数理解析研究所講究録
第763巻 1991年 131-144

球面上の解析汎函数の Fantappié 変換

上智大理工　和田涼子*（Ryoko Wada）

d を2以上の自然数とする．$\mathbb{R}^{d+1}$ の単位球面を S で表わす．$\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ で $(d+1)$ 次元複素射影空間を表わし，(ζ_0, ζ) で $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の元の同次座標を表わす（$\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}^{d+1}$）．$\mathbb{C}^{d+1}$ の compact 集合 K について

$$\overset{*}{C}K = \{(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})\ ;\ \zeta_0 + \zeta \cdot z \neq 0 \\ \text{for } {}^{\forall} z \in K\}$$

とおく．$\mathcal{O}(K)$ を K 上の正則函数の芽の全体とし，$\mathcal{O}'(K)$ で $\mathcal{O}(K)$ の dual space を表わす．

$T \in \mathcal{O}'(K)$ について Fantappié 変換 $\Phi_T(\zeta_0, \zeta)$ は次式で定義される。

$$\Phi_T(\zeta_0, \zeta) = \left\langle T_z, \frac{\zeta_0}{\zeta_0 + \zeta \cdot z} \right\rangle \qquad ((\zeta_0, \zeta) \in \overset{*}{C}K).$$

---

*　現在　広島大総合

$\mathcal{O}_0(\overset{*}{\mathbb{C}}K)$ を $\overset{*}{\mathbb{C}}K$ 上の正則函数で $\{(\zeta_0, \zeta) \in \overset{*}{\mathbb{C}}K ; \zeta_0 = 0\}$ 上で 0 になるものの全体とする． Martineau [3] は K が compact かつ convex ならば 変換 $\Phi : T \longrightarrow \Phi_T$ は $\mathcal{O}'(K)$ から $\mathcal{O}_0(\overset{*}{\mathbb{C}}K)$ への線型位相同型であることを示した．

しかし，$\mathcal{S}$ は convex でないので この結果からは $\mathcal{O}'(\mathcal{S})$ の Φ による像を決めることはできない．ここでは $\mathcal{O}'(\mathcal{S})$ の Φ による像の決めることを目的とする．

§1． 準備

d を 2 以上の自然数とする． $z = (z_1, z_2, \cdots, z_{d+1})$， $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_{d+1}) \in \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$z \cdot \zeta = \sum_{j=1}^{d+1} z_j \zeta_j ,$$

$$\| z \|^2 = z \cdot \overline{z},$$

$$z^2 = z \cdot z$$

とおく。

$\mathbb{C}^{d+1}$ の開集合 W について $\mathcal{O}(W)$ で W 上の正則函数の空間を表わす． $\mathcal{O}(W)$ には W 上の広義一様収束の位相を入れる． $\mathbb{C}^{d+1}$ の compact 集合 K について

$$\mathcal{O}(K) = \operatorname*{ind\,lim}_{W \supset K} \mathcal{O}(W)$$

とおく（ W は K をふくむ開集合）. $\mathcal{O}'(K)$ で $\mathcal{O}(K)$ の dual space を表わす.

$S = \{ x \in \mathbb{R}^{d+1} ;\ \|x\| = 1 \}$ とおき ds を S 上の $\int_S 1\, ds = 1$ をみたす $O(d+1)$-invariant な測度とする. $\|\ \|_\infty$ を S 上の sup norm, $\mathbb{H}_{n,d}$ を $(d+1)$ 次元 n 次の球面調和函数の全体とする. $P_{n,d}$ で $(d+1)$ 次元 n 次の Legendre 多項式を表わす.（球面調和函数, Legendre 多項式については [6] 参照）.

$h \in \mathbb{H}_{n,d}$ について $\tilde{h}$ で $\tilde{h}|_S = h$ をみたす $\mathbb{C}^{d+1}$ 上の n 次同次調和多項式（一意的に決まる）を表わす.

f' が S 上の汎函数であるとき f' の n 次球面調和成分 $S_n(f' : \ ) \in \mathbb{H}_{n,d}$ は次式で定義される：

$$(1.1) \qquad S_n(f' : s) = N(n, d) \langle f', P_{n,d}(\cdot\, s) \rangle \qquad (s \in S),$$

ここで

$$(1.2) \qquad N(n, d) = \dim \mathbb{H}_{n,d} = \frac{(2n+d-1)(n+d-2)!}{n!\,(d-1)!} .$$

球面調和成分については [5] を参照.

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上の Lie norm $L(z)$ および dual Lie norm $L^*(z)$ は次のように定義される:

$$L(z) = \{ \|z\|^2 + (\|z\|^4 - |z^2|^2)^{1/2} \}^{1/2},$$

$$L^*(z) = \sup\{ |z \cdot \zeta| \ ; \ L(\zeta) \leq 1 \}$$
$$= \left(\frac{\|z\|^2 + |z^2|}{2} \right)^{1/2}.$$

$\mathbb{C}^{d+1}$ 上のノルム $N(z)$ について

$$B_N(r) = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) < r \} \qquad (0 < r \leqq \infty)$$

$$B_N[r] = \{ z \in \mathbb{C}^{d+1} : N(z) \leqq r \} \qquad (0 \leqq r < \infty)$$

とおくと $S \subset B_L[1] \subset B_{L^*}[1]$ である。$\| \ \|_N$ で $B_N[1]$ 上の sup norm を表わす.

$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2 \cdots\}$ とおき, $\Lambda_+ = \{(n, k) \in \mathbb{Z}_+^2 \ ; \ n \equiv k \pmod 2$ かつ $n \geqq k\}$ とする。$\forall F \in \mathcal{O}(B_L(r))$ について $S_{n,k}(F: \ ) \in H_{k,d}$ が一意的に存在して

$$(1.3) \qquad F(z) = \sum_{(n,k) \in \Lambda_+} (\sqrt{z^2})^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(F : z)$$

という形に展開できる。(1.3) の右辺は $B_L(r)$ 上広義一様

収束する。$S_{n,k}(F:\ )$はFの(n,k)-成分とよばれる([4]参照).

$\tilde{S}=\{z\in\mathbb{C}^{d+1}\,;\ z^2=1\}$で$\mathbb{C}^{d+1}$上の複素球面を表わす。$1\leq r<\infty$について

$$\tilde{S}[r]=B_L[r]\cap\tilde{S}$$

とおく。$S=\tilde{S}\cap\mathbb{R}^{d+1}=\tilde{S}[1]$である。

$M=\{z\in\mathbb{C}^{d+1}\,;\ z^2=0\}$, $\Sigma=\{z=x+iy\in M\,;\ \|x\|=\|y\|=1\}$とおくとき$\Sigma\simeq O(d+1)/O(d-1)$となり$\int_\Sigma 1\,dz=1$をみたす$O(d+1)$-invariantな測度$dz$が一意的に存在する。次のことがわかっている。

<u>命題1.1</u> (cf. [2][6][8]) $f\in\mathbb{H}_{n,d}$, $g\in\mathbb{H}_{k,d}$とする。このとき次式が成り立つ。

$$(1.4)\qquad \int_S f(s)\,g(s)\,ds=0 \qquad (\text{if } n\neq k)$$

$$(1.5)\qquad \int_S f(s)\,\overline{g(s)}\,ds$$

$$=\frac{n!\,\Gamma(\frac{d+1}{2})N(n,d)}{2^{2n}\Gamma(n+\frac{d+1}{2})}\int_\Sigma \tilde{f}(z)\,\overline{\tilde{g}(z)}\,dz.$$

§2. $\mathcal{O}'(\hat{S}[r])$ の Fantappiè 変換

$\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ を $(d+1)$ 次元複素射影空間とする。(ζ_0, ζ) $(\zeta_0 \in \mathbb{C}$, $\zeta \in \mathbb{C}^{d+1})$ で $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の元の同次座標を表わす．$K \subset \mathbb{C}^{d+1}$ について

$$\overset{*}{C}K = \{(\zeta_0, \zeta) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) \; ; \; \zeta_0 + \zeta \cdot z \neq 0 \text{ for } \forall z \in K\}$$

とおく。K が $\mathbb{C}^{d+1}$ の compact 集合のとき $\overset{*}{C}K$ は $\mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C})$ の開集合になる。

例. $A \subset \mathbb{C}^{d+1}$ と $\{(1, \zeta) \in \mathbb{P}_{d+1}(\mathbb{C}) \; ; \; \zeta \in A\}$ を同一視すると

(i) $\overset{*}{C}B_N[r] = B_{N^*}(1/r)$,

ここで $N^*(z) = \sup\{|\zeta \cdot z| \; ; N(z) \leq 1\}$.

(ii)
$$\overset{*}{C}S = \{x + iy \in \mathbb{C}^{d+1} \; ; \; \|x\| < 1 \text{ or } \|y\|^2 > \|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2\}$$
$$(x, y \in \mathbb{R}^{d+1})$$

$(\zeta_0, \zeta) \in \overset{*}{C}K$, $T \in \mathcal{O}'(K)$ について Fantappiè indicator

$\Phi_T(\zeta_0,\zeta)$は次のように定義される：

$$(2.1)\qquad \Phi_T(\zeta_0,\zeta)=\langle T,\ \frac{\zeta_0}{\zeta_0+\zeta\cdot z}\rangle .$$

次の定理が知られている。

<u>定理 2.1</u> (Martineau [3] Theorem 5)　$K\subset\mathbb{C}^{d+1}$がconvexかつcompactとし　$\mathcal{O}_0(\overset{*}{\mathcal{C}}K)$を$\overset{*}{\mathcal{C}}K$上で正則で$\{(\zeta_0,\zeta)\in\overset{*}{\mathcal{C}}K;\ \zeta_0=0\}$で$0$になる函数の全体とするとFantappié変換$\Phi: T\longrightarrow\Phi_T$は$\mathcal{O}'(K)$から$\mathcal{O}_0(\overset{*}{\mathcal{C}}K)$への線型位相同型になる。

定理2.1と例(i)より　$\Phi:\ \mathcal{O}'(B_L[r])\simeq\mathcal{O}(B_{L^*}(1/r))$が言えるが，$\widehat{S}[r]$はconvexでないので定理2.1によって$\mathcal{O}'(\widehat{S}[r])$の$\Phi$による像を決めることはできない。ここでは$\mathcal{O}'(\widetilde{S}[r])$の$\Phi$による像について考える。

微分作用素

$$(2.2)\qquad P(D)=\Big(2+\sum_{j=1}^{d+1}z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)\Big(1+\sum_{j=1}^{d+1}z_j\frac{\partial}{\partial z_j}\Big)-\Delta_z$$

を考える（ここで$\Delta_z=\sum_{j=1}^{d+1}(\partial/\partial z_j)^2$）．$W\subset\mathbb{C}^{d+1}$について

$$\mathcal{O}_{P}(W)=\{F\in\mathcal{O}(W)\ ;\ P(D)F=0\}$$

とおく。ここで次の定理が成り立つ。

定理 2.2 (cf. [9]) $1\leq r<\infty$ のとき Fantappiè 変換 $\Phi: T\longrightarrow\Phi_T$ は $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ から $\mathcal{O}_P(B_{L^*}(1/r))$ への線型位相同型である。特に $r=1$ とおくと

$$\Phi:\ \mathcal{O}'(S)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_P(B_{L^*}(1))$$

である。

定理 2.2 を証明するために次の補題が必要である。

補題 2.3　$F\in\mathcal{O}_P(B_{L^*}(\rho))$　$(\rho>0)$ とし, $S_{n,k}$ を F の (n,k)-成分とする。このとき次が成り立つ。

$$(2.3)\qquad S_{n,k}=\frac{n!\,\Gamma(k+\frac{d+1}{2})}{2^{n-k}k!\,\Gamma(\frac{n-k}{2}+1)\Gamma(\frac{n+k+d+1}{2})}S_{k,k}$$

$$\text{for } (n,k)\in\Lambda_+,$$

$$(2.4)\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}}\|S_{k,k}\|_\infty^{1/k}\leq(2\rho)^{-1}.$$

証明. $F \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(\rho))$ より

$$\left(2+\sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right)\left(1+\sum_{j=1}^{d+1} z_j \frac{\partial}{\partial z_j}\right) F = \Delta_z F$$

(1.3) より $z \in B_L(\rho)$ について

$$\text{左辺} = \sum_{(n,k)\in\Lambda_+} (n+1)(n+2)\left(\sqrt{z^2}\right)^{n-k} \widetilde{S}_{n,k}(z)$$

$$\text{右辺} = \sum_{\substack{(n,k)\in\Lambda_+ \\ n>k}} (n-k)(n+k+d-1)\left(\sqrt{z^2}\right)^{n-k-2} \widetilde{S}_{n,k}(z).$$

(n,k)-成分の一意性より $\quad 0 \leq k \leq n-2, \quad n \equiv k \pmod 2$

について

(2.5) $\qquad (n-1)n\, S_{n-2,k} = (n-k)(n+k+d-1) S_{n,k}.$

(2.3) は (2.5) より得られる.

$$F_n(z) = \sum_{\substack{k\equiv n \pmod 2 \\ 0\leq k\leq n}} \left(\sqrt{z^2}\right)^{n-k} \widetilde{S}_{n-k}(z)$$

とおくとき [5] Lemma 4.1 より

(2.6) $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \|F_n\|_{L^*}^{1/n} \leq 1/\rho.$

[8] Lemma 2.5 より $\forall s \in S$ について

(2.7) $\qquad S_{n,n}(s) = N(n,d) \int_\Sigma F_n(z)\left(z\cdot \frac{s}{2}\right)^n dz.$

$z \in \Sigma$ のとき $L^*(z)=1$ かつ $\bar{z} \in \Sigma$ だから

$$|\bar{z}\cdot \tfrac{\varsigma}{2}| \leq L^*(\bar{z})\,L(\tfrac{\varsigma}{2}) = \tfrac{1}{2}$$

従って (2.7)より

$$(2.8) \qquad \|S_{n,n}\|_\infty \leq N(n,d)\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \|F_n\|_{L^*} .$$

(2.6), (2.8) より (2.4) がわかる. (証明終).

定理2.2 の証明. $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ とする。$\varsigma \in \tilde{S}[r]$ を固定すると $(1+\varsigma\cdot z)^{-1} \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ だから $\Phi f'(z) = \langle f'_\varsigma, (1+\varsigma\cdot z)^{-1}\rangle \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ である。$\mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \subset \mathcal{O}'(B_L[r])$ だから 定理2.1 より Φ は $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ から $\mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$ への中への1対1線型写像である。

$F \in \mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r))$, $S_{n,k} = S_{n,k}(F:\ )$ とする。$f_n \in \mathbb{H}_{n,d}$ を

$$(2.9) \qquad f_n = (-2)^n \frac{\Gamma(n+\frac{d+1}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{d+1}{2})} S_{n,n}$$

と定義し, $f' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ とおくと (2.4), (2.9) および [5] Theorem 6.2より $f' \in \mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ である。

$\forall z \in B_{L^*}(1/r)$ について

$$\Phi f'(z) = \langle f'_\xi, \frac{1}{1+\xi\cdot z} \rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f'_\xi, (-\xi\cdot z)^n \rangle .$$

$z \in M$ のとき $z^2 = 0$ より

(2.10) $$\widetilde{S}_{n,n}(\Phi f' : z) = \langle f'_\xi, (-\xi\cdot z)^n \rangle$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \int_S f_m(s)\,(-s\cdot z)^n\,ds$$

また $z \in M$ のとき $(s\cdot z)^n \in \mathbb{H}_{n,d}$ かつ $^\forall s \in S$ について

(2.11) $$\frac{2^n \Gamma(n+\frac{d+1}{2})}{N(n,d)\,n!\,\Gamma(\frac{d+1}{2})}(s\cdot z)^n = \widetilde{P}_{n,d}(s\cdot z)$$

であるので (2.9)－(2.11) および (1.4) より $^\forall z \in M$ について

(2.12) $$\widetilde{S}_{n,n}(\Phi f' : z) = \int_S f_n(s)\,(-s\cdot z)^n\,ds$$

$$= \int_S (-2)^n \frac{\Gamma(n+\frac{d+1}{2})}{n!\,\Gamma(\frac{d+1}{2})} S_{n,n}(s)\,(-s\cdot z)^n\,ds$$

$$= N(n,d)\int_S S_{n,n}(s)\,\widetilde{P}_{n,d}(s\cdot z)\,ds$$

$$= \widetilde{S}_{n,n}(z).$$

(1.5) および (2.12) より $^\forall s \in S$ について

(2.13) $$S_{n,n}(\Phi f' : s) = S_{n,n}(s) .$$

$F,\ \Phi f' \in \mathcal{O}_\Sigma(B_{L^*}(1/r))$だから 補題 2.3 および (2.13) より $\Phi f' = F$. よって Φは全射である。

定理2.1 より Φ, Φ^{-1} は連続である. よって Φは $\mathcal{O}'(\tilde{S}[r])$ から $\mathcal{O}_\Sigma(B_{L^*}(1/r))$への線型位相同型である。(証明終).

<u>Remark.</u> $T \in \mathcal{O}'(\mathbb{C}^{d+1})$について Fourier-Borel変換 $\mathcal{F}$ は次の式で定義される:

$$(2.14) \qquad \mathcal{F}T(z) = \langle T_\zeta,\ \exp(\zeta \cdot z) \rangle \qquad (z \in \mathbb{C}^{d+1}).$$

また $0 \le r < \infty$なるrについて $\mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*)) = \{F \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^{d+1});\ |F(z)| \exp(-r'L^*(z)) < \infty \text{ for } {}^\forall r' > r\}$ とおくとき $F \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*))$について Laplace projective transformation $\mathcal{L}$は 次式で定義される:

$$(2.15) \qquad \mathcal{L}F(z) = \int_0^\infty F(-zt) e^{-t}\, dt \qquad (z \in B_{L^*}(1/r)).$$

[3]より $\Phi = \mathcal{L} \circ \mathcal{F}$ が成り立ち, $\mathrm{Exp}_\Delta(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*)) = \{F \in \mathrm{Exp}(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*));\ \Delta_z F = F\}$ とおくと [3] [7] および 定理 2.2 から 次の線型位相同型が得られる $(1 \le r < \infty)$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}'(\tilde{S}[r]) \arrow[r, "\mathcal{F}", "\sim"'] \arrow[d, "\Phi"', "\wr"] & \mathrm{Exp}_\Delta(\mathbb{C}^{d+1} : (r : L^*)) \arrow[dl, "\sim"', "\mathcal{L}"] \\
\mathcal{O}_I(B_{L^*}(1/r)) &
\end{tikzcd}$$

References

[1] L. Drużkowski, Effective formula for the crossnorm in the complexified unitary spaces, Zeszyty Nauk. Uniw. Jagielloń. Prace Mat. 16 (1974), 47-53.

[2] K. Ii, On a Bergmann-type transform and a Hilbert space of holomorphic functions, Tôhoku Math. J. 38 (1986), 57-69.

[3] A. Martineau, Équations différentielles d'ordre infini, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109-154.

[4] M. Morimoto, Analytic functionals on the Lie sphere, Tokyo J. Math. 3 (1980), 1-35.

[5] M. Morimoto, Analytic functionals on the sphere and their Fourier-Borel transformations, Complex Analysis, Banach Center Publications, 11, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1983, 223-250.

[6] C. Müller, Spherical Harmonics, Lecture Notes in Math. 17, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.

[7] R. Wada, On the Fourier-Borel transformations of analytic functionals on the complex sphere, Tôhoku Math. J., 38 (1986), 417-432.

[8] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the

differential operators $\Delta_z + \lambda^2$, Tokyo J. Math. 10 (1987), 93-105.

[9] R. Wada, Fantappié transformations of analytic functionals on the sphere, preprint.