数理解析研究所講究録
第 761 巻 1991 年 36-51

Kirilov-Kostant theory と
コアジョイントオービット上の
Feynman path integrals

広大理 橋本 隆司 (Takashi Hashimoto)
広大理 小椋 一徳 (Kazunori Ogura)
広大理 岡本 清郷 (Kiyosato Okamoto)
広大理 澤江 隆一 (Ryuichi Sawae)
広大理 安永 尚総 (Hisatoshi Yasunaga)

§0. Alekseev, Faddeev, Shatashvili によるコンパクトリー群の既約表現の構成法に従って、ノンコンパクトリー群のコアジョイントオービット上の Feynman path integral を計算した。しかし、一般のリー群に対する統一された方法を見出すことはまだ出来ていない。そこで Heisenberg group Affine transformation group, SL(2,ℝ) についての結果を述べることにする。

§1、Kirillov-Kostant theory

Gをリー群とし、$\mathfrak{g}$をそれに対するリー環、Adを$\mathfrak{g}$上のadjoint actionとし、$\mathfrak{g}$の相対空間$\mathfrak{g}^*$上のcoadjoint actionを、Ad'で表す。

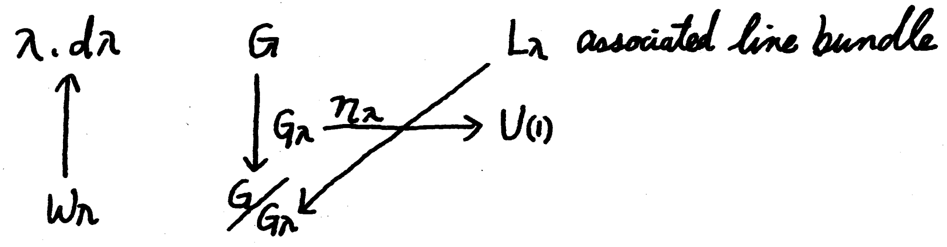
任意の$\lambda\in\mathfrak{g}^*$に対し、λに対するisotropy subgroupを、$G_\lambda=\{g\in G、Ad^*_{(g)}\lambda=\lambda\}$ とし、それのリー環を$\mathfrak{g}_\lambda$とする。

今λはintegralとする。

既ち、 $\mathfrak{g}_\lambda \ni X \longmapsto -\sqrt{-1}\lambda(X)\in\sqrt{-1}\mathbb{R}$ は

$G_\lambda \xrightarrow[\eta_\lambda]{} U(1)$ にリフトする。

この時



Symplectic form.

又、$g\in G$、$f\in L^2(L_\lambda, \Lambda^{\frac{d}{2}}w_\lambda)$、$d=\dim G/G_\lambda$ に対し、

Gの表現 π_λ を、

$$(\pi_\lambda(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

で定義する。

Real polarization $\mathfrak{p}$ をとる。

$$\mathfrak{g}_\lambda \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$$

$$\lambda([\mathfrak{p},\mathfrak{p}]) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda : \mathfrak{p} \ni X \longmapsto -\sqrt{-1}\lambda(X) \in \sqrt{-1}\mathbb{R} \quad : \text{Lie alg. homo.}$$

λはキャラクター η_λ にリフトするとする。

$$P \xrightarrow{\ \eta_\lambda\ } U(1)$$

$$\eta_\lambda \Longrightarrow \eta_\lambda \eta_\rho \; (= \xi_\lambda)$$

η_ρは、Pのキャラクターであって、η_ρの associated line bundle が、G/P の volume bundle の絶対値の平方根となるものとする。

この時、

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dd] & & L_{\xi_\lambda} \arrow[ddll] \\ P \arrow[rr] & & \mathbb{C}^* \\ G/P & & \end{tikzcd} \qquad \left(\begin{tikzcd} G \arrow[dd] & & L_{\xi_\lambda} \arrow[ddll] \\ P_0 \arrow[rr, "\xi_\lambda|P_0"] & & \mathbb{C}^* \\ G/P_0 & & \end{tikzcd} \right)$$

（　一般には、complex polarization

$$\mathfrak{g}_\lambda^{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$$

を考えなければならない。　）

§2. Examples

(i) Heisenberg group

$$G=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z\\ & 1 & y\\ & & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ x, y, z\in\mathbb{R}\right\}$$ とし、リー環を

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}0 & x & z\\ & 0 & y\\ & & 0\end{pmatrix}\ \middle|\ x, y, z\in\mathbb{R}\right\}$$ 又、相対空間$\mathfrak{g}^*$を

$$\mathfrak{g}^*=\left\{\begin{pmatrix}0 & & \\ \xi & 0 & \\ \sigma & \eta & 0\end{pmatrix}\ \middle|\ \xi, \eta, \sigma\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*\ni(X, \lambda)\longmapsto \operatorname{tr}X\lambda\in\mathbb{R}$$ とする。

この時、任意の nontrivial coadjoint orbit は

$$\mathfrak{g}^*\ni\lambda_\sigma=\begin{pmatrix}0 & & \\ 0 & 0 & \\ \sigma & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{for } {}^\exists\sigma\neq 0$$

と表される。 λ_σに対する isotropy subgroup は、

$$G_{\lambda_\sigma}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & z\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}$$ リー環は、

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & z\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\ \middle|\ z\in\mathbb{R}\right\}$$ となる。

Real polarization を

$$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix}0 & x & z\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\ \middle|\ x, z\in\mathbb{R}\right\}$$ ととると、

これに対する analytic subgroup P は、

$$P=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & z\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix} \,\middle|\, x, z\in\mathbb{R}\right\}$$

となる。

すると Lie alg. homo.

$$\mathfrak{p}\ni\begin{pmatrix}0 & x & z\\ & 0 & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\longmapsto -\sqrt{-1}\sigma z\in\sqrt{-1}\mathbb{R} \text{ は}$$

キャラクター

$$\xi_\lambda : P\ni\begin{pmatrix}1 & x & z\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\longmapsto e^{-\sqrt{-1}\sigma z}\in U(1)$$

にリフトする。

この時、path integral は、

$(\dim G/G_\lambda = 2)$

$^\forall X, {}^\forall\bar{X}\in\mathfrak{g}$ 、s.t. $\mathfrak{g}=\mathbb{R}X\oplus\mathfrak{p}$. $\mathfrak{p}=\mathbb{R}\bar{X}\oplus\mathfrak{g}_\lambda$ に対し

$$\lim_{N\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N\ni(x_0\cdots x_{N-1}, y_0\cdots y_{N-1})}\prod_{k=0}^{N-1}\frac{d\langle Ad^*(e^{y_k\bar{X}})\lambda, g_k^{-1}dg_k\rangle}{2\pi}$$

$$e^{\sqrt{-1}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\frac{T}{N}}^{(k+1)\frac{T}{N}}dt\langle Ad^*(e^{y_k\bar{X}})\lambda,\, g^{-1}(t)\frac{dg(t)}{dt}-Ad(g^{-1}(t))Y\rangle}\quad F(g_0)$$

となる。

$$(=(\pi(e^{TY})F)(g'))$$

$$g(t) = e^{\left(x_k + \frac{x_{k+1}-x_k}{T/N}\left(t-\frac{k}{N}T\right)\right)X}\ e^{P+(P'-P)\frac{t}{T}} \qquad t \in \left[\tfrac{k}{N}T,\ \tfrac{k+1}{N}T\right)$$

$$g_0 = e^{x_0 X}e^{P}\ ,\quad g' = e^{x'X}e^{P'} \qquad P, P' \in \mathfrak{p},\ x_N = x'$$

$$\begin{aligned} g_k &= g\left(\tfrac{k}{N}T\right) \\ &= e^{x_k X}e^{P+(P'-P)\frac{k}{N}} \end{aligned}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix}\ ,\quad \bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ とすると、

$$\left(\mathfrak{n} = \mathbb{R}X,\ \bar{\mathfrak{n}} = \mathbb{R}\bar{X}\right)$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}\ ,\quad \mathfrak{p} = \bar{\mathfrak{n}} \oplus \mathfrak{g}_\lambda$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{n} & \xrightarrow{\exp} & N & \longrightarrow & G/P \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & n & \longmapsto & nP \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \bar{\mathfrak{n}} & \xrightarrow{\exp} & \bar{N} & \longrightarrow & P/G_\lambda \\ & & \Psi & & \Psi \\ & & \bar{n} & \longmapsto & \bar{n}G_\lambda \end{array}$$

onto である。

$$G/P \ni e^{xX}P \longmapsto x \in \mathbb{R}$$

$$P/G_\lambda \ni e^{y\bar{X}}G_\lambda \longmapsto y \in \mathbb{R}$$

$$G/G_\lambda \ni e^{xX}e^{y\bar{X}}G_\lambda \longmapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2$$ *global coordinate*

この時 action を、

$$^{\forall}Y \in \mathfrak{g}$$

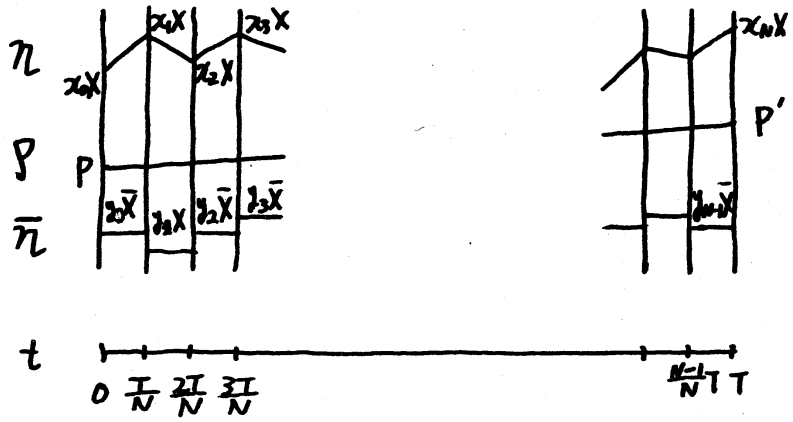
$$^{\forall}\gamma : [0, T] \longrightarrow \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p} \oplus \bar{\mathfrak{n}}$$

$$t \longmapsto (x(t)X,\ P(t),\ y(t)\bar{X})$$ に対し、

$$\mathrm{action}_Y(\gamma) = \int_0^T \langle Ad^*(e^{y(t)\bar{X}})\lambda,\ g^{-1}\frac{dg}{dt} - Ad(g^{-1})Y \rangle dt$$

$$g = g(t) = e^{x(t)X} e^{P(t)}$$ で定義する。

Path は下の様にとる。



$$Y = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & u(t) & v(t) \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$$ とすると、

$$\mathrm{action}_Y(x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot), v(\cdot))$$

$$= \int_0^T \sigma(\dot{v} - u\dot{x} - y\dot{x}) - \sigma(ax + c - bu - by)\ dt$$

上の Path に対して、

$$\mathrm{action}_Y(x_0 \cdots x_N, y_0 \cdots y_{N-1}, u, v, u', v')$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \int_{\frac{k-1}{N}T}^{\frac{k}{N}T} \sigma\left(\frac{v'-v}{T} - \left(u + (u'-u)\frac{t}{T}\right)\frac{x_k - x_{k-1}}{T/N} - y_{k-1}\frac{x_k - x_{k-1}}{T/N}\right)$$

$$- \sigma\left(a\left(x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N}\left(t - \frac{k-1}{N}T\right)\right) + c - b\left(u + (u'-u)\frac{t}{T}\right) - by_{k-1}\right) dt$$

但し $u(0)=u$, $u(T)=u'$

$v(0)=v$, $v(T)=v'$ である。

ヌメジャーは

$$\prod_{k=0}^{N-1}\frac{d\langle Ad'(e^{y_k Y})\lambda, g_k^{-1}dg_k\rangle}{2\pi}, \quad (g_k = e^{x_k X}e^{P+(P'-P)\frac{k}{N}})$$

$$=\prod_{k=0}^{N-1}\left(\sigma\, dx_k \frac{dy_k}{2\pi}\right) = dx_0 \times \left(\prod_{k=1}^{N-1} dx_k \prod_{k=0}^{N-1}\frac{\sigma dy_k}{2\pi}\right)$$

ととる。

パスインテグラルは.

$g' = e^{x'X}e^{P'}$ $\quad P' = \begin{pmatrix} 0 & u' & v' \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$g = e^{xX}e^{P}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}$ とすると.

$\Gamma(L^*_{\xi\lambda}\otimes L_{\xi\lambda})$

Ψ

$$K_Y(g', g) = \lim_{N\to\infty}\int \prod_{k=1}^{N-1} dx_k \prod_{k=1}^{N-1}\frac{\sigma dy_k}{2\pi} e^{\sqrt{-1}\, action_Y(x_0\cdots x_N, y_0\cdots y_{N-1}, u, v, u', v')}$$

$$(x' = x_N,\ x = x_0)$$

$$= e^{\sqrt{-1}\sigma(v'-v)}\delta(x'-x-bT)\, e^{-\sqrt{-1}\sigma(axT+\frac{ab}{2}T^2+cT)}$$

よって

$$(\pi^P_\lambda(e^{TY})F)(g') = \int_{-\infty}^{\infty} K_Y(g', g) F(g)\, dx$$

を得る。

以上のことは

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_n & z \\ & \ddots & & & y_1 \\ & & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & y_n \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 \cdots x_n \\ y_1 \cdots y_n \\ z \end{matrix} \in \mathbb{R}\right\}$$

および

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

の場合に拡張できる。

(ii) *Affine transformation group of real line*

$$G=\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x,y\in\mathbb{R},\ x>0\right\}$$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a,b\in\mathbb{R}\right\}$$

$$\mathfrak{g}^*=\left\{\begin{pmatrix} \xi & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi,\sigma\in\mathbb{R}\right\}$$

とする。

この時 $\lambda_\sigma=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}\in\mathfrak{g}'$, $\sigma=\pm 1$ に対し、

$$G_{\lambda_\sigma}=\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad \mathfrak{g}_{\lambda_\sigma}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

又 polarization を

$\mathfrak{p}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b\in\mathbb{R}\right\}$ とし、

$P=\left\{\begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; y\in\mathbb{R}\right\}$ とする。

$\xi_\lambda : P \ni \begin{pmatrix} 1 & y \\ & 1 \end{pmatrix} \longmapsto e^{\sqrt{-1}\sigma y}\in U(1)$

π_λ^P : *representation of G*

この時パスインテグラルは、

$X=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\bar{X}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とすると.

$$action_Y(\gamma)=\int_\gamma \langle Ad^*(e^{y(t)\bar{X}})\lambda , g(t)^{-1}\frac{dg(t)}{dt}-Ad(g^{-1}(t))Y\rangle dt$$

$$g(t)=\exp\begin{pmatrix}x(t)&0\\0&0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&u(t)\\0&0\end{pmatrix}$$

$$=\int_0^T \sigma\left((y(t)+u(t))\,\dot{x}(t)+\dot{u}(t)\right)-\sigma a(y(t)+u(t))-\sigma b e^{-x(t)}dt$$

$Y=\begin{pmatrix}a&b\\0&0\end{pmatrix}$ となる。

$$y(t)=y_{k-1}$$

$$x(t)=x_{k-1}+\frac{x_k-x_{k-1}}{T/N}\left(t-\frac{k-1}{N}T\right) \qquad t\in\left[\frac{k-1}{N}T,\frac{k}{N}T\right),k=1,\cdots,N$$

$$u(t)=u+(u'-u)\frac{t}{T}$$

とすると、

$$K_Y(g',g)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int dx_1\cdots dx_{N-1}\frac{\sigma dy_0}{2\pi}\cdots\frac{\sigma dy_{N-1}}{2\pi}e^{\hbar i\, action_Y(\gamma)}$$

$g'=\exp\begin{pmatrix}x'&0\\0&0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&u'\\0&0\end{pmatrix}$

$g=\exp\begin{pmatrix}x&0\\0&0\end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix}0&u\\0&0\end{pmatrix}$. $x'=x_N$. $x=x_0$ とすると.

$$=e^{\sigma\hbar i(u'-u)}e^{\hbar i\sigma\frac{b}{a}e^{-x'}(1-e^{aT})}\delta(x'-x-aT)$$

よって

$$\int K_Y(g', g) F(g)\, dx = (\pi_\lambda^P(e^{TY}) F)(g')$$

を得る。

(iii) $SL(2, \mathbb{R})$

$G = SL(2, \mathbb{R})$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$

$\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$

$\lambda_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma/2 & \\ & -\sigma/2 \end{pmatrix}$, $\sigma \neq 0$ に対し、

$$G_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} z \in \mathbb{R} \\ z \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{\lambda_\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$$ とする。

Polarization を

$$\mathfrak{p} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & -a \end{pmatrix} \middle| a, c \in \mathbb{R} \right\}$$ ととり

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \middle| z, y \in \mathbb{R}, z \neq 0 \right\}$$

$$P_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \middle| z, y \in \mathbb{R}, z > 0 \right\}$$ とする。

$$\xi_{\lambda\sigma} : P_0 \ni \begin{pmatrix} z & 0 \\ y & z^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto z^{-\sqrt{-1}\sigma-1} \in \mathbb{C}^*$$

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[dd, "P_0"'] & & L_\lambda \arrow[ddll] \\
& P_0 \arrow[r, "\xi_{\lambda\sigma}"] & \mathbb{C}^* \\
G/P_0 & &
\end{tikzcd}$$

$\mathfrak{g} = {}^{\exists}\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{p}$　とすると、

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{n} \arrow[d, "\exp"'] & \\
N \arrow[d] & n \arrow[d, mapsto] \\
G/P_0 & nP_0
\end{tikzcd}$$

$N \ni n$, $G/P_0 \ni nP_0$　　これは onto でない。　そこで、

$\mathfrak{n} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ として、カバリングをとる。

$h_0 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$,　$h_1 = \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$,　$h_2 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$,　$h_3 = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$

$$G/P_0 = \bigcup_{i=0}^{3} h_i N P_0 \qquad \left(G/P_0 \underset{\text{open}}{\supset} U_i \quad i = 0, \dots, 3,\ U_i = h_i N P_0 \right)$$

$$\left(G \underset{\text{open}}{\supset} V_i = U_i P_0 \right)$$

$$G/P_0 = \overline{U_0 \cup U_2} = \overline{U_1 \cup U_3}$$

$Y_1 = \begin{pmatrix} a & \\ & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}$ とする。 その時.

$K_{Y_1}(g', g)$ を求める。

$^\forall t \in [0. T]$ に対し、

$e^{-tY_1} V_0 \subset V_0$

$e^{-tY_1} V_2 \subset V_2$

$V_0 \cap V_2 = \phi$

$G = \overline{V_0 \cup V_2}$

$K_{Y_1}(g', g)\big|_{V_0 \times V_2} = 0$

$K_{Y_1}(g', g)\big|_{V_2 \times V_0} = 0$

$K_{Y_1}(g', g)\big|_{V_i \times V_i}$ $(i = 0.2)$ の値を求める。

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると、

$$\mathrm{action}_{Y_1}(\gamma) = \int_\gamma \left\langle Ad'(e^{y(t)\bar{X}})\lambda,\ g(t)^{-1}\frac{dg(t)}{dt} - Ad(g(t)^{-1})Y_1 \right\rangle dt$$

$$g(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \pm 1 & \\ & \pm 1 \end{pmatrix}}_{h_0.h_2.} \exp\begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix}$$ とすると、

$V_0 \longleftrightarrow +1$

$V_2 \longleftrightarrow -1$

$\mathrm{action}_{Y_1}(\gamma)$

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2}\left(v\frac{1-2^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u}\right)\dot{x} - \frac{\sigma}{2}\left(2a + 2ax\left(v\frac{1-e^{-2u}}{u} + 2y e^{-2u}\right)\right)dt + \sigma\dot{u}$$

$$y = y(t) = y_{k-1}$$

$$x = x(t) = x_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-1}}{T/N}\left(t - \frac{k-1}{N}T\right)$$

$$u = u(t) = u + (u'-u)\frac{t}{T}$$

$$v = v(t) = v + (v'-v)\frac{t}{T} \qquad t \in \left[\frac{k-1}{N}T, \frac{k}{N}T\right),\ k = 1, \cdots, N$$

ととると、

$$K_{Y_1}(g', g)_{V_i \times V_i} \qquad i = 0, 2$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int dx_1 \cdots dx_{N-1}\frac{\sigma dy_0}{2\pi}\cdots\frac{\sigma dy_{N-1}}{2\pi} e^{\sqrt{-1}\,\mathrm{action}_{Y_1}(\gamma)}$$

$$g' = h_i \exp\begin{pmatrix} 0 & x' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} u' & 0 \\ v' & -u' \end{pmatrix}$$

$$g = h_i \exp\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} u & 0 \\ v & -u \end{pmatrix}$$

$$= e^{\sqrt{-1}\sigma u' + u'} e^{-\sqrt{-1}\sigma u - u} e^{-\sqrt{-1}\sigma a T + aT}\,\delta(x' - e^{2aT}x)$$

よって、

$$\int_{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}} K_{Y_1}(g', g) F(g)\, dx = (\pi_\lambda^{\ell}(e^{TY_1})F)(g')$$

を得る。

$Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき

$^\forall t \in [0, T]$ に対し、$e^{-tY_2} V_i \subset V_i \quad i = 0, 2$

$K_{Y_2}(g', g)\big|_{V_0 \times V_2} = 0$

$K_{Y_2}(g', g)\big|_{V_2 \times V_0} = 0$

$K_{Y_2}(g', g)\big|_{V_i \times V_i}$ $(i = 0, 2)$ の値を求める。

$\mathrm{action}_{Y_2}(\gamma)$

$$= \int_\gamma \langle Ad^*(e^{y(t)\tilde{X}})\lambda, g^{-1}(t)\frac{dg(t)}{dt} - Ad(g^{-1}(t))Y_2 \rangle dt$$

$$g(t) = h_i \exp\begin{pmatrix} 0 & x(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \exp\begin{pmatrix} u(t) & 0 \\ v(t) & -u(t) \end{pmatrix}$$ として、

$$= \int_0^T \frac{\sigma}{2}\left(v\frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u}\right)\dot{x} - \frac{\sigma}{2}b\left(v\frac{1-e^{-2u}}{u} + 2ye^{-2u}\right)dt + \sigma\dot{u}$$

よって、

$K_{Y_2}(g', g)_{V_i \times V_i} \quad i = 0, 2.$

$$= e^{\sqrt{-1}\sigma u' + u'} e^{-\sqrt{-1}\sigma u - u} \delta(x' - x - bT)$$

となり、

$$\int_{R \cup R} K_{Y_2}(g', g) F(g)\, dx = (\pi_\lambda^\rho(e^{TY_2})F)(g')$$

を得る。

$Y_3=\begin{pmatrix}0&0\\c&0\end{pmatrix}$ の時

${}^\forall t\in[0,T]$ に対し、

$e^{-tY_3}V_i\subset V_i \qquad i=1,3$

$K_{Y_3}(g',g)|_{V_1\times V_3}=0$

$K_{Y_3}(g',g)|_{V_3\times V_1}=0$

$K_{Y_3}(g',g)|_{V_i\times V_i} \qquad i=1,3$ の値を求める。

$\mathrm{action}_{Y_3}(\gamma)$

$$=\int_0^T\frac{\sigma}{2}\left(v\frac{1-e^{-2u}}{u}+2ye^{-2u}\right)\dot{x}+\frac{\sigma}{2}c\left(v\frac{1-e^{-2u}}{u}+2ye^{-2u}\right)+\sigma\dot{u}\,dt$$

よって

$K_{Y_3}(g',g)_{V_i\times V_i} \qquad i=1,3$

$=e^{\sqrt{-1}\sigma u'+u'}e^{-\sqrt{-1}\sigma u-u}\,\delta(x'-x+cT)$

よって

$$\int_{\mathbb{R}\cup\mathbb{R}}K_{Y_3}(g',g)F(g)\,dx=(\pi_\lambda^\rho(e^{TY_3})F)(g')$$

を得る。