数理解析研究所講究録
第761巻 1991年 21-35

The characteristic polynomial of certain square root of Laplacian

鳥取大教養　若山 正人 (Masato Wakayama)

リーマン面の（フェルミオン，ボゾンに対応する）ラプラシアンの functional determinant（以下 FD と記す）が Selberg のゼータ関数で書けることは超弦理論において周知である。([DP], [Sar] 等。) 但し，筆者は，その公式を表面的にのみ知っているだけで，超弦理論については全く不案内である。

しかし —— 本稿では，表題の如く，ある種のラプラシアンの平方根の特性多項式が Selberg ゼータ関数を用いて表示できることを示したい。ここに云う Selberg ゼータ関数（以下 SZF と記す）とは，考えている多様体上の閉じた原始的な測地線の長さについて"スピン構造"を考慮に入れて積をとったものである。目的の公式は，上述のラプラシアンの FD 表示の一般化のうちでも，あるスペクトル不変量（η-invariant）に関係しているという点で，最も綺麗

なものの1つであると思う。具体的には，以下の手順によってこれを導く。

$2p$ 次特殊直交群 $SO(2p)$ の $\Lambda^p \mathbb{C}^{2p}$（中間次の外積代数）への自然な作用 σ は可約であるが $\sigma = \sigma^+ \oplus \sigma^-$ と既約分解できる。この $\sigma^\pm$ を以下スピン表現と呼ぶ。いま，奇数次元のコンパクト双曲型多様体を考えると，その閉測地線の共役類に対し，スピン表現の"和"，"差"に応じて自然に2種類のSZFが定義できる。1つは[Wak1]で議論したタイプのもので，もう一方はMilson [Mil]によるものであり，それぞれスピン表現の"和"及び"差"に付随したSZFと呼ぶことにする。その理由は，それぞれがラプラシアンのスペクトルに関して含む情報をみると，固有値の重複度の和及び差に依存しているからである。このとき標語的に次が成立する。Δをラプラシアンとすると

$$\frac{\Delta \text{の特性多項式}}{\text{和に付随したSZF}} = \exp\left(\int \text{Plancherel 測度}\right),$$

$$\frac{\det(\sqrt{\Delta} \text{の Cayley 変換})}{\text{差に付随したSZF}} = \exp(\eta\text{-invariant})$$

（もちろん行列式はFDである）。但し，η-invariantとは，Atiyah-Patodi-Singer [APS1,2,3]で導入され研究されたもので形式的には大体

$\#\{\sqrt{\Delta}$の正の固有値$\} - \#\{\sqrt{\Delta}$の負の固有値$\}$

に等しい（奇数次元）リーマン多様体のスペクトルの歪対称性を量るスペクトル不変量である。

これら2式を用いて$\sqrt{\Delta}$の特性多項式を取り出す（単独のスピン表現に付随したSZFで書く）訳である。

§1. Hodge Laplacianの平方根とη-invariant

$X = \Gamma\backslash H = \Gamma\backslash G/K = \Gamma\backslash SO_0(2n-1,1)/SO(2n-1)$

を$2n-1$次元コンパクト双曲型多様体，Γをその基本群とする。$\alpha : \Gamma \to U(m)$をΓのunitary表現としたとき$\Omega^q = \Omega^q_\alpha$で$\gamma^*\omega = \alpha(\gamma)\omega \ (\gamma \in \Gamma)$なる$H$上の$\mathbb{C}^m$-値$q$-form ωの全体とする。このとき

$$A^e = i^n(-1)^{p+1}(*d - d*) \curvearrowright \Omega^{even} = \bigoplus_{p=0}^{n-1}\Omega^{2p}$$

$$A^o = i^n(-1)^{np}((-1)^p*d + d*) \curvearrowright \Omega^{odd} = \bigoplus_{p=1}^{n}\Omega^{2p-1}$$

を考えると$A = A^e$ or A^oは共にformally self-adjointな楕円型作用素でその平方はHodge Laplacian $\Delta = d\delta + \delta d$に等しい。（もちろん，$d$は外微分，$*$，$\delta$は計量に関するHodge作用素，$d$のformal adjointを表す。）よって$A$の固有値はすべて実数で（正負になり得る）$\Delta$の固有値の平方根に等しい。この状況でAtiyah-Patodi-Singerは，所謂η-関数

$$\eta(X;s) = \eta_A(X;s) := \sum_{\substack{\lambda \neq 0 \\ \lambda \in \mathrm{Spec}\, A}} (\mathrm{sign}\, \lambda)\, |\lambda|^{-s}$$

を定義した。さらに $\mathrm{Re}\, s \gg 0$ のとき公式

$$\eta(X;s) = \mathrm{Tr}(A\Delta^{-\frac{s+1}{2}}) = \frac{1}{\Gamma(\frac{s+1}{2})} \int_0^\infty t^{\frac{s+1}{2}} \mathrm{Tr}(Ae^{-t\Delta}) \frac{dt}{t}$$

が成り立つことを用いて，$\eta(X;s)$ は全 s-平面に有理型に解析接続され $s=0$ で極を持たないことを示した。そこで $\eta(X) = \eta(X:0)$ と定義し，これを η-invariant と呼んだ。

§2. ∞次の行列式の形式的導入

簡単の為，以下 $\ell = \dim X = 4n-1$ とし $p = \frac{\ell-1}{2} = 2n-1$ とする（即ち，$G = SO_0(4n-1,1)$）。この場合，

$$*d : \Omega^{2n-1} \circlearrowleft \quad , \quad d* : \Omega^{2n} \circlearrowleft$$

なので自然に

$$B^o = *d|_{\text{coclosed forms in } \Omega^{2n-1}}$$

$$B^e = d*|_{\text{closed forms in } \Omega^{2n}}$$

が考えられるが，B^o (resp. B^e) は先の A^o (resp. A^e) の coclosed forms in Ω^{2n-1} (resp. closed forms in Ω^{2n}) への制限である。また $* : \Omega^{2n-1} \simeq \Omega^{2n}$ より $\mathrm{Spec}\, B^o = \mathrm{Spec}\, B^e$ 故以下 B^o のみ扱うことにする。Δ^o で Δ の coclosed forms in Ω^{2n-1} への制限を表すと，明らかに B^o は Δ^o の平方根

で self adjoint な作用素である。

さて，$G=KA_{\mathfrak{p}}N$ を岩沢分解とし $P=MA_{\mathfrak{p}}N$ を G の極小放物型部分群とする。$M\simeq SO(2p)$ である。M-加群として $\wedge^p\mathbb{C}^{2p}=\sigma^+\oplus\sigma^-$ と既約分解する（$\pm$ は $\wedge\mathbb{C}^{2p}$ の $*$ 作用素の固有値に応じて名付ける）。$\pi_{\sigma^\pm,\lambda}=\mathrm{Ind}_P^G\sigma^\pm\otimes\lambda\otimes 1$ を P から誘導された G の主系列表現とし，$N(\sigma^\pm,\lambda)$ をその $L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ における重複度とする。但し，$L^2(\Gamma\backslash G,\chi)$ は $\Gamma\backslash G$ 上の χ に付随したベクトル束の L^2-切断全体を表す。

$$\cdots<-\lambda_{j+1}<-\lambda_j<\cdots<-\lambda_1<\lambda_0=0<\lambda_1<\cdots<\lambda_k<\cdots$$

を B° の（可能な）固有値全体とし，

$$m_j^\pm:=N(\sigma^+,\lambda_j)\pm N(\sigma^-\lambda_j)$$

とおく。さらに b_q を q-th Betti 数（$\Delta|_{\Omega^q}$ の 0 固有値の重複度）とする。

$\boxed{\text{注意}}$ $\lambda_{-j}=-\lambda_j$ と定義すれば，$\pi_{\sigma^+,\lambda_j}\simeq\pi_{\sigma^-,-\lambda_j}$（$G$-同値）だから $N(\sigma^+,\pm\lambda_j)=N(\sigma^-,\mp\lambda_j)$ である。この共通の値を $N(\chi;\pm\lambda_j)$ と書くと，$N(\chi:\lambda_j)$ $(j\in\mathbb{Z})$ は B° の固有値 λ_j の重複度に他ならない。また，$b_p=N(\chi:0)$ である。

現段階では形式的にしか意味を持たないが，B° に関係した3種類の ∞ 次の行列式を導入しよう。

a) Δ°の特性多項式：

$$\det(\Delta^\circ + s^2) = \prod_{\lambda_j \neq 0} (\lambda_j^2 + s^2)^{N(x:\lambda_j)} s^{2b_p}$$
$$= \prod_{\lambda_j > 0} (\lambda_j^2 + s^2)^{m_j^+} s^{2b_p}$$

b) $\sqrt{\Delta^\circ}/s$ の Cayley 変換の行列式：

$$\det\left(\frac{B^\circ - is}{B^\circ + is}\right) = \prod_{\lambda_j \neq 0} \left(\frac{\lambda_j - is}{\lambda_j + is}\right)^{N(x:\lambda_j)} (-1)^{b_p}$$
$$= \prod_{\lambda_j > 0} \left(\frac{\lambda_j - is}{\lambda_j + is}\right)^{m_j^-} (-1)^{b_p}$$

c) $\sqrt{\Delta^\circ}$ の特性多項式：

$$\det(B^\circ - is) = \prod_{\lambda_j \neq 0} (\lambda_j - is)^{N(x:\lambda_j)} (-is)^{b_p}$$

§3. 正当化

要するに，上記右辺の∞積が s の有理型関数として意味を持ち，有限次元の行列式の類似から期待されるような関係式（例えば，行列式の積＝積の行列式 etc）を満たすように regularize してやれば良い。場合に分けて考える。

a) [DP], [Sar], [V] 等と同様の方法による。$\mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^\circ}$ を Δ° の heat kernel の trace とし，$\mathrm{Tr}' e^{-t\Delta^\circ} = \mathrm{Tr}\, e^{-t\Delta^\circ} - b_p$ とおくと 良く知られているように（e.g. [G]）

$$\mathrm{Tr}' e^{-t\Delta^\circ} e^{t\lambda_1^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^{n-\frac{l}{2}} \quad (t \downarrow 0).$$

いま

$$H(z, w) = \sum_{\lambda_j > 0} \frac{m_j^+}{(\lambda_j^2 + z)^w}$$

とおけば，右辺は $\mathrm{Re}\, w > \frac{l}{2}$ のとき広義一様絶対収束することが知られているので，この半平面で

$$H(z, w) = \frac{1}{\Gamma(w)} \int_0^\infty \mathrm{Tr}' e^{-t\Delta^\circ} e^{-zt} t^w \frac{dt}{t}$$

である。形式的には

$$\frac{\partial H}{\partial w}(s^2, 0) = -\sum_{\lambda_j > 0} m_j^+ \log(\lambda_j^2 + s^2)$$

だから

$$\det(\Delta^\circ + s^2) = \exp\left\{-\frac{\partial H}{\partial w}(s^2, 0)\right\} s^{2b_p}$$

と定義したい所であるが，次の補題が証明されるから目出度く大丈夫。（l が奇数であることが本質的である）。

補題1. $\mathrm{Re}\, s^2 > -\lambda_1^2$ とする。このとき $H(s^2, w)$ は任意の半平面 $\mathrm{Re}\, w > -w_0$ ($w_0 \in \mathbb{R}$) に有理型に解析接続され整数点で正則である。

b) [MS1] と同様の方法である。$\mathrm{Re}\, s \gg 0$ のとき

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-ts^2} \mathrm{Tr}(B^\circ e^{-t\Delta^\circ})\, dt$$

とおく 次が成立。

補題2. $\mathrm{Re}\, s^2 > -\lambda_1^2$ で $I(s)$ は正則で，全 s-平面に有理型に解析接続される。$I(s)$ の極はすべて simple で，その位置は $\pm i\lambda_j$ $(j=1,2,\cdots)$，留数は $\pm \frac{1}{2i} m_j^-$ である。
より具体的に
$$I(s) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathrm{Tr}\left(\frac{B^0}{\Delta^0 + s^2} e^{-\varepsilon(\Delta^0 + s^2)} \right)$$
なる表示を持つ。

形式的には
$$I(s) = \sum_{\lambda_j > 0} \frac{\lambda_j m_j^-}{\lambda_j^2 + s^2} = \frac{1}{2i} \sum_{\lambda_j > 0} m_j^- \left(\frac{i}{\lambda_j + is} + \frac{i}{\lambda_j - is} \right)$$
と書けるので，目的の $\det\left(\frac{B^0 - is}{B^0 + is}\right)$ の定義は次の様にするのが妥当であろう。log は principal branch をとることにして

(1) $\frac{d}{ds} \log f(s) = \frac{2}{i} I(s)$ ，(2) $f(0) = (-1)^{b_p}$

で定まる unique な有理型関数 $f(s)$ を $\det\left(\frac{B^0 - is}{B^0 + is}\right)$ と定義する。

$I(-s) = I(s)$ なので明らかに次が成り立つ。
$$\det\left(\frac{B^0 - is}{B^0 + is}\right) \det\left(\frac{B^0 + is}{B^0 - is}\right) = 1 \quad 。$$

d) $d(s)$ を $\mathrm{Re}\, s^2 > -\lambda_1^2$ で

(1) $d(s)^2 = \det((B^0)^2 + s^2)\, s^{-2b_p} \det\left(\frac{B^0 - is}{B^0 + is}\right)(-1)^{b_p}$

(2) $d(0) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial w}(0,0)\right\}$

を満たす有理型関数とする（一意的に決まる）とき

$$\det(B^0 - is) = d(s)(is)^{b_p}$$

と定義する。

以上の定義の下で，もちろん次が成立。

$$\det\left((B^0)^2 + s^2\right)\det\left(\frac{B^0 - is}{B^0 + is}\right)^{\pm 1} = \det(B^0 \mp is)^2 .$$

§4. SZF

Γ は torsion free で Γ の元 $\gamma(\neq 1)$ は semisimple 故 γ は G の Cartan 部分群 $A = A_k A_p$ $(A_k \subset M)$ のある元 $h(\gamma) = m_\gamma a(\gamma)$ $(m_\gamma \in M,\ a(\gamma) \in A_p)$ に共役である。$A_p^+ = \exp \mathfrak{a}_p^+$ を positive Weyl chamber とすると この $a(\gamma)$ は $a(\gamma) \in A_p^+$ にとれる。いま α を $\mathfrak{a}_p$ に関する（unique な）正の制限ルートとし $l(\gamma) = \alpha(\log a(\gamma))$ と定める。幾何的に云うと，Γ の（nontrivial な）共役類と閉測地線は1対1に対応しているので，その意味で $l(\gamma)$ は閉測地線 γ の長さ，m_γ は γ に沿った平行移動に対するホロノミー写像を与えている。

P_+ を組 (G, A) に関する正のルートでありその $\mathfrak{a}_p$ への制限が α に等しいものの全体とし $P_+ = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n-1}\}$ と書く。$L := \{\sum_{i=1}^{2n-1} m_i \alpha_i \mid m_i \geqq 0,\ m_i \in \mathbb{Z}\}$ とおき $\lambda \in L$ に対し $\xi_\lambda(h) = \exp \lambda(\log h)$ $(h \in A)$ と定義する。

$\mathrm{Re}\, s$ が十分大きいとき，次の ∞ 乗積は絶対収束し s の解析関数を与える。

$$z(\chi : \sigma^{\pm} : s) := \prod_{\gamma_p} \prod_{\lambda \in L} \det\left(I - \chi(\gamma_p) \mathrm{Tr}\left(\sigma^{\pm}(m_{\gamma_p})^{-1}\right) \xi_\lambda(h(\gamma_p))^{-1} e^{-s\,\ell(\gamma_p)}\right)$$

但し $\prod_{\gamma_p}$ は Γ の原始的な共役類（原始的な閉測地線）を渡る積を表す。

この $z(\chi : \sigma^{\pm} ; s)$ をそれぞれ $\sigma^{\pm}$ に付随する SZF と呼ぶ。

さらに

$$Z_{\chi}^{\pm}(s) := z(\chi ; \sigma^{+} : s)\, z(\chi : \sigma^{-} ; s)^{\pm 1}$$

と定義する。Z_{χ}^{-} は [Mil] で論じられた SZF である。

§5. 行列式表示

結論を述べる前に，2種類の Selberg 跡公式（STF）にふれておく。テスト関数として急減少よりゆるい減少度のものが使える所が目玉である。

$\varepsilon > 0$ に対して $J^{\varepsilon} = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \rho + \varepsilon \}$ とおく。（$\mathbb{C} \simeq \mathfrak{a}_{\mathfrak{p},\mathbb{C}}$ と思っている。）$\rho = \frac{\ell - 1}{2}$ である。

$$\mathcal{A}^{\varepsilon} := \{ h ; \text{holomorphic in } J^{\varepsilon},\ h(z) = O(|z|^{-\ell-\varepsilon}) \text{ in } J^{\varepsilon} \}$$

とし $h \in \mathcal{A}^{\varepsilon}$ に対して（逆）フーリエ変換を

$$\hat{h}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(s) e^{isu}\, ds$$

とする。

記号達

$$B_q = \sum_{j=0}^{q} (-1)^{j+q} b_j \qquad (\text{Betti 数の交代和}),$$

$$\varepsilon^{\pm}_{\gamma,\chi} = \mathrm{Tr}\,\chi(\gamma)\{\mathrm{Tr}\,\sigma^{+}(m_\gamma) \pm \mathrm{Tr}\,\sigma^{-}(m_\gamma)\}\, l(\gamma_p) \det(I - m_\gamma e^{-l(\gamma)})^{-1}$$

（γ_p は γ に対する原始的元），

$$\mu(x) = \frac{\pi}{2^{8n-6}\Gamma(2n-\frac{1}{2})^2} \binom{4n-2}{2n-1} \prod_{j=1}^{2n-1} (x^2 + j^2)$$

（$\sigma^{\pm}$ に対応する $H = SO_0(4n-1,1)/SO(4n-1)$ の Plancherel 測度）

の下で

〖STF for Even Type〗（[F1], [D1]）　$h \in \mathcal{A}^{\varepsilon}$ を偶関数とする。

$$B_p h(0) + \sum_{\lambda_j > 0} m_j^{+} h(\lambda_j)$$

$$= 2\,\mathrm{Tr}\,\chi(1)\,\mathrm{vol}(X) \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\mu(x)\,dx + \sum_{\gamma} \varepsilon^{+}_{\gamma,\chi} e^{-\rho l(\gamma)} \hat{h}(l(\gamma))$$

〖STF for Odd Type〗　$h \in \mathcal{A}^{\varepsilon}$ を奇関数とする。

$$\sum_{\lambda_j > 0} m_j^{-} h(\lambda_j) = \sum_{\gamma} \varepsilon^{-}_{\gamma,\chi} e^{-\rho l(\gamma)} \hat{h}(l(\gamma))$$

，

以上，両辺共，和は絶対収束する。但し $\sum_{\gamma}$ は X のすべての閉測地線を渡る和を表す。

これらの STF を利用して次の結果を得る。

<u>補助定理1.</u>　$\det((B^0)^2 + s^2) = s^{2b_p} \exp\{P_\chi(s)\} Z^{+}_{\chi}(s+\rho)$，

但し $P_\chi(s)$ は l 次の奇多項式で次で与えられる：

$$P_\chi(s) = 4\pi \operatorname{Tr} \chi(1) \operatorname{vol}(X) \int_0^s \mu(it)\,dt$$

$\boxed{\text{注意}}$ "積分定数"の決定を除くと この結果は [D2] にある。

補助定理 2. ([MS1] [Wak 4])

$$\det\left(\frac{B^\circ - is}{B^\circ + is}\right) = e^{\pi i (b_p - \eta(\chi))} Z_\chi^-(s+\rho)$$

これらの補助定理の証明は大体以下の事を実行する。詳しくは [Wak 4] にあります。

《補助定理 1 の証明》

STF-Even Type ⊕ 補題 3 (後述) ⊕ 0 及び ∞ での Asymptotic behavior を詳しくみる

《補助定理 2 の証明》

STF-Odd Type ⊕ 補題 4 (後述) ⊕ ∞ での Asymptotic behavior をみる

補題 3. $\det'(\Delta^\circ + s^2) = \exp\left\{-\frac{\partial H}{\partial w}(s^2, 0)\right\}$ とおくと

$$\frac{1}{2s}\frac{\partial}{\partial s}\log \det'(\Delta^\circ + s^2) = H(s^2, 1)$$

また η-invariant の出現に関しては

補題 4. [Mi1] $\mathrm{Re}\, s^2 > -\lambda_1^2$ のとき

$$I(s) = \int_0^\infty e^{-ts^2} \mathrm{Tr}\,(B^0 e^{-t\Delta^0})\, dt = \frac{i}{2}\frac{d}{ds}\log Z_\alpha^-(s+\rho)$$ 。

さらに，$\eta(\alpha) = \eta(\alpha;0) = \frac{1}{\pi i}\log Z_\alpha^-(\rho)$

§6. $\sqrt{\Delta}$ の特性多項式

補助定理 1,2 を用いると次が示される。

定理. $\det(B^0 \mp is) = (\pm is)^{b_\rho} \exp\frac{1}{2}\{P_\alpha(s) \mp i\pi\eta(\alpha)\}\, Z(\alpha:\sigma^+;s+\rho)$.

α に対する dependence を明確にする為に B^0, b_ρ を $B^0(\alpha)$, $b_\rho(\alpha)$ と書くことにする。

系 1.

$$Z(\alpha:\sigma^+;-s+\rho) = \exp\{P_\alpha(s) + i\pi\eta(\alpha)\}\, Z(\alpha:\sigma^-:s+\rho)$$ 。

系 2. $\tilde{\eta}(\alpha) = \eta(\alpha) - \chi(1)\eta(I)$ (reduced η-invariant と呼ばれる)

とおくと

$$e^{\frac{i\pi}{2}\tilde{\eta}(\alpha)} \frac{\det(B^0(\alpha) - is)}{\det(B^0(I) - is)^{\chi(1)}} = (is)^{b_\rho(\alpha) - \chi(1) b_\rho(I)} \frac{Z(\alpha;\sigma^+;s+\rho)}{Z(I:\sigma^+:s+\rho)^{\chi(1)}}$$

REFERENCES

[APS1] M.F. Atiyah, V.K. Patodi and I.M. Singer , *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I*, Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69.

[APS2] ________________, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 405–432.

[APS3] ________________, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry III*, Proc. Camb. Phil. Soc. **79** (1975), 71-99.

[AS] M.F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math. **87** (1968), 546–604.

[BF] J.M. Bismut and D.S. Freed, *The analysis of elliptic families, II*, Commun. Math. Phys. **107** (1986), 103–163.

[BM] A.A. Beilinson and Yu.I. Manin, *The value of the Selberg zeta function at integral points*, Funct. Anal. Appl. (English translation) **21** (1987), 58–60.

[BW] A. Borel and N. Wallach, "Continuous cohomology, discrete subgroups, and representations of reductive groups," Ann. of Math. Study 94, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1980.

[D1] A. Deitmar , *The Selberg trace formula and the Ruelle Zeta function for compact hyperbolics*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **59** (1989), 101–106.

[D2] __________, *The Selberg zeta function is a characteristic polynomial*, pre print.

[DP] E. D'Hoker and D.H. Phong, *On determinants of Laplacians on Riemann surfaces*, Commun. Math. Phys. **104** (1986), 537–545.

[Don] H. Donnelly, *On the analytic torsion and eta invariant for negatively curved manifolds*, Amer. J. Math. **101** (1979), 1365–1379.

[F1] D. Fried , *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds*, Invent. math. **84** (1986), 523–540.

[F2] _______, *The zeta functions of Ruelle and Selberg I*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4ᵉ série, t. **19** (1986), 491–517.

[G] P. Gilkey, "The indextheorem and the heat equation," Publish or Perish, Math. Lecture Series 4, New York, 1974.

[H] D. Hejhal, "The Selberg trace formula for $PSL(2, \mathbb{R})$, I," Lecture Notes in Math 548, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[Kur] N. Kurokawa, *Special values of Selberg zeta functions*, Contemporary Math. **83** (1989), 133–150.

[MM] Y. Matsushima and S. Murakami, *On vector bundle valued harmonic forms and automorphic forms on symmetric Riemannian manifolds*, Ann. of Math. **78** (1963), 417–449.

[Mia] R.J. Miatello, *The Minakshisundaram-Pleijel coefficients for the vector valued heat kernel on compact locally symmetric spaces of negative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), 1–33.

[Mil] J.J. Millson, *Closed geodesics and the η-invariant*, Ann. of Math. **108** (1978), 1–39.

[MS1] H. Moscovici and R.J.Stanton , *Eta invariants of Dirac operators on locally symmetric manifolds*, Invent. math. **95** (1989), 629–666.

[MS2] ________________, *R-torsion and zeta functions for locally symmetric manifolds*, preprint.

[PS] R. Phillips and P. Sarnak, *Geodesics in homology classes*, Duke Math. J. **55** (1987), 287–297.

[Q] D. Quillen, *Determinant of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces*, Funct. Anal. Appl. (English translation) **19** (1985), 31–34.

[RS] D.B. Ray and I.M. Singer, *Analytic torsion for complex manifolds*, Ann. of Math. **98** (1973), 154–177.

[Sar] P. Sarnak , *Determinants of Laplacians*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 113–120.

[Sel] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weak-ly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–87.

[Sin] I.M. Singer, *Eigenvalues of the Laplacian and Invariants of Manifolds*, in "Proc. Int. Cong. Math. Vancouver," 1974, pp. 187–200.

[V] A. Voros, *Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function*, Commun. Math. Phys. **110** (1987), 439–465.

[Wak1] M. Wakayama , *Zeta functions of Selberg's type associated with homogeneous vector bundles*, Hiroshima Math. J. **15** (1985), 235–295.

[Wak2] ————————, *A formula for the logarithmic derivative of Selberg's zeta function*, J. Math. Soc. Japan **41** (1989), 463–471.

[Wak3] ————————, *A note on the Selberg zeta function for compact quotients of hyperbolic spaces*, to appear in Hiroshima Math. J..

[Wak4] ————————, *The relation between the η-invariant and the spin representation in terms of the Selberg zeta function*, to appear in Advanced Studies in Pure Math. "Zeta Functions in Geometry".

[Wal] N. Wallach, *On the Selberg trace formula in the case of compact quotient*, Bull. Amer. Math. Soc. **82** (1976), 171–195.