数理解析研究所講究録
第 760 巻 1991 年 1-2

一次元力学系の弱正則性について

辻井　正人

京都大学理学部数学教室

ここでは 一次元の C^2写像, $f:[0,1]\to[0,1]$ の エルゴード的な性質について考える。まず、次のような Borel 確率測度の空間, $\mathcal{M}([0,1])$, の上の関数 $\bar{\chi}(\cdot)$ を考える。

$$\bar{\chi}:\mathcal{M}([0,1])\longrightarrow \mathbf{R}\cup\{-\infty\}$$

$$\bar{\chi}(\mu)=\int_{[0,1]}\log|df(x)|d\mu(x).$$

ここで $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}$ には、開集合 (a,b) と $[-\infty,b)$, $a,b\in\mathbf{R}$ で生成される位相を考える。もし、f が critical point を持てば、$\bar{\chi}(\cdot)$ は不連続になる。この事実は系 f の解析をする上でのいくつかの困難を引き起こす。そこで我々は次のような正則性条件を考える。

DEFINITION.

(1) 点 $x\in[0,1]$ が弱正則であるとは、関数 $\bar{\chi}(\cdot)$ の集合

$$\{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(x)}\mid n\in\mathbf{N}\}$$

の閉包への制限が連続であることとする。

(2) C^2写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ が弱正則であるとは、*Lebesgue* 測度についてほとんど全ての点が弱正則であることである。

$\mathcal{A}^r$ $(r\geq 2)$ を C^r写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ で次の条件 (A1) と (A2) を満たすものとする。

(A1) f の critical point は全て非退化である。

(A2) $f([0,1])\subset(0,1)$ かつ $\{c_i\}_{i=1}^d\subset(0,1)$。

弱正則な系に対しては次が成り立つ

THEOREM A. もし、写像 $f\in\mathcal{A}^r$ が弱正則ならば二つの開集合 $U_1,U_2\subset M$ があって次の条件を満たす。

(1) U_1 は全ての *hyperbolic periodic sinks* の *basin* の和である。

(2) U_2上のほとんど全ての点は正のリャプノフ指数を持つ絶対連続な *ergodic measure* に対して *generic* になる。

(3) 絶対連続な確率測度 ν が $\nu(U_1\cup U_2)=0$, を満たすとき、

$$\omega_f(\nu)\subset\mathcal{M}^0(f)\equiv\{\,\mu\in\mathcal{M}_f\mid\chi(x)=0\quad\mu\text{-}a.e.\}$$

ここで $\omega_f(\nu)$ は $\{n^{-1}\sum_{j=0}^{n-1} f^j(\nu)\}_{n=1}^{\infty}$ の極限集合、$\chi(x)$ は *Lyapunov exponent* 即ち、

$$\chi(x) = \limsup_{n\to+\infty} n^{-1}\log|df^n(x)|。$$

系として次が得られる。

Corollary. もし C^r 写像 $f \in \mathcal{A}^r$ が弱正則であるとき、任意の絶対連続な確率測度 ν について

$$\omega_f(\nu) \subset \{\mu \in \mathcal{M}_f \mid \mu \text{ は } \textit{Pesin} \text{ の } \textit{entropy formula} \text{ を満たす。}\}.$$

ここで *Pesin* の *entropy formula* とは、次の等式である。

$$h_\mu(f) = \int \max\{\chi(x), 0\} d\mu(x).$$

次に問題になるのは、弱正則な系が十分多いかということである。C^r 写像の空間, $C^r([0,1],[0,1])$, を考え、そこに C^r-norm, $\|\cdot\|_{C^r}$, と C^r-topology を与える。$C^r(M,M)$ の中で弱正則な系の全体を $\mathcal{R}^r$ と書くことにする。このとき次が得られる。

Theorem C. $\mathcal{R}^r$ は $\mathcal{A}^{r,1}$ の *open dense subset* を含む。($r \geq 2$)

Theorem D. C^r-写像の空間 $C^r([0,1],\mathbf{R})$ 上の *Borel* 確率測度 m がその部分空間 $C^q([0,1],\mathbf{R})$ $(q > r)$ に沿って *quasi-invariant* であるとき、

$$m(\mathcal{A}^{r,1} - \mathcal{R}^r) = 0. \quad (r \geq 2)$$

特に、therem D から次の事実が得られる。

Corollary. n-parameter 族, $F(x,t) \in C^r([0,1]\times[-1,1]^n)$, の中で

$$\{t \in [-1,1] \mid F(\cdot,t) \in \mathcal{A}^{r,1} - \mathcal{R}^r\}$$

の *Lebesgue* 測度が *0* になるものは稠密である。

References

1. M.Tsujii, *A measure on the space of mappings and dynamical system theory* (preprint).
2. M.Tsujii, *Weak regularity of Lyapunov exponents in one dimensional dynamics* (preprint).