数理解析研究所講究録
第 760 巻 1991 年 11-23

"$\mathcal{F}^1(M)$に属するdiffeomorphismはAxiom Aを満たす"について

早大 教育　林 修平 (Shuhei Hayashi)

Mは境界のないC^∞ compact manifold、$\mathrm{Diff}^1(M)$をMのC^1diffeomorphismの集合で、C^1 topologyを持つものとする。$\Omega(f)$は、$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$のnonwandering setとする。$\mathcal{F}^1(M)$は、次のような$f\in \mathrm{Diff}^1(M)$の集合である — fのあるC^1近傍$\mathcal{U}$が存在して、すべての$g\in\mathcal{U}$のperiodic pointはすべてhyperbolicである。

この小論では、次の定理の証明の概略を述べる。

<u>定理</u>　$f\in\mathcal{F}^1(M)$ならば、fはAxiom Aを満たす。

これは、Mañéのconjectureであり、詳しい背景は、[3], [4]を参照。

§1、定理の命題への帰着

$f\in\mathcal{F}^1(M)$について、これまで知られている結果を述べる。$P(f)$はfのperiodic pointの集合を表し、$\overline{P}(f)$は$P(f)$のclosureとする。$f\in\mathcal{F}^1(M)$ならば、$\Omega(f)=\overline{P}(f)$である。$P_i(f)$を$x\in P(f)$の集合

で、$\dim E^s(x)=i$ のものとすると、$\Omega(f)=\bigcup_{i=0}^{\dim M}\overline{P}_i(f)$ で、$P_0(f)$, $P_{\dim M}(f)$ は finite set である。さらに、各 $0<i<\dim M$ に対し、dominated splitting $TM|\overline{P}_i(f)=\tilde{E}_i^s\oplus\tilde{E}_i^u$ と、定数 $0<\lambda_1<1$, $m\in\mathbb{Z}^+$ が存在して、

$$\|(Df^m)|\tilde{E}_i^s(x)\|\cdot\|(Df^{-m})|\tilde{E}_i^u(f^m(x))\|\leq\lambda_1 \qquad (1)$$

がすべての $x\in\overline{P}_i(f)$ に対して成り立つ。

定理を証明するためには、[3] と同様に、以下のように進める。$\Omega(f)=\overline{P}(f)$ は知られているので、(pugh の closing lemma による)、$\Omega(f)$ が hyperbolic であることをいえば十分である。$\overline{P_0}(f)$ が hyperbolic (finite だから) であるから、$\bigcup_{0\leq i\leq j}\overline{P}_i(f)$ が hyperbolic であると仮定して、$\overline{P}_{j+1}(f)$ の hyperbolicity を示せばよい。そのためには、$P_{j+1}(f)$ が $\bigcup_{0\leq i\leq j}\overline{P}_i(f)$ に集積している場合のみを考えればよい([3])。ここで、$\bigcup_{0\leq i\leq j}\overline{P}_i(f)$ は $\Lambda_1\cup\ldots\cup\Lambda_\ell$ と basic set の disjoint union でかけることはよく知られている。そこで、$P_{j+1}(f)$ は $\overline{P}_0(f)$ に集積しえないので、$\Lambda_1\cup\ldots\cup\Lambda_\ell=\bigcup_{1\leq i\leq j}\overline{P}_i(f)$ と仮定してよい。Mañé は [3] で、$f\in\mathcal{F}^1(M)$ なら、f のある C^1 近傍 $\mathcal{U}$ が存在して、$g\in\mathcal{U}$ が $\bigcup_1^\ell\Lambda_t$ のある近傍で f と一致していれば、$W_g^s(\Lambda_t)\cap W_g^u(\Lambda_t)=\Lambda_t$ がすべての $1\leq t\leq\ell$ に対して成り立つこと (*) を示した。従って定理の証明は、次の命題の証明に帰着される。

<u>命題</u>　$f \in \mathcal{F}'(M)$で、$P_{j+1}(f)$が$\cup_1^\ell \Lambda_t$に集積していれば、fにC^1でいくらでも近いgで、fと$\cup_1^\ell \Lambda_t$のある近傍で一致し、ある$1 \le t \le \ell$に対し、$W^s_g(\Lambda_t) \cap W^u_g(\Lambda_t) - \Lambda_t \neq \phi$となるものが存在する。

§2、準備

Mは、$TM \mid \cup_1^\ell \Lambda_t = E^s \oplus E^u$がhyperbolic splittingならば、ある$0 < \lambda_0 < 1$が存在して、すべての$x \in \cup_1^\ell \Lambda_t$に対し、$\|(Df)|E^s_x\| < \lambda_0$, $\|(Df^{-1})|E^u_x\| < \lambda_0$となるようなRiemannian metricを持つと仮定する。

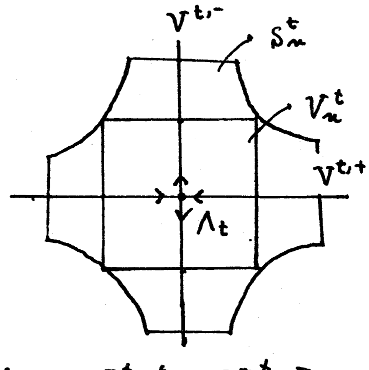
$$W^s_\varepsilon(\Lambda_t) = \bigcup_{x \in \Lambda_t} W^s_\varepsilon(x)$$

$$W^u_\varepsilon(\Lambda_t) = \bigcup_{x \in \Lambda_t} W^u_\varepsilon(x)$$

とし、小さな$\varepsilon_1 > 0$を選び、compact sets

$$V^{t,+} = W^s_{\varepsilon_1}(\Lambda_t)$$

$$V^{t,-} = W^u_{\varepsilon_1}(\Lambda_t)$$



を定義する。このとき、

$$f(V^{t,+}) \subset V^{t,+}, \quad f^{-1}(V^{t,-}) \subset V^{t,-}, \quad \Lambda_t = V^{t,+} \cap V^{t,-}$$

である。さらに、

$$V^t_n = \{x \mid d(x, V^{t,+}) \le r_n,\ d(x, V^{t,-}) \le r_n\}$$

と定義する。ここに、$r_n = r_0^{(1+\delta)^n}$, $(n = 0, 1, \cdots)$, $0 < \delta < 1$で、$0 < r_0 < 1$はいくらでも小さくてよい。S^t_nは、$x \in V^t_0$

の集合で次のようなものとする。$x = f^m(y)$, $m \in \mathbb{Z}$, $y \in V_n^t$ で、$m \geq 0$ ならすべての $0 \leq j \leq m$ に対して、また、$m < 0$ ならすべての $m \leq j \leq 0$ に対して、$f^j(y) \in V_0^t$、となるようなものである。

$V^+ = \bigcup_1^\ell V^{t,+}$, $V^- = \bigcup_1^\ell V^{t,-}$, $V_n = \bigcup_1^\ell V_n^t$, $S_n = \bigcup_1^\ell S_n^t$ として、$\Lambda = \bigcup_1^\ell \Lambda_t$ とおく。(union はすべて disjoint とする。)

異なる点からなる finite backward orbit を <u>string</u> と呼ぶ。$\sigma = \{x, \cdots, f^j(x)\} \subset V_0^t$, $f(x) \notin V_0^t$, $f^{-(j+1)}(x) \notin V_0^t$ であるような string σ を <u>0-string</u> と呼ぶ。0-string に対し、order relation $\sigma' > \sigma''$ を $\sigma' \neq \sigma''$ で、σ'' は σ' の backward にあるとき、として定義できる。(x, y) で $\{x, \cdots, f^{-j}(x)\}$, $f^{-j}(x) = y$ なる string を表す。さらに $\{(x_k, y_k)\}$ で、string (x_k, y_k), $(k = 1, 2, \cdots)$ の列を表す。ただし、$y_k = f^{-t_k}(x_k)$ のとき、$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ であるとする。

$\hat{\Lambda}$ を $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の compact invariant set で dominated splitting $TM|\hat{\Lambda} = E \oplus F$ を持つものとする。$m \in \mathbb{Z}^+$ と $0 < \gamma < 1$ に対し、$(x, y) \subset \hat{\Lambda}$ が

$$\prod_{j=1}^{[\frac{n}{m}]} \| (Df^m) | E(f^{-mj}(x)) \| \leq \gamma^{[\frac{n}{m}]},$$

$f^{-n}(x) = y$, $n \geq m$, を満たすとき、(x, y) は <u>(m, γ)-string</u> という。また、$(f^{-mj}(x), f^{-m[\frac{n}{m}]}(x))$ がすべての $0 \leq j < [\frac{n}{m}]$ に対し、(m, γ)-string, ただし、$f^{-m[\frac{n}{m}]}(x) = y$、のとき、

(x, y) は、uniform (m, γ)-string であるという。さらに、$\hat{\Lambda}$ における $\{(x_k, y_k)\}$ が、(m, γ)-sequence であるとは、(x_k, y_k) が、十分大なる k に対し、(m, γ)-string であるときをいう。特に、それが、十分大なる k に対し、uniform (m, γ)-string であるとき、strongly (m, γ)-sequence であるという。これらの定義は、$\overline{P_{j+1}(f)}$ における string に対して用いられるので、今後、$\hat{\Lambda} = \overline{P_{j+1}(f)}$, $E = \tilde{E}^s_{j+1}$, $F = \tilde{E}^u_{j+1}$, m は $i = j+1$ に対し、(1) で与えられたもの、$0 < \gamma < 1$ は、[3] にあるように適切に選ばれているもの、と仮定する。

§3、Three lemmas

この章では、命題を証明するための基本的な lemma を、挙げる。

(3.1) Lemma　すべての $\hat{n} > 0$ に対して、次のどれか1つが成り立つとする。

a) $n \geq \hat{n}$, $1 \leq t \leq \ell$, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の ordered 0-strings $\sigma' > \sigma''$ で、S^t_{n+1} に含まれるものが存在して、すべての $\sigma' > \sigma > \sigma''$ に対し、$\sigma \cap (S^t_n - S^t_{n+1}) = \phi$ である。

b) $n \geq \hat{n}$, $1 \leq t \leq \ell$, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の 0-string σ' で、$S^t_{n+1} \cap W^u_f(\Lambda_t)$ に含まれるものが存在して、すべての $\sigma < \sigma'$

に対し、$\sigma \cap (S_n^t - S_{n+1}^t) = \phi$ である。

c) $n \geq \hat{n}$, $1 \leq t \leq \ell$, $f \in \mathrm{Diff}^1(M)$ の o-string α' で、$S_{n+1}^t \cap W_f^s(\Lambda_t)$ に含まれるものが存在して、すべての $\alpha > \alpha'$ に対し、$\sigma \cap (S_n^t - S_{n+1}^t) = \phi$ である。

このとき、f に C^1 でいくらでも近い $g \in \mathrm{Diff}^1(M)$ で、f と Λ のある近傍で一致し、$W_g^s(\Lambda_t) \cap W_g^u(\Lambda_t) - \Lambda_t \neq \phi$ となるものが存在する。

(3.1) は、[2] の Theorem I.1 の証明の中で暗に証明されている。この Lemma により、命題の証明は (3.1) の仮定の満足を示すような string を見つけることに帰着される。

(3.2) Lemma　$\{(x_k, y_k)\}$ を $f \in \mathcal{F}^1(M)$ の string の列とし、$N_k(i)$ は $(x_k, y_k) \cap S_n^i$ の点を含む o-string の数が ≤ 1 となる最小の $n \in \mathbb{Z}^+$ とする。$\{(x_k, y_k)\}$ は、ある $1 \leq t \leq \ell$ に対し、次のような性質を満たすとする。

a) $L \in \mathbb{Z}^+$ (k によらない) が存在して、すべての十分大なる k に対し、

$$S_{N_k(t)+L} \cap (x_k, y_k) = \phi\ ;$$

b) $\lim_{k \to \infty} N_k(t) = \infty$.

このとき、$\{(x_k, y_k)\}$ は (m, γ)-sequence である。

(3.2) は、[2] の Lemma 4 の証明の議論を (3.1) と (*) を用いて行なった結果 ((3.2) の仮定 $\Rightarrow \{(x_k, y_k)\}$ から自然に誘導されるすべての invariant measure μ に対し、$\mu(\Lambda) = 0$) と、「$\{(x_k, y_k)\}$ が not an (m, γ)-sequence $\Rightarrow \exists \mu(\Lambda) > 0$」(本質的に [3] の Lemma V. 7 の証明にある) からわかる。次の Lemma は、[2] の Lemma 2 と Lemma 3 からわかる。

(3.3) <u>Lemma</u> $L_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ が存在して、ある $1 \le t \le \ell$ に対し、$x \notin V_0^t$ ですべての $0 \le i \le j$ に対し、$d(f^{-i}(x), f^{-i}(z)) \le r_0/3$ のとき、$f^{-j}(z) \in V_n^t$ かつ $n \ge n_1$ ならば、$f^{-j}(x) \in S_{n-L_0}^t$ である。さらに、上の f が f^{-1} で置き換えられたものもまた正しい。

§4. (m, γ)-sequence と quasihyperbolic point

さて、命題の証明について述べることにする。命題の仮定により、periodic point の列 $\{p_k\} \subset P_{j+1}(f)$ で Λ に収束するものが存在する。ここで、十分大なる k に対し $p_k \in V_0^1$ であり、

$$\tau(\sigma_k) = \max\{n \mid S_n^1 \cap (p_k, f^{-a_k}(p_k)) \neq \phi\}$$
$$= \max\{n \mid S_n \cap (p_k, f^{-a_k}(p_k)) \neq \phi\}$$

と仮定して一般性を失なわない。ただし、ここで σ_k は、p_k を含む o-string、$a_k + 1$ は p_k の周期、そして $\tau(\cdot)$ は次のような non-negative integer である — すべての o-string $\sigma \subset V_0^t$ に対して、$\tau(\sigma)$ は $\sigma \subset S_{\tau(\sigma)}^t - S_{\tau(\sigma)+1}^t$ なるもの —。

$x_k^{(i)}, (i \geq 1)$ は p_k の backward orbit で V_0' を出てから最初に $V'_{\tau(\sigma_k)-2iL_1}$ に入ったものとする。ここに、$L_1 > 0$ は $L_1 \geq 5L_0$ なる整数であり、L_0 は (3.3) で与えられているものとする。さらに、$y_k^{(i)}$ は、$x_k^{(i)}$ の backward orbit で V_0' をでてから、最初に、$V'_{\tau(\sigma_k)-2iL_1-L_1}$ に入った点とする。このとき、(3.1) と (*) から、$\{(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})\}$ は (3.2) の仮定を満たすことがわかり、大きな k に対して、

$$S'_{\tau(\sigma_k^{(i)})-L_1+1} \cap \left((x_k^{(i)}, y_k^{(i)}) - \sigma_k^{(i)} \right) = \phi \qquad (2)$$

(ここに、$\sigma_k^{(i)}$ は $x_k^{(i)}$ を含む 0-string) が成り立つこともわかる。従って、(3.2) と [3] の Lemma II.3 によって、次の性質を得る。すべての $i \geq 1$ に対し、

a) $\{(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})\}$ は (m, γ)-sequence.

b) すべての $\gamma < \gamma_1 < 1$ に対し、k が十分大きければ、$z_k^{(i)}$ が存在して、$z_k^{(i)}$ は $(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ 上にあり、$\{(x_k^{(i)}, z_k^{(i)})\}$ は strongly (m, γ_1)-sequence である。

$z_k^{(i)}$ は、$(x_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ 上で、b) を満たす最後の点とする。$s_k \geq 0$, $t_k \geq 0$ をそれぞれ、$x_k^{(i)} = f^{s_k}(z_k^{(i)})$, $y_k^{(i)} = f^{-t_k}(z_k^{(i)})$ なるものとする。上の $z_k^{(i)}$ の選択により、$\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ のとき、$(z_k^{(i)}, y_k^{(i)})$ は次の性質を持つ—ある $0 < \hat{\gamma} < 1$ が存在して、すべての $N_2 \leq j \leq t_k$ と大きな k に対して、

$$\prod_{l=0}^{[j/m]-1} \| (Df^{-m}) | F(f^{-ml}(z_k^{(i)})) \| \leq \hat{\gamma}^{[\frac{j}{m}]}$$

ここに、N_2はkによらない正の整数である。従って、b)と合わせて、$z_k^{(i)}$は大きなkに対し、"quasihyperbolicity"を持つ。

§4、A shadowing string

dominated splitting $TM|\hat{\Lambda} = E \oplus F$に関連して、それぞれ、$F(x)$, $E(x)$, $(x \in \hat{\Lambda})$にxで接するlocally invariantなembedded C^1 disks $D^F(x)$, $D^E(x)$の連続なfamilyが存在する。$D_r^F(x)$, $D_r^E(x)$をそれぞれ、$D^F(x)$, $D^E(x)$の点でxへの距離が$\le r$であるものの集合とする。([1]を参照)

$z_k^{(i)}$のquasihyperbolicityによって、$\hat{\delta} > 0$が与えられたとき、$r > 0$が存在してkが十分大きければ、次のような性質がすべての$i \ge 1$に対して成り立つ。

a) すべての$0 \le j \le t_k$に対して、$\operatorname{diam} f^{-j}(D_r^F(z_k^{(i)})) < \hat{\delta}$.

b) すべての$0 \le j \le s_k$に対して、$\operatorname{diam} f^{j}(D_r^E(z_k^{(i)})) < \hat{\delta}$.

さて、$\bar{z}^{(i)}$, $(i \ge 1)$を$\{z_k^{(i)}\}$の集積点とするとき、すべての$i \ge 1$に対して、$\bar{z}^{(i)} = \lim_{k \to \infty} z_k^{(i)}$と仮定してよい。

$$\Gamma = \{x \mid x \in V^{1,-} \text{ and } d(x, V^{1,+}) \le 2r_0\}$$

と定義する。最初に考える場合は、すべての$i \ge 1$に対し、$\bar{z}^{(i)} \notin \Gamma$となる場合である。このとき、$\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$である。Mはcompactなので、すべての$\varepsilon > 0$に対し、$i_1 < i_2$で、$d(\bar{z}^{(i_1)}, \bar{z}^{(i_2)}) < \varepsilon$となるものが選べる。$t_k' \ge 0$, $s_k'' \ge 0$を

それぞれ、$y_k^{(i_1)} = f^{-t_k'}(z_k^{(i_1)})$, $x_k^{(i_2)} = f^{s_k''}(z_k^{(i_2)})$ とする。簡単のため、$z_k^{(i_1)} = z_k'$, $z_k^{(i_2)} = z_k''$, $y_k^{(i_1)} = y_k'$, $x_k^{(i_2)} = x_k''$, $\tau(\sigma_k^{(i_2)}) = \tau_k$ とかく。このとき、与えられた $r>0$ に対し、ε を十分小さくとれば、すべての十分大なる k に対し、

$$D_r^F(z_k') \cap D_r^E(z_k'') \neq \phi$$

となる。w_k をその intersection とすると、上の a), b) により、r を十分小さくとれば、すべての $0 \leq j \leq t_k'$ に対し、

$$d(f^{-j}(w_k), f^{-j}(z_k')) < r_0/3 \qquad (3)$$

であり、すべての $0 \leq j \leq s_k''$ に対して、

$$d(f^j(w_k), f^j(z_k'')) < r_0/3$$

である。従って、すべての十分大なる k に対し、$f^{-t_k'}(w_k) \in V_0'$, $f^{s_k''}(w_k) \in V_0'$ である。

ここで、もとの sequences のとり方から、(3.1) と (*), (2), (3.2) を用いた議論によって、(x_k'', z_k''), (z_k', y_k') からなる pseudo orbit は (3.1) の仮定を満たすような string の形をしていることがわかる。そこで、(3.3) を使えば、shadowing string $(f^{s_k''}(w_k), f^{-t_k'}(w_k))$ も、(3.1) の仮定を満たす string であることがわかる。詳しくいうと次のようになる。$j_k'>0$ を $f^{-j_k'+1}(w_k)$ が $f^{-t_k'}(w_k)$ の forward orbit が最初に $(V_0')^c$ に入った点となるものとし、$j_k''>0$ を、$f^{j_k''-1}(w_k)$ が、$f^{s_k''}(w_k)$ の backward orbit が最初に $(V_0')^c$ に入った点と

なるものとする。このとき、すべての大きなkに対し、次の性質が成り立つ。

a) $f^{-j_k'}(w_k) \in S^1_{t_k-L_0}$;

b) $f^i(w_k) \notin S^1_{t_k-L_0-1}$ for all $-j_k' < i < j_k''$;

c) $f^{j_k''}(w_k) \in S^1_{t_k-L_0}$.

（証明の概略） 十分大きなkに対して、$f^{-t_k'}(z_k') = y_k' \in V^1_{t_k}$, $t_k \geq n_1$（ここに、n_1は(3.3)で与えられたもの），そしてある$0 \leq j \leq t_k'$が存在して$f^j(f^{-t_k'}(w_k)) \notin V_0^1$だから、(3)と(3.3)によって$f^{-t_k'}(w_k) \in S^1_{t_k-L_0}$である。これでa)が示せた。c)もa)と同じ状況にあることがわかるので上と同様にして証明される。b)については、2つの部分に分けて考える。まず、ある$-j_k' < j \leq 0$に対して$f^j(w_k) \in S^1_{t_k-L_0-1}$と仮定する。このとき、$f^j(w_k) \in V^1_{t_k-L_0-1}$としてよい。すると、$0 \leq i \leq t_k'$で、$f^i(y_k') \notin V_0^1$となるものがあるので、$t_k - L_0 - 1 \geq n_1$なる$k$に対し、(3)と(3.3)を用いれば、$f^j(z_k') \in S^1_{t_k-2L_0-1}$となる。このような$k$をとって、列$\{(z_k', y_k')\}$を考えると、これは(3.2)の仮定を満たす。従って、$\{(z_k', y_k')\}$は(m, γ)-sequenceとなり、さらに、z_kのときと同様にして、(z_k', y_k')上の点$\hat{z}_k (\neq z_k')$で、$\{(z_k', \hat{z}_k)\}$がstrongly (m, γ_1)-sequenceとなるものがある。これはz_kのとり方に反するから矛盾である。さて次に、ある$0 \leq j \leq j_k''$

に対し $f^j(w_k) \in S'_{\tau_k-L_0-1}$ となる場合にも矛盾が生じることを示す。この場合も上と同様の議論によって $f^j(z_k'') \in S'_{\tau_k-2L_0-1}$ となることがわかる。ところが、$f^j(z_k'') \notin \sigma_k^{(i_2)}$ であることは明らかなので、(2) と $L_1 \geq 5L_0$ から $f^j(z_k'') \in S'_{\tau_k-2L_0-1}$ とはなり得ない。□

最後に、$z_k^{(i)} \in \Gamma$ となる $i \geq 1$ が存在するときを考える。このときは、r_0 を適切にとっていれば（$\{r_0(n)\}_{n\geq 1}$ を r_0 の選択の減少列としたとき十分大きな n に対する $r_0(n)$ でよい）、$d(z^{(i)}, \Lambda_1 \cap \hat{\Lambda})$ が十分小さくなるので、大きな k に対し、

$$D_r^E(z_k^{(i)}) \cap W^u_{2\varepsilon_1}(\Lambda_1) \neq \emptyset$$

となる。このとき、先の場合と部分的に平行な議論をすることによって、このintersectionの点 u_k で、下記の性質を持つものがある。$l_k' > 0$ を $f^{l_k'-1}(u_k)$ が、$f^{s_k}(u_k)$ の backward orbit が、最初に $(V_0')^c$ に入った点となるもの、$l_k = \min\{j \geq 0 \mid d(f^j(u_k), V^{1,+}) > 2r_0\}$, $\tau_k' = \tau(\sigma_k^{(i)})$ とする。このとき、大きな k に対して、

a) $f^{l_k-1}(u_k) \in V^{1,-}$;

b) $f^j(u_k) \notin S'_{\tau_k'-L_0-1}$ for all $l_k \leq j < l_k'$;

c) $f^{l_k'}(u_k) \in S'_{\tau_k'-L_0}$.

従って、この場合も、(3,1) の仮定を満たすことがわかり、命題が証明されることになる。

REFERENCES

1、M. Hirsch, C. Pugh, M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer Lecture Notes in Math. 583 (1977).

2、R. Mañé, *On the creation of homoclinic points*, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1988), 139 - 159.

3、R. Mañé, *A proof of the C^1 Stability Conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1988), 161 - 210.

4. J. Palis, *On the C^1 Ω-Stability Conjecture*, Publ. Math. I.H.E.S. 66 (1988), 211 - 215.