数理解析研究所講究録
第 760 巻 1991 年 28-32

非一様擬軌道追跡の方法とMarkov分割

東大理　関根正幸（Masayuki Sekine）

fをコンパクト多様体M上の$C^{1+\alpha}$級微分同相写像$(0<\alpha\leq 1)$
εを十分小さな正数とする。このとき $0\leq k\leq \dim M$, $\chi>0$
$\ell\geq 1$ に対し、$\Lambda^k_{\chi,\ell}$を次の性質をもつ点$x\in M$の全体とする。
Splitting $T_xM=E^s_x\oplus E^u_x$ が存在して、(1) $\dim E^s_x=k$,

(2) $\left.\begin{array}{l}\|df^n u\|\leq \ell e^{\varepsilon\chi|m|}e^{-\chi n}\|u\| \\ \|df^{-n}u\|\geq \frac{1}{\ell}e^{-\varepsilon\chi|m|}e^{\chi n}\|u\|\end{array}\right\}\quad u\in df^m(E^s_x)$,

(3) $\left.\begin{array}{l}\|df^n v\|\geq \frac{1}{\ell}e^{-\varepsilon\chi|m|}e^{\chi n}\|v\| \\ \|df^{-n}v\|\leq \ell e^{\varepsilon\chi|m|}e^{-\chi n}\|v\|\end{array}\right\}\quad v\in df^m(E^u_x)$,

(4) ($df^m(E^s_x)$と$df^m(E^u_x)$のなす角) $\geq \frac{1}{\ell}e^{-\varepsilon\chi|m|}$

がすべての $n\in\mathbb{Z}_+$, $m\in\mathbb{Z}$について成り立つ。

$\Lambda^k_{\chi,\ell}$ は次の性質をもつ([Pe1])

(1) 各$\Lambda^k_{\chi,\ell}$はコンパクト。

(2) $\chi_1\geq\chi_2$, $\ell_1\leq\ell_2\Rightarrow\Lambda^k_{\chi_1,\ell_1}\subset\Lambda^k_{\chi_2,\ell_2}$。

(3) $f(\Lambda^k_{\chi,\ell}) \cup f^{-1}(\Lambda^k_{\chi,\ell}) \subset \Lambda^k_{\chi,\ell e^{\varepsilon\chi}}$。

これらの性質により、$\Lambda^k_\chi = \bigcup_{\ell\geq 1} \Lambda^k_{\chi,\ell}$ は f-不変である。

さらに Λ^k_χ は次の性質をもつ。

(4) $x \in M$ が Oseledeč の意味で正則([Pe1])で、その Lyapunov 指数 $\{\chi_j(x)\}_{j=1,\cdots,\dim M}$ が

$$\chi_1(x) \leq \cdots \leq \chi_k(x) \leq -(1+\varepsilon)\chi,\ (1+\varepsilon)\chi \leq \chi_{k+1}(x) \leq \cdots \leq \chi_{\dim M}(x)$$

をみたすならば x は Λ^k_χ に属する。

ここでの目的は、Λ^k_χ の「擬軌道追跡性」を調べる事と、応用として、Λ^k_χ にある条件を仮定して、Markov 分割を構成する事にある。以下 k と χ を固定し、$\Lambda = \Lambda^k_\chi$, $\Lambda_\ell = \Lambda^k_{\chi, e^{\ell\varepsilon\chi}}$ と書く。($\ell \geq 0$)

定義1. $\{\beta_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+}$ を単調減少正数列とするとき、点列 $\{x_n\}_{a<n<b}$ が $(\{\Lambda_\ell\},\{\beta_\ell\})$- 擬軌道であるとは、$K:(a,b)\to\mathbb{Z}_+$ が存在して、$|K(n)-K(n+1)|\leq 1$ $(a<n<b-1)$,

$$f(x_{n-1}),\ x_n \in \Lambda_{K(n)},\ d(x_n, f(x_{n-1})) \leq \beta_{K(n)} \quad (a<n<b)$$

をみたすもの。

定義2. $\|\cdot\|'$ を Λ 上の metric, $\gamma>0$ とするとき、$y\in M$ が $(\{\Lambda_\ell\},\{\beta_\ell\})$- 擬軌道 $\{x_n\}_{a<n<b}$ を $\|\cdot\|'$ に関し γ-追跡するとは任意の $a<n<b$ に対し $\|\exp^{-1}_{x_n} f^n(y)\|'_{x_n} \leq \gamma$ となること。

これらの概念を用いてΛ上の擬軌道追跡性は次の様に記述できる。

定理1　Λ上に可測なmetric $|\cdot|'$ が存在して次をみたす。

(1) $|\cdot|'$ は各Λ_ℓ上で$\|\cdot\|$と同値である。詳しくは、定数C_1, C_2が存在して、

$$C_1\|\cdot\|_x \le |\cdot|'_x \le C_2 e^{4\ell\varepsilon\chi}\|\cdot\|_x \quad (x\in\Lambda_\ell)$$

となる。

(2) $0<\gamma\le 1$ に対し、減少正数列$\{\beta_\ell\}_{\ell\in\mathbb{Z}_+}$が存在して、任意の$(\{\Lambda_\ell\},\{\beta_\ell\})$－擬軌道$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$はある$M$の点$y$により、一意に$\gamma$－追跡される。

$|\cdot|'$の構成は[Ts]内の議論が元になっている。

この定理の応用として我々はMarkov分割を構成するための条件を与えることができる。

定理2．関数$C_1, C_2 : \mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$が存在して次をみたすとする。

(a) $C_1(K)\le K\le C_2(K)$

(b) $C_1(K)$は単調増加で、$K\to\infty$ のとき$C_1(K)\to\infty$となる。

(c) 定理1の状況で、$(\{\Lambda_\ell\},\{\beta_\ell\})$－擬軌道$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$が$x_0\in\Lambda_K$ をみたすならば、$\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$は$\Lambda_{C_2(K)}-\Lambda_{C_1(K)-1}$の点で一意に$\gamma$－追跡される。

このとき、Λは次の性質をもつ可算個の開集合の族$\mathcal{R}=\{R_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$により覆われる。

(1) $\mathrm{diam}\, R_m = \sup_{x,y\in R_m} d(x,y) \le \gamma'$
ここでγ'は十分小さな正数。

(2) 各R_mはあるΛ_ℓに含まれる。

(3) 各R_mはproperである。すなわち$cl_{\Lambda_\ell}(int_{\Lambda_\ell}(R_m))=R_m$

(4) $\{int\, R_m\}_{m\in\mathbb{N}}$は互いに素である。

(5) $f(R_m)$はRの高々有限個の元とのみ交わる。

(6) $x\in R_m$に、$W^s(x,R_m)\subset W^s(x)\cap R_m$, $W^u(x,R_m)\subset W^u(x)\cap R_m$
が対応する。ここで$W^s(x)=\{y\in M \mid \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n}\log d(f^n(x),f^n(y))<0\}$
$W^u(x)=\{y\in M \mid \overline{\lim_{n\to-\infty}} \frac{1}{n}\log d(f^n(x),f^n(y))<0\}$.

(7) $x,y\in R_m$に対し、$W^s(x,R_m)\cap W^u(y,R_m)$は1点よりなり、$R_m$に属する。

(8) $x\in int\, R_m\cap f^{-1}(int\, R_{m'})$に対し、

$$f(W^s(x,R_m))\subset W^s(f(x),R_{m'})$$
$$f^{-1}(W^u(f(x),R_{m'}))\subset W^u(x,R_m)$$

となる。

参考文献

[Bo] R. Bowen, Lecture Note in Math. 470 (1975), Springer.
[Ka] A. B. Katok, Publ. Math. IHES 51 (1980), 137-173
[Pe1] Y. B. Pesin, USSR Izvestija 10 (1976), 1261-1305.
[Pe2] Y. B. Pesin, Russian Math. Surveys 32:4 (1977), 55-112

[Se] M. Sekine, A Method of Nonuniform Pseudo-orbit Tracing and Markov Partitions, preprint.

[Ts] M. Tsujii, Regular points for ergodic Sinai measures, preprint