数理解析研究所講究録
第764巻 1991年 13-16

実閉体上の幾何学

名大養　塩田昌弘 (Masahiro Shiota)

実多項式関数，及び，その零点集合，さらに，不等号の成り立つ点の集合を調べるとき，実閉体 R 上で，問題を考えた方が良いことが，かなりある．E. Artin が Hilbert の17問題を解いたのが，良い例である．ところが，R 上でのみ，考えるのは，必ずしも得策でない．なぜなら，$\mathbb{R}$ 上だと，微分位相幾何の手法が使えるが，R 上では使えないことがあるからである．例えば，ベクトル場の積分は，R 上だと，できない．又，R は一般に，パラコンパクトではないので，局所的に問題を解いても，大域的には解けないことがある．よって，まず，$\mathbb{R}$ 上で問題を解いて，次に，R 上で解くのは，重要な考え方である．もし，$\mathbb{R}$ 上で，アルゴリズムに沿って解く方法があるなら，Tarski-Seidenberg の原理より，R 上でも，自動的に解ける．しかし，もし，アルゴリズムがないなら，そうはいかない．そこで，$\mathbb{R}$ 上の結果より，R 上の結果を保証する定理が，もしあれば，たいへん便利である．以下に，

そんな定理を一つ示す．これは，M. Costeと共同で証明したことである〔2〕．

以下，Rは$\mathbb{R}$を含んでいると仮定する．（実際は，$\mathbb{R}$を，$\mathbb{Q}$上代数的な実数全体と置き代えて，話しを進めなければならないが，又，それも可能であるが，$\mathbb{R}$の方が馴染みがあるので，$\mathbb{R}$で考える．）

定義．f_iを，有限個の，$\mathbb{R}^n$上の多項式関数とする．$\{f_i=0\}$，又は$\{f_i>0\}$の和，又は交わりで書き表わされる集合を，$\mathbb{R}$-半代数的集合と呼ぶ．f_iの個数と次数を，ある数以下とし，和と交わりのとる順序を固定する．すると，自然数n'が存在して，そんな$\{f_i\}$は，係数を見ることによって，$\mathbb{R}^{n'}$の元だと思える．よって，自然な写像$\varphi_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^{n'} \to \{\mathbb{R}$-半代数的集合$\subset \mathbb{R}^n\}$が存在する．ここにでてきた，ある数を変え，順序を変え，すべてのφを考えると，どんな$\mathbb{R}$-半代数的集合も，どれかのφの像に含まれる．

$\mathbb{R}$-半代数的集合が，C^∞多様体になっているとき，それを$\mathbb{R}$-Nash多様体と呼ぶ．

R-半代数的集合とφ_RとR-Nash多様体も同様に定義する．

半代数的集合$X \subset \mathbb{R}^n$が$\cup \cap \{f_i * 0\}$で書き表わされたとき，（但し，$*=$"$=$"又は$*=$"$>$"）

$$X \otimes_{\mathbb{R}} R = \cup \cap \{x \in R^n : f_i(x) * 0\}$$

とおく．すると，

$$\varphi_{\mathbb{R}}(a)\otimes_{\mathbb{R}}R=\varphi_R(a),\quad a\in\mathbb{R}^{n'},$$

となり，もし，Xが$\mathbb{R}$-Nash多様体なら，$X\otimes_{\mathbb{R}}R$はR-Nash多様体になる．

注意．R-Nash多様体はalgebraic spaceのRの場合で，実代数幾何を考えるとき，最も自然な研究対象である．

定理1．R-Nash多様体Xに対して，$\mathbb{R}$-Nash多様体Yが存在して，Xは$Y\otimes_{\mathbb{R}}R$とR-Nash同相である．

これは，次の定理2より証明される．

$$N_{\mathbb{R}}=\varphi_{\mathbb{R}}^{-1}\{\mathbb{R}\text{-Nash 多様体}\},$$
$$Z_{\mathbb{R}}=\{(a,b)\in\mathbb{R}^{n'}\times\mathbb{R}^{n}:b\in\varphi(a)\}$$

とおく．すると，$N_{\mathbb{R}}$と$Z_{\mathbb{R}}$は半代数的集合になり，射影の制限，$\Phi_{\mathbb{R}}:Z_{\mathbb{R}}\longrightarrow N_{\mathbb{R}}$は半代数的写像になる．さらに，$\Phi_{\mathbb{R}}$は次の性質をもつ．$N_{\mathbb{R}}$の半代数的有限分割$\{N_{i\mathbb{R}}\}$が存在して，各$N_{i\mathbb{R}}$は$\mathbb{R}$-Nash多様体となり，$\Phi_{\mathbb{R}}$は$N_{i\mathbb{R}}$上，$C^\omega$自明になる．これの証明は容易である．$R$の場合も同様に定義でき，

$$N_{i\mathbb{R}}\otimes_{\mathbb{R}}R=N_{iR},$$

とできる．

定理2. 上の$\{N_{i\mathbb{R}}\}$と$\{N_{iR}\}$をうまく取れば、$\Phi_{\mathbb{R}}$とΦ_Rは, $N_{i\mathbb{R}}$とN_{iR}上, Nash自明にできる.

系3. R-Nash多様体Xに対して, 一意的に, 有界な, 境界付閉R-Nash多様体Yが存在して, XはYの内部にR-Nash同相である.

系4. R-Nash多様体は, アファインな, 非特異R-代数的集合にR-Nash同相である.

これらの系は, ℝの場合, [3]で, 微分位相幾何の手法で証明されている. Rの場合は, 定理1を使えば, それから導かれる.

参考文献

[1] J. Bochnak, M. Coste, M-F. Roy, Géométrie algébrique réelle, Erg. d. Math., 12, Springer, 1987.

[2] M. Coste, M. Shiota,

[3] M. Shiota, Nash manifolds, Springer Lect. Notes in Math., 1269 (1987).