数理解析研究所講究録
第 760 巻 1991 年 33-49

非線形カントル集合上の不変測度の次元について

名大理　半田賢司 (Kenji Handa)

1. 序

「フラクタル」と呼ばれる種類の特異な集合を解析する際、その上の測度を用いた解析から様々な情報が得られる場合が多く、その観点からの研究も数多く行われてきた。(例えば[7], [6] (Chap. 17, 等)) もちろん用いられる測度は、その集合の何らかの意味の'scale invariance'とconsistentな物でなければ、適切に情報が得られる事は期待できない。例えば力学系の言葉を用いて表されるフラクタルに対しては、後に掲げるBowenの公式に見られる様に、その上の不変測度が重要な役割を果たす。

本稿では、実軸上のその様なフラクタル(にならない場合もある，(2.6)参照)の例を考え、その上の不変測度の'singularity'を計る2種類の「次元」と呼ばれる量について、それらが力学系の言葉を用いて表される事を示す。

2. Bowenの公式

以下で考えるフラクタルは次の様に記述される。整数 $m \geq 2$ を1つ固定し、$S_1, \cdots, S_m$ を $[0,1]$ 上の縮小写像で次の3つの仮定 (A.1)-(A.3) を満たすものとする：

(A.1) ある $\alpha > 0$ に対し、各 $S_i : [0,1] \to [0,1]$ は $C^{1+\alpha}$ 級,

(A.2) 適当な定数 b 及び c に対し、

$$0 < b \leq |S_i'(x)| \leq c < 1 \quad , \quad 0 < x < 1,\ i = 1, \cdots, m$$

(A.3) $S_i((0,1)) \cap S_j((0,1)) = \phi \quad \text{if} \quad i \neq j.$

これに対し、[11] により（この結果を適用するにあたっては縮小性の仮定しか必要としない）、次の等式を満たす空でないコンパクト集合Fが唯1つ存在する：

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

この集合Fについては既にいくつかの論文で力学系の立場から論じられている。例えば、[1] では 'generalized cookie cutter Cantor set' と呼ばれている（[16] も参照）。より一般的な取扱いについては [15] がある。

Fを力学系の言葉で記述するには、各 S_i の逆写像を考えればよい。すなわち、$W \equiv \bigcup_{i=1}^{m} S_i([0,1])$ とおき、次を満たす互いに交わらないm個の区間 $\{W_i\}_{i=1}^{m}$ を取る。

$$W = \bigcup_{i=1}^{m} W_i , \qquad \mathrm{int}\, W_i = S_i((0,1)).$$

このとき、$f : W \to [0,1]$ を $f = S_i^{-1}$ on W_i $(1 \leq i \leq m)$

によって定義すると、

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} f^{-k}(W) \tag{2.1}$$

と表せることがわかる。

しかしながら以下では記号力学系を導入して、FのHausdorff次元（$\dim_H F$と記す）を与えるBowenの公式を記述する。$\Omega = \{1, \cdots, m\}^{\mathbb{Z}_+}$とおき、その元は$\underline{\omega} = (\omega_n)_{n=0}^{\infty}$等と表す。また$T : \Omega \to \Omega$はshift（i.e. $T\underline{\omega} = (\omega_{n+1})_{n=0}^{\infty}$）である。$\pi : \Omega \to F$ (onto)を次で定義する。

$$\pi(\underline{\omega}) = \lim_{n\to\infty} S_{\omega_0} \circ \cdots \circ S_{\omega_n}(x) \quad (x\text{に無関係})$$

（あるいは$\{\pi(\underline{\omega})\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_{\omega_0} \circ \cdots \circ S_{\omega_n}([0,1])$）さらに次で定義される'potential' $\Phi : \Omega \to (-\infty, 0]$は以下の議論で最も重要な役割を果たす：

$$\Phi(\underline{\omega}) = \log |S'_{\omega_0}(\pi(T\underline{\omega}))|$$

これに対しては（A.1），（A.2）により次の本質的に重要な性質が示される。

Lemma (2.2)　次を満たす定数$C>0$及び$\theta \in (0,1)$が存在する：

$$\sup\{|\Phi(\underline{\omega}) - \Phi(\underline{\xi})| ; \omega_k = \xi_k, \ 0 \le k \le n\} \le C\theta^n, \quad n = 0, 1, \cdots$$

したがって各$s \in \mathbb{R}$に対して、$s\Phi$に対する（T-不変）Gibbs測度$\mu_{s\Phi}$が一意に存在する（cf. [3]）。ここで$\mu_{s\Phi}$

は、$s\Phi$ の pressure $P(s\Phi)$ に対する変分公式

$$P(s\Phi) = \sup\left\{\int s\Phi\, d\mu + h_\mu(T) \;;\; \mu \in \mathcal{M}_T(\Omega)\right\} \quad (2.3)$$

における sup を到達する μ と同一視される。(ただし、$\mathcal{M}_T(\Omega)$ は Ω 上の T-不変 Borel 確率測度全体を表す。)

さて、(A.2) により $P(s\Phi)$ は s について狭義減少かつ連続である事及び $\lim_{s\to\infty} P(s\Phi) = -\infty$ が示されるため、$P(0)=\log m$ と合わせて $P(s_0\Phi)=0$ を満たす $s_0>0$ が一意に存在する事がわかる。そして、[4] における議論から次の基本的な事実が得られる。

<u>Theorem (Bowen)</u>

F 上の Borel σ-field $\mathcal{B}(F)$ 上の s_0-次元 Hausdorff 測度 Λ^{s_0} と $\pi_*\mu_{s_0\Phi}$ とは互いに絶対連続であり、適当な定数 $C_0 \in (1,\infty)$ が存在して次が成り立つ。

$$C_0^{-1} \le d\pi_*\mu_{s_0\Phi}/d\Lambda^{s_0} \le C_0$$

<u>Corollary (2.4)</u>

$0<\Lambda^{s_0}(F)<\infty$、特に、

$$\dim_H F = s_0 = \sup\left\{h_\mu(T)/\left(-\int\Phi\, d\mu\right) ;\; \mu \in \mathcal{M}_T(\Omega)\right\}.$$

(最後の等式は (2.3) と $P(s_0\Phi)=0$ による。)

<u>証明の概略</u>: 以下簡単のため集合 E の直径を $|E|$ と書く。$E\subset F$ に対して $\Lambda^{s_0}(E)$ は $|S_{\omega_0}\circ\cdots\circ S_{\omega_n}(F)|^{s_0}$ $(\omega\in\Omega,\ n\ge 0)$

の形に表せる量の和で（定数倍をムシして）近似できる。そこで次の関係式を用いればよい。

$$|S_{w_0}\circ\cdots\circ S_{w_n}(F)|^{s_0} \approx \exp\left[s_0 \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(T^k\underline{w})\right] \qquad (2.5)$$
$$\approx \mu_{s_0\Phi}([w_0,\cdots,w_n])\ \exp\left(nP(s_0\Phi)\right)$$
$$= \pi_*\mu_{s_0\Phi}(S_{w_0}\circ\cdots\circ S_{w_n}(F)) \ ,$$

ただし、$\approx$は両辺の比が上と下から正かつ有限な定数で上と下から（$\underline{w}$及びnに関して一様に）評価される事を意味し、また、$[w_0,\cdots,w_n]$は cylinder set $\{\underline{\xi}\in\Omega ; \xi_k=w_k,\ 0\le k\le n\}$である。

Remarks (2.6)

(i) 元来 Bowen が [6] で扱った種のフラクタルに関するその後の理論の発展等については、例えば [18] を参照。

(ii) $F\subset[0,1]$であるから明らかに $s_0\ (=\dim_H F)\le 1$であるが、さらに次の同値関係が [1] で本質的に示されている (see also [10]).

$$s_0=1 \iff [0,1]=\bigcup_{i=1}^{m} S_i([0,1]) \quad (\iff F=[0,1])$$

(iii) 全ての S_i $(1\le i\le m)$ が similitude である場合, i.e.,

$$|S_i(x)-S_i(y)| = C_i\ |x-y| \ , \qquad (0<C_i<1)$$

このとき $\Phi(\underline{w})=\log C_{w_0}$ となり、等式 $P(s_0\Phi)=0$ は $\sum_{i=1}^{m} C_i^{s_0}=1$, と同値であり、これは 'self-similar set'

の Hausdorff 次元に関してよく知られた公式（cf. [11]）に他ならない。

(iv) 密度関数 $g(x) \equiv d\pi_* \mu_{s_0\Phi}/d\Lambda^{s_0}(x)$ として F 上の連続関数が取れ、それは次の2式によって特徴付けられる。（証明は [10]）

$$\begin{cases} \int_F g \, d\Lambda^{s_0} = 1 \\ g(x) = \sum_{i=1}^{m} g(S_i(x)) |S_i'(x)|^{s_0}, \quad x \in F \end{cases} \quad (2.7)$$

等式 (2.7) は g が $f|_F : F \to F$ に関する $L^1(\Lambda^{s_0})$ 上の Frobenius-Perron 作用素の不動点である事を意味する。（ただし f は (2.1) におけるものである。）また Ω 上で見た時には、$g \circ \pi$ が potential $s_0\Phi$ に対する Ruelle 作用素の固有値 1 ($= \exp P(s_0\Phi)$) に対応する固有関数である事を示している。（cf. [3], Th. 1.7）

3. 不変測度の次元

測度に対する「次元」の概念については様々な文脈の中で導入され論じられているが、それらが共通して持つ側面として、「singularity の計測」が挙げられる。ここでは代表的な2つの次元，Hausdorff 次元と Rényi（情報）次元を取り上げ、F上の不変測度 ρ (i.e. $\rho = \pi_*\mu$, $^\exists\mu \in M_T(\Omega)$,

言いかえれば、Fの持つ scale invariance と consistent な確率測度）に対してそれらが力学系の言葉を用いた相異なる表示を持つ（したがって singularity の計り方が異なる）事を示す。

<u>Definition</u>　F上の任意の Borel 確率測度 ρ に対し、ρ の Hausdorff 次元（$\dim_H \rho$ で表す）を次で定義する。

$$\dim_H \rho = \inf\{\dim_H E\ ;\ E \in \mathcal{B}(F),\ \rho(E)=1\}$$

また、次の極限が存在するときその値を ρ の Rényi（あるいは情報）次元と呼ぶ：

$$\dim_I \rho \equiv \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (-\log\varepsilon)^{-1}\, I_\varepsilon(\rho) \tag{3.1}$$

ただし、$I_\varepsilon(\rho) \equiv \inf\{-\sum_i \rho(E_i)\log\rho(E_i)\ ;\ \{E_i\}\in\mathcal{P}_\varepsilon\}$,
$\mathcal{P}_\varepsilon$ は F の有限 Borel 分割 $\{E_i\}$ で $\max_i |E_i| \le \varepsilon$ を満たすものの全体を表す。

Hausdorff 次元についての（後で示す（3.4）のタイプの）結果は［2］で既に implicit に得られている。また、フラクタル曲線上の調和測度に関する結果としては［5］,［14］等がある。上の Rényi 次元の定義は［17］において彼自身が与えた物と同値であるが、Gács［8］はすべての ρ に対して well-defined である様な、上の情報次元の変型版を定義し、美しい結果を得ている。（本稿，付録を参照）

その他、力学系のアトラクターとして得られるフラクタルの研究において導入された様々な次元については、例えば [7] [9]。力学系そのものの characteristic としての次元については [13] がある。

さて、Hausdorff 次元と Rényi 次元については [19] で論じられており、そこでの Th. 4.4 で示されている事の一部として次が成り立つ。もし定数 α_0 が存在して、

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\log\rho(B_\varepsilon(x))/\log\varepsilon = \alpha_0,\quad \rho\text{-a.e.}\,x \tag{3.2}$$

が成り立てば、$\dim_H\rho = {}^{\exists}\dim_I\rho = \alpha_0$ （ただし、$B_\varepsilon(x)\equiv\{y;\ |x-y|\le\varepsilon\}$ ）。我々の場合 $\rho=\pi_*\mu$ $(\mu\in M_T(\Omega))$ として、(3.2)における極限の代わりに、次の比の $n\to\infty$ のときの極限を考えてみる：

$$\log\mu([w_0,\cdots,w_n])\,/\,\log|\pi([w_0,\cdots,w_n])|.$$

このとき分母分子をそれぞれ n で割って、(2.5) を用いた書きかえをすれば Shannon-McMillan-Breiman の定理とエルゴード定理から、μ-a.e. $\underline{w}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\log\mu([w_0,\cdots,w_n])/\log|\pi([w_0,\cdots,w_n])| = D(\mu_{\underline{w}}), \tag{3.3}$$

ただし、$\mu_{\underline{w}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\delta_{T^k\underline{w}}$ （μ-a.e. $\underline{w}$ に対して存在し、T-不変 ergodic）であり、また一般に $\nu\in M_T(\Omega)$ に対して $D(\nu)\equiv h_\nu(T)/(-\int\Phi\,d\nu)$ とおいた (cf. (2.4))。特に μ が ergodic であれば (3.3) の極限は μ-a.e. で $D(\mu)$ に等し

く、(3.2) の場合と同様に次の良く知られた公式を得る。
(cf. (*) of [12])

$$\dim_H \pi_*\mu = {}^{\exists}\dim_I \pi_*\mu = D(\mu) \qquad (3.4)$$

ここでは2つの次元の違いは見えないが、次に述べる一般の $\mu\in\mathcal{M}_T(\Omega)$ に対する結果を見ればその違いは明確となる。

Theorem (3.5)

$\mu\in\mathcal{M}_T(\Omega)$ のエルゴード分解を $\mu=\int\mu_\omega d\mu$ と表せば次が成り立つ。

(i)
$$\dim_H(\pi_*\mu) = \operatorname*{ess.sup}_{\omega} D(\mu_\omega) \qquad (3.6)$$

(ii) $\dim_I \pi_*\mu$ は存在して、

$$\dim_I \pi_*\mu = \int D(\mu_\omega)\, d\mu. \qquad (3.7)$$

Remarks (3.8)

(i) Rényi 次元の代わりに Gács の定義した次元を考えれば上のタイプの公式は全く測度論的なレベルで示せる。(付録定理 (4.4))

(ii) 公式 (3.6) は集合の Hausdorff 次元についてよく知られた性質: $\dim_H(\bigcup_i E_i) = \sup_i \dim_H E_i$ の反映と考える事ができる。

(iii) $\pi_*\mu$ と $\mathcal{B}(F)$ 上の $D(\mu)$-次元 Hausdorff 測度 $\Lambda^{D(\mu)}$

の関係については、[14] において次の様な結果が本質的に得られている。$\Phi \in C(\Omega)$ は (2.2) における Φ と同様の性質を持つとし、Φ に対応する Gibbs 測度を μ_Φ ($\in \mathcal{M}_T(\Omega)$, ergodic) と書くとき、$\pi_*\mu_\Phi$ と $\Lambda^{D(\mu_\Phi)}$ が互いに特異であるための必要十分条件は $\mu_\Phi \neq \mu_{S,\Phi}$ である。

(3.5) の証明の概略: (i) 不等式 $\dim_H \pi_*\mu \leq \text{ess.sup}\, D(\mu_{\underline{\omega}})$ の証明は、付録定理 (4.4) において対応する不等式の証明と全く同様。逆の不等式は、μ の各エルゴード成分 $\mu_{\underline{\omega}}$ に対して (3.4) を適用すれば直ちに得られる。

(ii) 各 $\varepsilon \in (0, |F|)$ に対し、cylinder set のみより成る Ω の有限分割 $\mathcal{U}(\varepsilon)$ を次の様に構成する。まず各 $\underline{\omega} = (\omega_n)_{n=0}^{\infty} \in \Omega$ に対し、$n(\underline{\omega}) = \min\{n \geq 0 \,;\, |S_{\omega_0} \circ \cdots \circ S_{\omega_n}(F)| \leq \varepsilon\}$ とおき、

$$\mathcal{U}(\varepsilon) = \{[\omega_0, \cdots, \omega_{n(\underline{\omega})}] \,;\, \underline{\omega} \in \Omega\}$$

と定義すると、$\mathcal{U}(\varepsilon)$ は次の性質を持つ Ω の分割である事が容易にわかる。(ただし b は (A.2) におけるもの)

$$\begin{cases} b\varepsilon \leq |\pi(V)| \leq \varepsilon, & V \in \mathcal{U}(\varepsilon) \\ \# \mathcal{U}(\varepsilon) \leq |F| / (b\varepsilon) & \end{cases}$$

これらを用いれば、$\dim_I \pi_*\mu$ の存在と極限

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{V \in \mathcal{U}(\varepsilon)} \mu(V) \log \mu(V) / \log |\pi(V)|$$

の存在は同値でかつ、それが存在するときには両者の値が一

致する事が示される。さらに(3.3)も用いればこの極限が存在して $\int D(\mu_\omega)d\mu$ に等しい事がわかり，(3.7)を得る。

4. 付録：測度の「次元」に関する一般的な注意

ここでは $\mathbb{R}^d$ における Borel 確率測度 ρ を考え，それに対して(3.2)の型の「局所的な次元」を考える事により(3.5)のタイプの公式が成り立つ事を示す。ただし，Hausdorff次元は前と同様に $\dim_H \rho \equiv \inf\{\dim_H E ; E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ \rho(E)=1\}$ を考えるが，Rényi次元の代わりに Gács [8] の定義した次元（$\delta(\rho)$ と書く）を考える。すなわち，

$$\delta(\rho) \equiv \inf\Big\{\sum_i \dim_H E_i\, \rho(E_i) ; \{E_i\}\text{は}\mathbb{R}^d\text{の可算Borel分割}\Big\}$$

これに対する次の2通りの identification は Gács ([8], Th.1) による：

$$\delta(\rho) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \inf\Big\{\sum_i \rho(E_i)\frac{\log\rho(E_i)}{\log|E_i|} ; \{E_i\}\in\mathcal{D}_\varepsilon\Big\} \qquad (4.1)$$

$$= \int \liminf_{n\to\infty} \log\rho(E^n(x))/\log|E^n(x)|\ \rho(dx) \qquad (4.2)$$

ただし(4.1)における $\mathcal{D}_\varepsilon$ は，'dyadic cubes' (i.e. $\prod_{k=1}^{d}[j_k/2^n, (j_k+1)/2^n)$, $j_k\in\mathbb{Z}$, $n=0,1,\cdots$ の形の集合）より成る $\mathbb{R}^d$ の分割 $\{E_i\}$ で $\sup_i|E_i|\le\varepsilon$ を満たすもの全体を表し，また(4.2)における $E^n(x)$ は $x\in\mathbb{R}^d$ を含む一辺の長さ 2^{-n} の dyadic cube を表す。

さて最初に、各点 x における「次元」を定義する。大ざっぱにいって、$B_\varepsilon(x)=\{y;\ |x-y|\le\varepsilon\}$ とおいたとき

$$\rho(B_\varepsilon(x))\sim\varepsilon^D \qquad \text{as} \quad \varepsilon\downarrow 0$$

となる D の値として定義したいが、(この値は (3.2) でも現れていることに注意) 一般には次の様に定義する。

$$D(\rho,x)\equiv\liminf_{\varepsilon\downarrow 0}\ \log\rho(B_\varepsilon(x))/\log\varepsilon \quad \in[0,\infty]$$

この値は、$\log\varepsilon_n/\log\varepsilon_{n+1}\to 1$, $\varepsilon_n\downarrow 0$ を満たす任意の $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて定義しても値は変らない事が容易にわかり、特に x の関数として可測である。また、lim inf で定義した根拠は、次のよく知られた事実である。(e.g. [6], Prop. 4.9)

Lemma (4.3)

$0<\lambda<\infty$, $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $s>0$ とするとき、

(a) $\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\rho(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^s<\lambda$, $\forall x\in E$ ならば、

$$\Lambda^s(E)\ge\rho(E)/\lambda$$

(b) $\limsup_{\varepsilon\downarrow 0}\rho(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^s>\lambda$, $\forall x\in E$ ならば、

$$\Lambda^s(E)\le 2^s\rho(E)/\lambda$$

ただし、$\Lambda^s(E)$ は E の s-次元 Hausdorff 測度である。

すなわち、集合の Hausdorff 次元の定義の類似として次の等式が成り立つ:

$$D(\rho,x)=\sup\{s;\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\rho(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^s=0\}=\inf\{s;\ \overline{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}}\,\rho(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^s=\infty\}.$$

そして、定理(3.5)との対応として、$\dim_H \rho$ 及び $\delta(\rho)$ は $D(\rho,x)$ を用いて次の様に表せる。

Theorem (4.4)

$\mathbb{R}^d$ 上の任意の Borel 確率測度 ρ に対し、

(i) $$\dim_H \rho = \| D(\rho,\cdot) \|_{L^\infty(\rho)} \tag{4.5}$$

(ii) $$\delta(\rho) = \int D(\rho,x)\,\rho(dx) \tag{4.6}$$

Proof. (i) 右辺を $\bar{D}$ と書き、次を満たす $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ を取る。

$$\rho(E)=1 \quad , \quad \sup_{x\in E} D(\rho,x) = \bar{D}$$

このとき、$s > \bar{D}$ に対し

$$\overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \rho(B_\varepsilon(x)) / \varepsilon^s = \infty \qquad \text{for all } x \in E$$

が成り立つため、(4.3)(b) より $\Lambda^s(E) = 0$, ゆえに

$$\dim_H \rho \leq \dim_H E \leq s \text{。}$$

$s > \bar{D}$ は任意でよいため、$\dim_H \rho \leq \bar{D}$ を得た。

逆に、$\rho(E)=1$ とする。$\bar{D}$ の定義より、$s < \bar{D}$ に対し、

$$\rho(\{x ; D(\rho,x) > s\}) > 0$$

であるから、$E' \equiv \{x : D(\rho,x) > s\} \cap E$ とおけば $\rho(E')>0$ であり、

$$\underline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \rho(B_\varepsilon(x))/\varepsilon^s = 0 \qquad \text{for all } x \in E'$$

が成り立つため、(4.3)(a) より $\Lambda^s(E) \geq \Lambda^s(E') = \infty$ 。ゆえに $\dim_H E \geq s$ 。ここで、E (s.t. $\rho(E) = 1$) 及び

$s<\bar{D}$ の任意性より，$\dim_H \rho \geq \bar{D}$ を得た。

(ii) まず任意の $E\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対し，(4.3)(a) より次が示される事を注意する：

$$D(\rho,x)\le \dim_H E \quad , \quad \rho\text{-a.e. } x\in E .$$

これより $\mathbb{R}^d$ の任意の可算Borel分割 $\{E_i\}$ に対し，

$$\begin{aligned}\int D(\rho,x)\,\rho(dx) &= \sum_i \int_{E_i} D(\rho,x)\,\rho(dx)\\ &\le \sum_i \dim_H E_i\,\rho(E_i) ,\end{aligned}$$

ゆえに $\int D(\rho,x)\,\rho(dx)\le \delta(\rho)$.

逆に各 $n=1,2,\cdots$ に対して分割 $\{E_i^{(n)}\}_{i\ge 0}$ を次の様に定義する。

$$E_i^{(n)}=\{x \,;\, \frac{i}{n}\le D(\rho,x)<\frac{i+1}{n}\}$$

このとき再び (4.3)(b) により $\dim_H E_i^{(n)}\le \frac{i+1}{n}$ が成り立つから，（既に(i)で示された $\rho(D(\rho,x)\le d)=1$ に注意して）

$$\begin{aligned}\delta(\rho) &\le \sum_i \dim_H E_i^{(n)}\,\rho(E_i^{(n)}) \le \sum_i \frac{i+1}{n}\,\rho(E_i^{(n)})\\ &\le \sum_i \int_{E_i^{(n)}} D(\rho,x)\,\rho(dx) + \sum_i \frac{1}{n}\rho(E_i^{(n)})\\ &\longrightarrow \int D(\rho,x)\,\rho(dx) \qquad \text{as} \quad n\to\infty .\end{aligned}$$

これで (4.6) も示され，定理の証明を終る。

References

[1] Bedford, T. 1990. Applications of dynamical systems theory to fractals: a study of cookie cutter Cantor sets. preprint.

[2] Billingsley, P. 1965. Engodic Theory and Information. New York, Wiley.

[3] Bowen, R. 1975. Equilibrium States and the Engodic Theory of Anosov Diffeomorphisms, Lecture Notes in Mathematics, no. 470. Berlin, Springer.

[4] Bowen, R. 1979. Hausdorff dimension of quasi-circles. Publ. Math. IHES, 50, 11-25.

[5] Carleson, L. 1985. On the support of harmonic measure for sets of Cantor type. Ann. Acad. Sci. Fenn., 10, 113-123.

[6] Falconer, K. J. 1990. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. New York, Wiley.

[7] Farmer, J. D., Ott, E. & Yorke, J. A. 1983. The dimension of chaotic attractors. Physica, 7D, 153-180.

[8] Gács, P. 1973. Hausdorff dimension and probability distributions. Periodica Mathematica Hungarica (Budapest), 3, 59-71.

[9] Halsey, T., Jensen, M., Kadanoff, L., Procaccia, I. & Shraiman, B. 1986. Fractal measures and their singularities: the characterization of strange sets. Phys. Rev., A33, 1141-1151.

[10] Handa, K. 1991. Hausdorff dimension of nonlinear Cantor sets. submitted to Proceedings of the Taniguchi Workshop at Sanda and Kyoto, 1990.

[11] Hutchinson, J. E. 1981. Fractals and self-similarity. Indiana Univ. Math. J., 30, 713-747.

[12] Ledrappier, F. & Misiurewicz, M. 1985. Dimension of invariant measures for maps with exponent zero. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 5, 596-610.

[13] Pesin, Ya. B. 1984. On the notion of the dimension with respect to a dynamical systems. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 4, 405-420.

[14] Przytycki, F., Urbański, M. & Zdunik, A. 1989. Harmonic, Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps, I. Ann. of Math., 130, 1-40.

[15] Raith, P. 1989. Hausdorff dimension for piecewise monotone maps. Studia Mathematica, 94, 17-33.

[16] Rand, D. A. 1989. The singularity spectrum $f(\alpha)$

for cookie-cutters. Ergod. Th. & Dynam Sys., 9, 527-541.

[17] Rényi, A. 1959. On the dimension and entropy of probability distributions. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 10, 193-215.

[18] Sullivan, D. 1979. The density at infinity of discrete group of hyperbolic motions. Publ. Math. IHES, 50, 419-450.

[19] Young, L.-S. 1982. Dimension, entropy and Lyapunov exponents. Ergod. Th. & Dynam. Sys., 2, 109-124.