : t_1 > 0,\ t_2,\ t_3,\ t_4 \geq 0\}$$

は凸な Shintani 分解である。

実巡回4次体についてつぎのことが知られている。$F$ を実巡回4次体とする。$\sigma$ を $F$ のガロワ群の生成元、$\varepsilon_+$ を $F$ に含まれる実2次体の総正な基本単数とすると、ある単数が $\eta$ 存在して $E_+$ は $\varepsilon_+, \eta, \eta^\sigma$ によって生成される。$\eta$ は中間体への相対ノルムが 1 か $\varepsilon_+$ になるように調節できるが、この相対ノルムが 1 になるような体が存在する [Hasse]。相対ノルムが 1 の場合 $\varepsilon_+, \eta, \eta^\sigma$ は簡約された基本単数系になる。相対ノルムが $\varepsilon_+$ の場合もほとんどの場合に $\varepsilon_+, \eta, \eta^\sigma$ は簡約された基本単数系になる。次の定理は簡単な行列式の計算と符号の評価を使って Thomas-Vasquez の方法によって証明できる。このとき符号の評価に相対ノルムが 1 であるということを使うのでこの定理は一般の巡回4次体では成立しない。また、一般には簡約された基本単数系を使って Shintani 分解を作ることは

できない。

定理2.

$F$を実巡回4次体とする。$\sigma$を$F$のガロワ群の生成元、$\varepsilon_+$を$F$に含まれる実2次体の総正な基本単数、$\eta$を$F$の総正な単数とする。さらに、$\eta$の中間体への相対ノルムが1であり、$F$の総正な単数の群$E_+$が$\varepsilon_+, \eta, \eta^\sigma$によって生成されていたと仮定する。このとき$\varepsilon_+$, $\eta$を選びなおして、$\eta^{(1)} > \eta^{(2)} > \eta^{(3)} > \eta^{(4)}$, $\varepsilon_+^{(1)} < \varepsilon_+^{(2)}$が成り立つようにする(但し、$\sigma$と${}^{(i)}$の関係は$(\eta^\sigma)^{(i)} = \eta^{(i+1)}$)。このとき次のShintani分解がある。

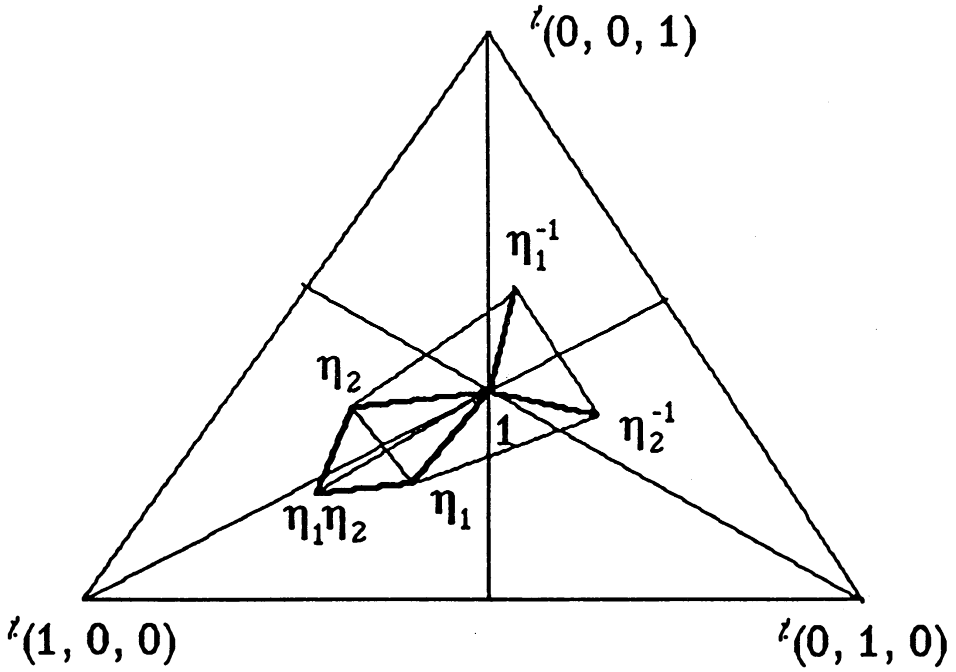
$$D_T{}^4 = C(1) \cup \bigcup_j C(1, \xi_j) \cup \bigcup_j C(1, \varepsilon_+\eta\eta^\sigma, \xi_j)$$
$$\cup \bigcup_j C(1, \xi_j, \xi_{j+1}) \cup \bigcup_j C(1, \varepsilon_+\eta\eta^\sigma, \xi_j, \xi_{j+1}).$$

定理2の証明は前述の通りなので、次に定理1の証明を述べる。この定理の後半の部分の証明はThomas-Vasquezの結果の別証になっている。

まず前半は$P$平面で考える。$\xi_1, \xi_2$を任意の基本単数系とする。但し、適当に調節して$P$のベクトル${}^t(2, -1, -1)$を2本のベクトル$\log\xi_1, \log\xi_2$がはさむようにする(ベクトル${}^t(2, -1, -1)$は直線$x^{(2)} = x^{(3)}$上にあり$x^{(1)} > 0$の方向を持つ)。このとき正の定数$c, r_1$があって等式${}^t(2, -1, -1) = c\log\xi_1 + cr_1\log\xi_2$が成り立つ。この$\xi_1, \xi_2$と$r_1$から始めて点列$\xi_i$と数列$r_i$を以下の式によって帰納的に定義する。$\log\xi_{i+2} = \log\xi_i - [r_i]\log\xi_{i+1}$, $r_{i+1} = 1/(r_i - [r_i])$。こ

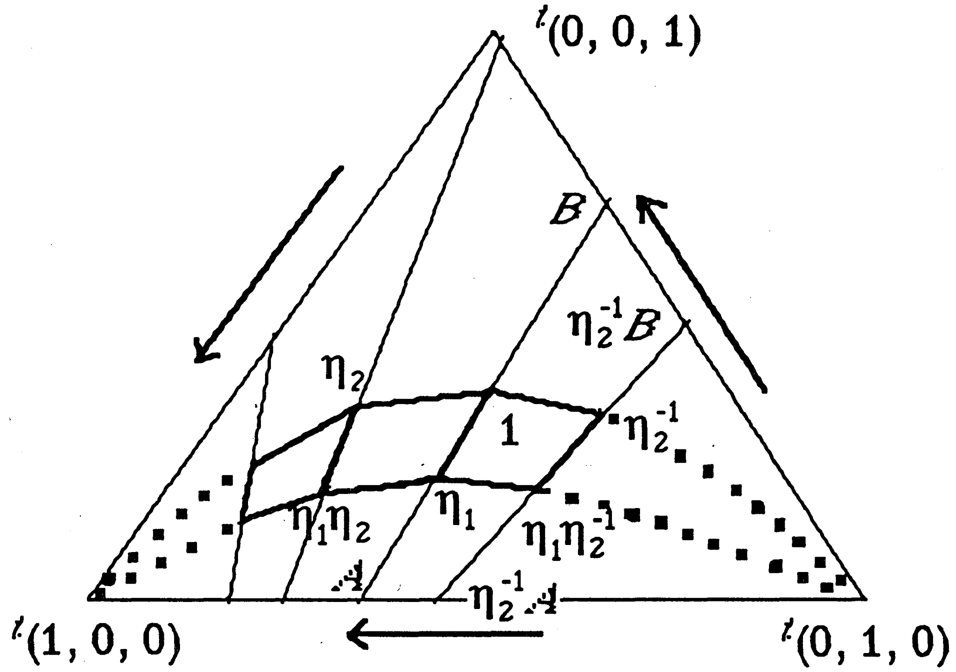
の$\xi_i$の方向は$i$を大きくすると${}^t(2, -1, -1)$の方向に近付いてゆく。従って十分大きな$i$について$\xi_i^{(1)} > \xi_i^{(2)}, \xi_i^{(3)}$が成立する。さらに、$\log \xi_i$と$\log \xi_{i+1}$は直線$x^{(2)} = x^{(3)}$の反対側にある(この直線の上には$\log E_+$の元はない)ので、$\xi_i, \xi_{i+1}$の一方を$\eta_1$他方を$\eta_2$として選んで不等式$\eta_1^{(1)} > \eta_1^{(2)} > \eta_1^{(3)}$; $\eta_2^{(1)} > \eta_2^{(3)} > \eta_2^{(2)}$を成立させることができる。

次に、後半は$T$平面(三角形)で考える。基本単数の取り方は下図のようになっていて、明らかに4個の三角形$(1, \eta_2, \eta_1)$, $(1, \eta_1, \eta_2^{-1})$, $(1, \eta_2^{-1}, \eta_1^{-1})$, $(1, \eta_1^{-1}, \eta_2)$は同じ向きを持っている。$E_+$の作用が三角形の向き保存することに注意すると、三角形$(1, \eta_2, \eta_1)$, $(\eta_2, \eta_1\eta_2, 1)$, $(\eta_1\eta_2, \eta_1, \eta_2)$, $(\eta_1, 1, \eta_1\eta_2)$が同じ向きを持っていることが分かり、従って、四角形$(1, \eta_2, \eta_1\eta_2, \eta_1)$は凸である。



そこで、この四角形$(1, \eta_2, \eta_1\eta_2, \eta_1)$を辺を含めて$\overline{D}$とする。集合$T_0 = \bigcup_{e \in E_+} e\overline{D}$が$T$ 平面全体を覆うことを言うためには$T_0$が境界を持たなければよい。$x$を$T_0$の境界の点とする。$\overline{D}$はコンパクトであり$E_+$の作用は不連続なので$x$の$e\overline{D}$が十分小さな近傍と交わるような$e \in E_+$は有限個しかない。故に$x$はある$e\overline{D}$の境界上にある。$E_+$の元を掛けることにより$x$が線分$\overline{1, \eta_1}$または線分$\overline{1, \eta_2}$上にあり、点$\eta_1, \eta_2$の何れでもないと仮定してよい。すると$x$はユニオン$\overline{D} \cup \eta_1^{-1}\overline{D} \cup \eta_2^{-1}\overline{D} \cup \eta_1^{-1}\eta_2^{-1}\overline{D}$の内部になければならず、これは$x$の取り方に反する。従って$T_0$は境界を持たない。すなわち、$T = \bigcup_{e \in E_+} e\overline{D}$である。

次にユニオン$\bigcup_{e \in E_+} e\overline{D}$のオーバーラップを調べる。



まず、$E_+$の中で$\eta_2$が生成する部分群を$<\eta_2>$と書き、小さなユニオン$\bigcup_{e\in<\eta_2>} e\overline{D}$を見よう。$T$ 平面に縁を付けて$\overline{T}$とする。$E_+$の作用は$\overline{T}$まで拡張されて、特に$\eta_2$の作用は前ページの図の矢印のようになる。ここで、線分$(1, \eta_1)$を延長して$\overline{T}$の縁に交わらせ、その交点を$A, B$とする。辺を含む四角形$(A, \eta_2^{-1}A, \eta_2^{-1}B, B)$を$Q$とすると$Q$は$\eta_2^{-1}\overline{D}$を含む。また、$\overline{T} = \bigcup_{e\in<\eta_2>} eQ$であり、重複は線分$(A, B)$の$<\eta_2>$による像に限られる。故に、ユニオン$\bigcup_{e\in<\eta_2>} e\overline{D}$は図のように点${}^t(0, 1, 0)$と${}^t(1, 0, 0)$を結ぶ帯状の領域でこのユニオンの中での重複は”隣り合う”四角形$e\overline{D}$と$\eta_2^{-1}e\overline{D}$が共有する線分$(e, e\eta_1)$のみである。この帯を$\overline{S}$とする。すると、$\bigcup_{e\in E_+} e\overline{D}$は$\overline{S}$を使って$\bigcup_{e\in<\eta_1>} e\overline{S}$と書ける。この帯のユニオンの重複は”隣り合う”帯の間の辺の共有に限られる。従って、$\overline{D}$から辺$(\eta_1, \eta_1\eta_2)$と$(\eta_2, \eta_1\eta_2)$点$\eta_1$, $\eta_2$及び$\eta_1\eta_2$を取り去った集合を$D$とすれば、$\bigcup_{e\in E_+} eD$はdisjoint unionである。$D$を$\mathbf{R}_+^n$からT$=\mathbf{R}^n/\mathbf{R}$への射映で引き戻すと$D_T^3$になり、$D_T^3 = \mathrm{C}(1)\cup\mathrm{C}(1, \eta_1)\cup\mathrm{C}(1, \eta_2)\cup\mathrm{C}(1, \eta_1, \eta_1\eta_2)\cup\mathrm{C}(1, \eta_1\eta_2, \eta_2)$であるから、$D_T^3$はShintani 分解である。

[証明終]

§3 Application

Shintani 分解の応用として$L$-関数の特殊値の公式があるがここでは、特に総実な3次体の総虚な2次拡大の類数公式をあげる。

$F$を総実な3次体とし、簡単のため$F$の類数は1だとする。$K$を$F$の総虚な2次拡大とし、$\chi$を対応する指標、d をその導手とし、$N_{K/F}$を$K$から$F$への相対ノルム、$H$を$K$の類数、$W_K$を$K$に含まれる1の巾根の数、$E_F$と$E_K$をそれぞれ$F$と$K$の単数群とし、$E_+$を$F$の総正な単数の群とする。また、$B_0, B_1, B_2, B_3$でBernoulli 多項式をあらわす。このとき$H$は次の公式によって与えられる。

$$H = \frac{8W_K}{3[E_F : E_+][E_F : N_{K/F}E_K]} L$$

但し、

$$L = -\sum_{j=1}^{2} \sum_{x \in R_{3,j}} \chi((x_1 + x_2\eta_j + x_3\eta_1\eta_2)\mathrm{d})G_j(x_1, x_2, x_3)$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} \sum_{y \in R_{2,j}} \chi((y_1 + y_2\eta_j)\mathrm{d})F_j(y_1, y_2)$$

$$- \sum_{z \in R_1} \chi((z)\mathrm{d})B_3(z)$$

ここに、多項式$F_j$ ,$G_j$は次のように定義され、

$$G_j(x_1, x_2, x_3) = [B_3(x_1)\,\mathrm{tr}\,\eta_j^{-1}\eta_1^{-1}\eta_2^{-1}$$
$$+ B_3(x_2)\,\mathrm{tr}\,\eta_j^{2}\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + B_3(x_2)\,\mathrm{tr}\,\eta_j^{-1}\eta_1^{2}\eta_2^{2}$$
$$+ 3B_2(x_1)\{B_1(x_2)\,\mathrm{tr}\,\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + B_1(x_3)\,\mathrm{tr}\,\eta_j^{-1}\}$$
$$+ 3B_2(x_2)\{B_1(x_1)\,\mathrm{tr}\,\eta_j\eta_1^{-1}\eta_2^{-1} + B_1(x_3)\,\mathrm{tr}\,\eta_j\}$$
$$+ 3B_2(x_3)\{B_1(x_1)\,\mathrm{tr}\,\eta_j^{-1}\eta_1\eta_2 + B_1(x_2)\,\mathrm{tr}\,\eta_1\eta_2\}$$
$$+ 9B_1(x_1)B_1(x_2)B_1(x_3)]/\,6$$

$$F_j(y_1, y_2) = [B_2(y_1)\mathrm{tr}\,\eta_j^{-1} + B_2(y_2)\mathrm{tr}\,\eta_j + 6B_2(y_1)B_2(y_1)]/\,2$$

集合$R_*$は以下のように定義される。

$$R_1 = \{z \in [0, 1) : z \in d^{-1}\},$$
$$R_{2,j} = \{y = (y_1, y_2) \in [0, 1)^2 : y_1 + y_2\eta_j \in d^{-1}\}$$
$$R_{3,j} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in [0, 1)^3 : x_1 + x_2\eta_j + x_3\eta_1\eta_2 \in d^{-1}\}$$

## References


[Hasse] H.Hasse "Arithmetische Bestimmung von Grundeinheit und Klassenzahl in zyklischen kubischen und biquadratischen Zahlkörpern", Math. Abhandlungen Band 3 pp 289-379

[Nakamula] K.Nakamula "On a fundamental domain of $\mathbf{R}_+^3$ for the action of the group of totally positive units of a cyclic cubic field", J. Fac. Sci. U. Tokyo IA24 (1977) pp 701-713

[Shintani] T.Shintani "On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non positive integers", J. Fac. Sci. U. Tokyo IA23 (1976) pp 393-417

[Thomas-Vasquez] E.Thomas & A.T.Vasquez "On the resolution of cusp singularities and the Shintani decomposition in totally real cubic number fields", Math. Ann. 247 (1980) pp 1-20