

代数体の λ -invariant と normal basis

東京農工大 小松啓一 (Keiichi Komatsu)

有限次代数体 K に対して, その整数環を \mathcal{O}_K と表し, 有限次ガロア拡大 K/\mathbb{Q} に対し, そのガロア群を $G(K/\mathbb{Q})$ と表す.

定義 有限次ガロア拡大 K/\mathbb{Q} が normal integral basis を持つとは, \mathcal{O}_K の元 α が存在して, $\{\alpha^g\}_{g \in G(K/\mathbb{Q})}$ が \mathcal{O}_K/\mathbb{Z} の basis になることである。このとき, α は K/\mathbb{Q} の normal integral basis を生成するという。

この normal integral basis については次の Noether の結果が基本的である。

定理 有限次ガロア拡大 K/\mathbb{Q} が normal integral basis を持つならば, K/\mathbb{Q} は tamely ramify である。

上の定理によれば, \mathbb{Z}_p -拡大の中間体は normal integral basis を持たないが, 最近 Kersten, Michalíček [1] に

より, \mathbb{Z}_p -拡大に対して, 興味深い normal basis が導入された。即ち, p を奇素数とし, K/\mathbb{Q} を \mathbb{Z}_p -拡大とし,
 $\mathbb{Q} \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_m \subset \cdots \subset K \quad (K_m/\mathbb{Q}) = p^m$
 とする。

定義 \mathbb{Z}_p -拡大 K/\mathbb{Q} が広義 normal integral basis を持つとは, すべての自然数 n に対して, $\mathcal{O}_{K_n}[\frac{1}{p}]$ の元 α_n が存在して, $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が $\mathcal{O}_{K_n}[\frac{1}{p}]/\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}[\frac{1}{p}]$ の basis になることである。

この定義をもちいて, [1] で次の定理が示された。

定理 奇素数 p に対して, $\zeta_1 = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}(\zeta_1)$
 \mathbb{Q}^+ を \mathbb{Q} の最大実部分体とし, \mathbb{Q}^+ を \mathbb{Q}^+ の類数とする。このとき, 次の (1) と (2) は同値である。

(1) \mathbb{Q}^+ は p で割れない。

(2) \mathbb{Q} のすべての \mathbb{Z}_p -拡大は広義 normal integral basis を持ち, \mathbb{Q}^+ の cyclotomic \mathbb{Z}_p -拡大の λ -invariant は 0 になる。

上の定理から, \mathbb{Z}_p -拡大の広義 normal integral basis

の存在と類数, 特に岩沢不変量の間に関係があると思われるが, この小論では虚2次体の \mathbb{Z}_p -拡大の広義 normal integral basis と λ -invariant の関係について述べる。そこで, F を虚2次体とし, $\mathfrak{k} = F(\zeta_p)$ とし,

$\chi: G = G(\mathfrak{k}/F) \rightarrow \mathbb{Z}_p^\times$ を Teichmüller character 即ち, G から p 進整数環の乗法群 \mathbb{Z}_p^\times への homomorphism と $\xi_g = \xi_1^{\chi(g)}$ $\forall g \in G$ とするものとする。さらに G の位数を $\#G$ とし, $e_i = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \chi(g)^i g^{-1}$ と置く。このとき次の定理が得られた。

定理 p を奇素数, $\zeta_p = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p}}$, F を虚2次体 $\mathfrak{k} = F(\zeta_p)$, \mathfrak{k}^+ を \mathfrak{k} の最大実部分体, A^+ を \mathfrak{k}^+ のイデアル類群の p sylow 部分群, F_0 を F の cyclotomic \mathbb{Z}_p -拡大とする。さらに, p の上にある \mathfrak{k}^+ の素 ideal はただ一つで, A^{e_i} は non-trivial とする。このとき, F の \mathbb{Z}_p -拡大 K で $K \cap F_0 = F$ で, K/F が広義 normal integral basis を持つものが存在するならば, \mathfrak{k}^+ の cyclotomic \mathbb{Z}_p -拡大の λ -invariant は 0 でない。

系 正の整数 m を square free とし, $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-m})$ とする。このとき上の $\mathfrak{k} = F(e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{-m}, \sqrt{-3})$, $\mathfrak{k}^+ = \mathbb{Q}(\sqrt{3m})$

となる。 \mathbb{Q}^+ の類数が3で割り、3の上にある \mathbb{Q}^+ の素イデアルがただ1つで、 F の \mathbb{Z}_p -拡大 K で $K \cap F_\infty = F$ で K/F が広義 normal integral basis を持つものがあるならば、 \mathbb{Q}^+ の cyclotomic \mathbb{Z}_3 -拡大の λ -invariant は0でない。

Reference

- [1] I. Kersten and J. Michalíček, On Vandiver's conjecture and \mathbb{Z}_p -extensions of $\mathbb{Q}(\zeta_p^m)$, J. Number Theory 32 (1989), 371-386