

## Zonal 多項式について

広大・理 木幡篤孝 (Atsutaka Kowata)

### § 0. Intro

Zonal 多項式は, E. Cartan [2], H. Weyl [12] を始めとする表現論において Schur 多項式と並んで, 重要なものとして研究され, 対称空間上の球関数として拡張され, (Helgason [5], Harish-Chandra [4]), 今尚その様々な方向への拡張が研究されつつある。(Macdonald [10], Jing-Yamada [9]).

他方, 統計学に於いて, James [7] は多変量解析学に Zonal 多項式を用いる画期的な方法を導入した。しかし統計学に於いては具体的な座標による Zonal 多項式の具体的な式が必要となる。実際, James [8] では, 代数的表現論の研究を以ていつ Zonal 多項式の具体的な表示を得ようとしたが, 特別な場合を除いては成功していない。

ここでは,  $3 \times 3$  正定値対称行列上の Zonal 多項式を対称行列の固有値の基本対称式に関する explicit な式で表わす。

尚, Lemma 1 と定理の証明の一部は和田涼子さん(広大・経科)によるものである。

## § 1. Preliminaries

$n \in \mathbb{N}$  とする。 $\mathcal{Y}$  で  $3 \times 3$  実正定値対称行列全体,  $\mathcal{V}_n$  で  $\mathcal{Y}$  上の複素数値  $n$  次同次多項式全体のなすベクトル空間を表わす。 $G = GL(3, \mathbb{R})$ ,  $K = O(3, \mathbb{R})$  をそれぞれ, 3 次の一般線型群, 実直交群とすると, 自然に  $\mathcal{Y}$  と  $G/K$  は同一視される。 $\mathcal{V}_n$  上の  $G$  の表現  $\rho$  は次の式で定義する。

$$\rho(g)\varphi(y) = \varphi(\bar{g}^{-1} \cdot y \cdot \bar{g})$$

ここに,  $\varphi \in \mathcal{V}_n$ ,  $y \in \mathcal{Y}$ ,  $g \in G$  とする。

$n$  の 3 分割を  $\mathcal{P}_n$  で表わそう。つまり

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \pi = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}_+^3 ; \begin{array}{l} n_1 \geq n_2 \geq n_3 \\ n_1 + n_2 + n_3 = n \end{array} \right\}.$$

ここに  $\mathbb{Z}_+ = \{n : \text{non-negative integers}\}$  とする。

各  $\pi = (n_1, n_2, n_3)$  に対し

$$\psi_\pi(y) = y_{11}^{n_1 - n_2} (y_{11}y_{22} - y_{12}^2)^{n_2 - n_3} (\det y)^{n_3}$$

とおく。 $(y = (y_{ij}) \in \mathcal{Y})$  更に  $\mathcal{V}_\pi$  で,  $\{\rho(g)\psi_\pi; g \in G\}$  により張られるベクトル空間を表わすことにする。この時,

よく知られている (例えは [1]) ように  $\mathcal{V}_n = \bigoplus_{\pi \in \mathcal{P}_n} \mathcal{V}_\pi$  が成り立つ。

$$\mathcal{V}_n^I = \{ \varphi \in \mathcal{V}_n ; \rho(k)\varphi = \varphi \quad \forall k \in K \}$$

$$\mathcal{V}_\pi^I = \mathcal{V}_\pi \cap \mathcal{V}_n^I$$

とおくと, [2] により,  $\dim \mathcal{V}_\pi^I = 1$  となり,  $\mathcal{V}_\pi^I$  の生成元 ~~は~~ zonal 多項式と呼ばれる。

統計学の記法と合すために,  $V_n^I$  の生成元  $C_\pi$  を次の式が成り立つようにとる。

$$(\text{tr } y)^n = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_n} C_\pi(y)$$

$C_\pi$  の定義からある zero でない定数  $c$  があって

$$C_\pi(y) = c \int_{O(3)} \rho(k) \psi_\pi(y) dk$$

と書ける。ここに  $\int_{O(3)} dk = 1$  とする。任意の  $y \in \mathcal{Y}$  に対して  ${}^t k y k = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda$  ( $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  は  $y$  の固有値) となる  $k \in O(3)$  がとれ, Zonal の定義から  $C_\pi$  は  $\lambda$  の関数となる。実際上の積分から, 次の積分表示を得る。

$$C_\pi(\lambda) = c' (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^{n_3} \int_{O(3)} (a_{11}^2 \lambda_1 + a_{22}^2 \lambda_2 + a_{33}^2 \lambda_3)^{n_1 - n_2} (a_{31}^2 \lambda_1 \lambda_2 + a_{13}^2 \lambda_1 \lambda_2 + a_{23}^2 \lambda_1 \lambda_2)^{n_2 - n_3} dk$$

ここに  $c'$  は non-zero 定数で  $k = (a_{ij}) \in K$  とする。

$D(G/K)$  で  $G/K$  上の  $G$ -不変な微分作用素の可換環とする。Schur の lemma を用いると

$$D(V_n) \subset V_n, \quad D(V_\pi) \subset V_\pi \quad \forall D \in D(G/K)$$

が分ることにより, Zonal 多項式  $C_\pi$  は  $G/K (\cong \mathcal{Y})$  上の球関数であることが知られる。(詳しくは see [5]).

## §2. Zonal 多項式の係数について

ここでは、対称行列の固有値の基本対称式による展開の係数を具体的に求める。§1で見たように  $C_\pi$  は zonal spherical function であるから、特に  $\mathcal{Y}$  上の Laplace-Bertrami 作用素の固有函数である。今  $\Delta$  で 軌道方向を表わすことにすると、次の式で表わされる。

$$\Delta = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \right)^2 + \sum_{\substack{i+j \\ 1 \leq i, j \leq 3}} \lambda_i^2 (\lambda_i - \lambda_j)^{-1} \frac{\partial}{\partial \lambda_i}$$

(cf. [8]). 更に [8] から

$$\Delta C_\pi = \chi(\pi) C_\pi$$

ここに  $\chi(\pi) = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_1 - n_3$ .

さて  $s_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ ,  $s_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1$ ,  $s_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

とおくと、 $C_\pi(\lambda)$  は  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  の対称多項式と見るから、

$C_\pi$  は  $s_1, s_2, s_3$  の多項式でもある。そこでこの変数  $s$  に関する微分方程式を作り。

$$\Omega C_\pi = \chi(\pi) C_\pi$$

$$\begin{aligned} \Omega = & (s_1^2 - 2s_2) \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \right)^2 + (2s_2^2 - 2s_1 s_3) \left( \frac{\partial}{\partial s_2} \right)^2 + 3s_3^2 \left( \frac{\partial}{\partial s_3} \right)^2 \\ & + (2s_1 s_2 - 6s_3) \left( \frac{\partial^2}{\partial s_1 \partial s_2} \right) + 4s_2 s_3 \left( \frac{\partial^2}{\partial s_2 \partial s_3} \right) + 2s_1 \left( \frac{\partial}{\partial s_1} \right) + 3s_3 \left( \frac{\partial}{\partial s_3} \right) \end{aligned}$$

ここで  $C_{\pi} = \sum_{\nu \in \Lambda_{\pi}} a_{\pi}(\nu) s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} s_3^{\nu_3}$  と表わす。ここに

$$\Lambda_{\pi} = \{ \nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbb{Z}_+^3; \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 = \pi \}$$

とある。前述の  $\Omega$  に関する微分方程式から次の関係式が出る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (P(\nu) - \chi(\pi)) a_{\pi}(\nu) \\ &= (\nu_1 + 2)(\nu_1 + 1) a_{\pi}(\nu_1 + 2, \nu_2 - 1, \nu_3) \\ & \quad + (\nu_2 + 2)(\nu_2 + 1) a_{\pi}(\nu_1 - 1, \nu_2 + 2, \nu_3 - 1) \\ & \quad + 3(\nu_1 + 1)(\nu_2 + 1) a_{\pi}(\nu_1 + 1, \nu_2 + 1, \nu_3 - 1) \end{aligned} \quad (1)$$

ここに  $P(\nu) = \nu_1^2 + 2\nu_2^2 + 3\nu_3^2 + 2\nu_1\nu_2 + 4\nu_2\nu_3 + 2\nu_1\nu_3 + \nu_1\nu_2$ .

さてこの漸化式を解わけだが、ゆえに"も解は一意的でないので、次の条件を加えることにある。

$$a_{\pi}(\nu) = 0 \quad (\nu \notin \Lambda_{\pi}) \quad (2)$$

$$\text{if } \nu_3 < n_3 \Rightarrow a_{\pi}(\nu) = 0 \quad (3)$$

$$\text{if } \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 > f_1 \text{ or } \begin{cases} \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = f_1 \\ \nu_2 + \nu_3 > f_2 \end{cases} \Rightarrow a_{\pi}(\nu) = 0 \quad (4)$$

このとき次の Lemma 1 が成り立つ。

Lemma 1 (和)  $\forall \pi \in \mathcal{P}_n$  に対して (1), (2), (3), (4) を満たす  $\{a_{\pi}(\nu); \nu \in \Lambda_{\pi}\}$  は定数値を除いて一意的に決まる。

更に次の定理が成立する。

Theorem  $\pi \in \mathcal{P}_n$  とおす。 ( $\pi = (n_1, n_2, n_3)$ )

$$C_\pi(\omega) = \frac{(n_1 - n_2 + \frac{1}{2})(n_1 - n_3 + 1)(n_2 - n_3 + \frac{1}{2}) \Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1)}{\Gamma(n_1 + 2) \Gamma(n_2 + \frac{3}{2}) \Gamma(n_3 + 1) \Gamma(\frac{1}{2})} \times$$

$$\sum_{\substack{\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 = n_1 + n_2 + n_3 \\ 0 \leq k \leq n_2 - n_3 \\ 0 \leq j \leq g(k)}} (-1)^{\nu_2 + k + n_2 - n_3} 2^{2j} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(n_2 - n_3 - k + \frac{1}{2}) \Gamma(n_1 - n_3 - k + 1) \Gamma(\nu_1 + \frac{1}{2} + \nu_2 - n_2 + \frac{1}{2})}{\Gamma(k - j + 1) \Gamma(2j + 1) \Gamma(n_2 - n_3 - k - j + 1) \Gamma(n_1 - n_3 - j - k + \frac{3}{2})}$$

$$\times \frac{\Gamma(\nu_2 + 2\nu_3 - 2n_3 - j - k + 1)}{\Gamma(\nu_1 + 1) \Gamma(\nu_2 + 1) \Gamma(\nu_2 + 2\nu_3 - n_2 - n_3 + 1) \Gamma(\nu_3 - n_3 - k + 1)} \Delta_1^{\nu_1} \Delta_2^{\nu_2} \Delta_3^{\nu_3}$$

ここで  $\Gamma(x)$  は Gamma 関数であり

$$g(k) = \begin{cases} k & (k \leq \frac{n_2 - n_3}{2}) \\ n_2 - n_3 - k & (\frac{n_2 - n_3}{2} \leq k) \end{cases}$$

とある。更に top の項は

$$\frac{\Gamma(n_1 + n_2 + n_3 + 1) \Gamma(n_1 - n_2 + \frac{3}{2}) \Gamma(n_1 - n_3 + 2) \Gamma(n_2 - n_3 + \frac{3}{2})}{\Gamma(n_1 + 2) \Gamma(n_2 + \frac{3}{2}) \Gamma(n_3 + 1) \Gamma(n_1 - n_2 + 1) \Gamma(n_1 - n_3 + \frac{3}{2}) \Gamma(n_2 - n_3 + 1)} \Delta_1^{n_1 - n_2} \Delta_2^{n_2 - n_3} \Delta_3^{n_3}$$

となる。

この定理の証明には Lemma 1 の外に、次の 2 つの Lemma の必要となる。

$$\text{Lemma 2. } a_{l,m}(\nu, \mu) = \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^{g(k)} (-1)^k 2^{2j} \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Gamma(l + 1) \Gamma(l - k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{l}{2}) \Gamma(2j + 1) \Gamma(l - k - j + 1) \Gamma(l + \frac{1}{2})}$$

$$\times \frac{\Gamma(m - l + 1) \Gamma(m - k + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu - j - k + 1) \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(k - j + 1) \Gamma(m - j - k + 1) \Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(\nu - l + 1) \Gamma(\mu - k + 1)}$$

とおくとす、任意の  $l, \nu, \mu \in \mathbb{Z}_+$ ,  $m > 0$  に対して

$$\begin{aligned}
& \left\{ \nu^2 - \nu\mu + \mu^2 - (m+l)\nu - \frac{1}{2}\mu + ml \right\} a_{\ell, m}(\nu, \mu) \\
&= (\nu - 2\mu)(\nu - m) a_{\ell, m}(\nu - 1, \mu) + \mu(m+l - 2\nu + \mu - \frac{1}{2}) a_{\ell, m}(\nu, \mu - 1) \\
&+ 3\mu(\nu - m) a_{\ell, m}(\nu - 1, \mu - 1)
\end{aligned}$$

が成り立つ。

Lemma 3 (James [7])  $\forall \kappa = (k_1, \dots, k_p)$  ( $k_1 + \dots + k_p = l, k_i \geq 0$ )

$$C_{\kappa}(\lambda) = C_{\kappa} \lambda_1^{k_1 - k_2} \lambda_2^{k_2 - k_3} \dots \lambda_{p-1}^{k_{p-1} - k_p} \lambda_p^{k_p} + (\text{lower})$$

$$\text{ここに } C_{\kappa} = \frac{2^{2k} k! \prod_{i < j}^p (2k_i - 2k_j - i + j)}{\prod_{i=1}^p (2k_i + p - i)!} \prod_{k=1}^p \prod_{i=1}^k \frac{\Gamma(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}(i-1) + k_i - k_{i+1})}{\Gamma(\frac{1}{2}l - \frac{1}{2}(i-1) + k_i - k_i)}$$

ここでは, Lemma 1, 2, 3. 定理の証明は書かれていないが, 注意すべきは, 漸化式(1)のみでは解が一意的には決まらなから(2), (3), (4)の条件を付ければ(1)は一意的で" (Lemma 1) Lemma 2 から定数倍を除いて  $C_{\kappa}$  は  $\Gamma$  関数の積・和商で書け, Lemma 3 を用いてその定数倍も決まるといふわけである。

## References

- [1] S. Abesis, Gli ideali  $GL(V)$ -invarianti in  $S(S^2V)$ ,  
Rendiconti Mate. 13(1980), Ser. IV, 235-262
- [2] E. Cartan, Sur la détermination d'un système  
orthogonal complet dans un espace de Riemann  
symétrique, Clos. Rend. Circ. Mat. Palermo 53 (1929),  
217-252. Œuvres Complete, Partie 1, vol. 2, Gauthier  
Villars, Paris, (1952), 1045-1080.
- [3] R. D. Gupta and D. Richards, Calculation of zonal  
polynomials of  $3 \times 3$  positive definite symmetric  
matrices, Ann. Inst. Statist. Math. 31(1979), Part A,  
207-213.
- [4] Harish-Chandra, Spherical functions on a semi-simple  
Lie group I, II, Amer. J. Math., 80(1958), 241-310,  
553-613.
- [5] S. Helgason, Differential Geometry and Symmetric  
Spaces, Academic Press, New York, 1962.
- [6] L. K. Hua, Harmonic analysis of functions of  
several complex variables in classical regions,  
Amer. Math. Soc., VI



- [7] A. T. James, Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples, *Ann. Math. Statist.* 35 (1964), 425-501
- [8] A. T. James, Calculation of Zonal polynomial coefficients by use of the Laplace-Beltrami operator, *Ann. Math. Statist.* 39 (1968), 1711-1718.
- [9] N. Jing and H. Yamada, Zonal polynomials on the quantum general linear group, private communication
- [10] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, preprint.
- [11] A. Takemura, Zonal polynomials, *Inst. of Math. Statistics Lecture Notes, Mono. Series*, Shanti S. Gupta, Series Editor, Vol. 4.
- [12] H. Weyl. *The Classical Groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1946.