

平面曲線の交叉行列について

千葉県立船橋高等学校 芹澤秀浩 (Hidehiro Serizawa)

この小論の目的は Norbert A' Campo の論文 Le groupe de monodromie du de'ploiem des singularite's isole'es de courbes planes I (Math. Ann 213.1-32(1975)) の主定理の内の定理 2 に対して、反例をあげ、その定理を修正しその証明を与えることである。

§ 1 A' Campo の定理とその反例

ここで、上で言う A' Campo の定理とは次の定理 1, 定理 2 である。

定理 1 ([1])

$f(x, y)$ は条件 S. I. と B. R. を満足する 2 変数の多項式とする。このとき実係数の多項式で表される deformation $f(x, y; t) : t \in \mathbb{R}$ が存在し、以下の性質をもつ

[1] $f(x, y, 0) = f(x, y)$

[2] 十分小さな実数 $t \neq 0$ に対して

(1) 曲線 $C_t = \{(x, y) \in D_\epsilon \mid f(x, y; t) = 0\}$ は r 個の分枝を持つ分割である。

$$(D_\epsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq \epsilon\})$$

ここで r 個の分枝を持つ分割とは次の条件を満足する曲線 $\alpha(J) \subset D_\epsilon$ である。

α は次の条件を満たす immersion である。

(J は r 個の区間 $[0, 1]$ の disjoint union である。)

1) $\alpha(\partial J) \subset \partial D_\epsilon, \alpha(\overset{\circ}{J}) \subset \overset{\circ}{D}_\epsilon, \alpha(J)$ は連結。

2) α は generic である。; すなわち $\alpha(J)$ は通常二重点しか持たない。

3) 領域とは $D_\epsilon - \alpha(J)$ の連結成分で、 ∂D_ϵ と共有点をもたないものである。

2 つの領域 A と B の閉包は次のいずれかを満足する、 $A \cap B = \emptyset$

, $A \cap B = 1$ 点, $A \cap B = \alpha(I)$, ここで I は J の 1 区分である。

(2) 二重点の個数 k は $2k - r + 1 = \mu$ を満足する、ここで μ は f の原点における Milnor 数である。

仮定 S. I. : 曲線 $H = \{z \in \mathbb{C}^2 \mid f(z) = 0\}$ は原点において孤立特異点を持つ。

仮定 B. R. : 多項式 $f(x, y)$ は原点において解析的に既約な因子の積に次のように分解されている、

$$f(x, y) = f_1(x, y) \cdots f_r(x, y)$$

(各因子 $f_i(x, y)$ は実係数の多項式である。)

定理 2 ([1])

$f(x, y)$ を仮定 S. I. と仮定 B. R. を満たす多項式とし、 C_t を定理 1 の D_e の符号づけられた分割とすると。このとき分割 C_t に対応した Dynkin 図形は f の Morse の confluence の Dynkin 図形である。

D_e の符号づけられた分割 C_t とは関数 $f(x, y, t)$ の符号によりすべての領域に符号を付けた分割である。

D_e の符号づけられた分割 C_t の Dynkin 図形は次の規則により構成される。

① $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu : \delta_i (1 \leq i \leq p)$; 正領域

$\delta_i (p+1 \leq i \leq p+k)$; 通常二重点

$\delta_i (p+k+1 \leq i \leq \mu)$; 負領域

② $1 \leq i < j \leq \mu$ に対して、次の交点数が対応する

$$(\delta_i, \delta_j) = \begin{cases} 1 & \begin{array}{l} 1) \delta_i \text{ は正領域, } \delta_j \text{ は領域 } \delta_i \text{ の境界に位置する二重点} \\ 2) \delta_j \text{ は負領域, } \delta_i \text{ は領域 } \delta_j \text{ の境界に位置する二重点} \\ 3) \delta_i \text{ は正領域, } \delta_j \text{ は負領域であり、} \overline{\delta_i} \text{ と } \overline{\delta_j} \text{ は } C_t \text{ の} \\ \quad 1 \text{ 区分を共有する。} \end{array} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

定理 2 において、 f の Morse の confluence の Dynkin 図形は distinguished basis (δ_i) によって構成された Dynkin 図形を意味している。(定義は [3] を参照)

次の反例に見られるように、この定理2はそのままでは正しくない。

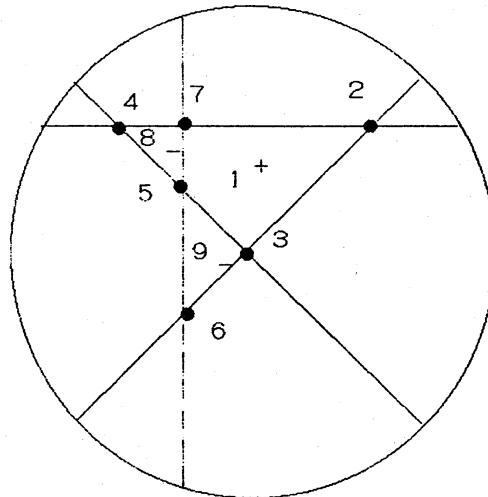
[定理2の反例]

$f(x, y) = xy(x^2 - y^2)$ は仮定 S. I. と仮定 B. R. を満たし、定理1から実係数の deformation

$$f(x, y; t) = (x + \frac{1}{2}t)(y - t)(x^2 - y^2) \text{ が存在する。}$$

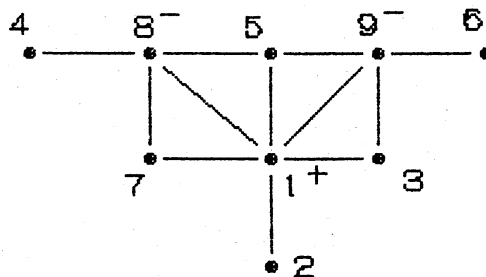
符号づけられた分割 C_t の形状は図1のようになる。

[図1]



対応する Dynkin 図形は図2である。

[図2]



このときlinking matrix L は次のように表される。([4])

§ 2 定理 2 の修正とその証明

この節では、定理 2 の修正とその証明を与える。

【定理】

$f(x, y)$ を仮定 S. I. と仮定 B. R. を満たす多項式とし、 C_t を定理 1 より得られた D_t の符号の付けられた分割とする。このとき分割 C_t により定められた Dynkin 図形は f の Morse の confluence に対応する Dynkin 図形である。

D_t の符号の付けられた分割 C_t の Dynkin 図形は次の規則により構成される。

- ① $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\mu : \delta_i (1 \leq i \leq p) \quad ; \text{正領域}$
 $\delta_i (p+1 \leq i \leq p+k) \quad ; \text{通常二重点}$
 $\delta_i (p+k+1 \leq i \leq \mu) \quad ; \text{負領域}$

② $1 \leq i < j \leq \mu$ に対し次のように交点数が対応する。

$$(\delta_i, \delta_j) = \begin{cases} 1 & 1) \delta_i \text{ は正領域, } \delta_j \text{ は領域 } \delta_i \text{ の境界に位置する} \\ & \text{二重点} \\ & 2) \delta_j \text{ は負領域, } \delta_i \text{ は領域 } \delta_j \text{ の境界に位置する} \\ & \text{二重点} \\ -1 & \delta_i \text{ は正領域, } \delta_j \text{ は負領域であり、} \overline{\delta_i} \text{ と } \overline{\delta_j} \text{ は } C_t \\ & \text{の 1 区分を共有する。} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

【証明】

[2.1] ホモロジー基底の構成

初めに A' Campo が定理 2 の証明に用いたと同じように、次のように基底をとる。このとき次の定理を用いる。

定理 3 ([1])

$f(x, y; t)$ を定理 1 で得られた deformation とする。このとき十分小さな $t \neq 0$ である実数 t に対して、

$$\text{関数 } g : (x, y) \in B_t \longrightarrow f(x, y; t) \in C$$

($B_\varepsilon = \{ (x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|^2 + |y|^2 \leq \varepsilon \}$ は原点における、
 曲線 H の特異点に対する Milnor 球とする。)

は μ 個の nondegenerate な臨界点を持つ。この臨界点に対応する臨界値は実数値でとることができる。

この定理から S_η を円 $\{ Z \in \mathbb{C} \mid |Z| \leq \eta \}$ とし、 η を次の写像

$$f : B_\varepsilon \cap f^{-1}(S_\eta) \dashrightarrow S_\eta,$$

が $S_\eta - \{0\}$ 上のファイバー空間となるように十分小さくとり、

そして写像

$$g = f(\cdot, \cdot; t) : B_\varepsilon \cap f^{-1}(\cdot, \cdot; t) \cap (S_\eta) \dashrightarrow S_\eta,$$

が μ 個の nondegenerate な臨界点を持ち、臨界値は S_η 上にあるように t を十分小さくとるならば。

この時、上で選んだ η と t に対して関数 g は f の Morse の confluence となる。すべての臨界値は $\mathbb{R} \cap S_\eta$ 上にあり、 $-i\eta$ は正則値である。

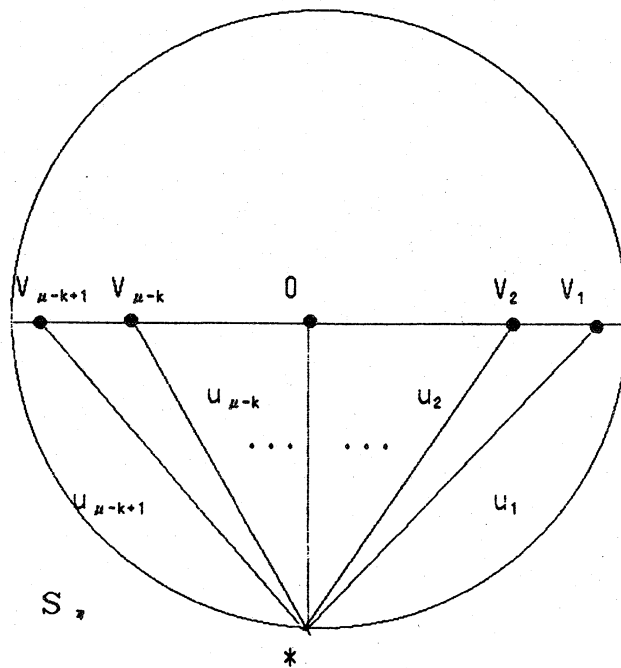
ここで、 $P_i (i=1, \dots, p)$ を \mathbb{C}_t の正領域、 $M_i (i=p+1, \dots, p+k)$ を \mathbb{C}_t の二重点、 $N_i (i=p+k+1, \dots, \mu)$ を \mathbb{C}_t の負領域とすると、この時 h (g を \mathbb{R}^2 に制限した関数)

$$h : (x, y) \in B_\varepsilon \cap \mathbb{R}^2 \dashrightarrow f(x, y; t) \in \mathbb{R}$$

を用いて、次のように関数 g の臨界値 V_i は特徴づけられる。

$V_i (i=1, \dots, p)$ は正領域 $P_i (i=1, \dots, p)$ において h の極大値に対応する臨界値、同様に $V_i (i=p+1, \dots, p+k)$ は二重点 $M_i (i=p+1, \dots, p+k)$ に対応する臨界値、 $V_i (i=p+k+1, \dots, \mu)$ は負領域 $N_i (i=p+k+1, \dots, \mu)$ において、 h の極小値に対応する臨界値となる。この時 generic に $1 \leq i < j \leq p$ または $p+k+1 \leq i < j \leq \mu$ を満たす i, j に対しては臨界値 V_i, V_j は異なる、また $V_i (p+1 \leq i \leq p+k)$ は二重点に対応する臨界値より、すべて原点 0 に対応する。よって異なる臨界値は $(\mu - k + 1)$ 個存在する。新たに次のように順序をつけかえると、 $V_i (1 \leq i \leq p)$ は正領域に対する臨界値、 $V_{p+1} (= 0)$ 、 $V_i (p+2 \leq i \leq \mu - k + 1)$ は負領域に対する臨界値となる。ここで $\delta_i \in H_1(g^{-1}(*))$ 、 $1 \leq i \leq \mu$ は図 3 のように選ばれた道 (u_i) に対する g (Morse の confluence) の消失サイクルによってつくられた $H_1(g^{-1}(*))$ のホモロジー基底とする。

[図3]



この意味は δ_i は $*$ から V_i まで道に沿って移動すると 0 ホモロークとなることである。この基底 (δ_i) は対応する道 (u_i) の順序の付け方より、distinguished basis とならない。

(u_{p+1} に対応する消失サイクルが k 個存在することは、関数 g をパラメータ化することにより、 k 個の異なる臨界値を持つようにすることができるので、この基底 (δ_i) が distinguished basis とならない要因とはならない。)

[2.2] 基底の順序の変更

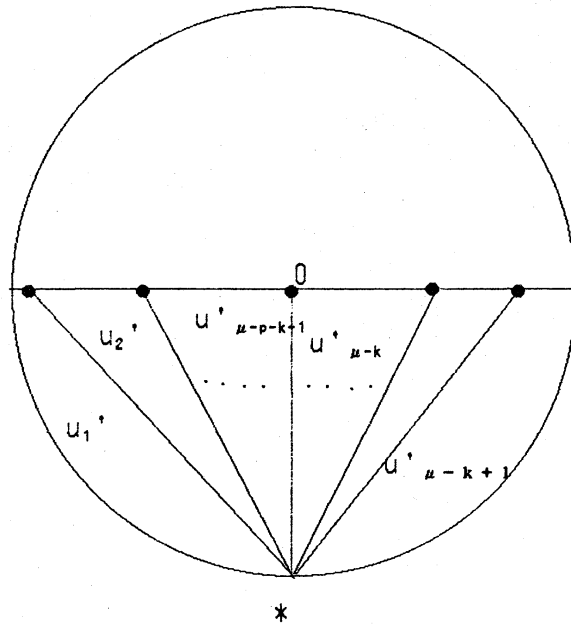
$(\delta'_i)(u'_i)(\tau'_i)$ を各々次のように、 $(\delta_i)(u_i)(\tau_i)$ の順序を変更した基底、道、閉道とする。(ここで τ_i は u_i に導かれる閉道とする)

$$\textcircled{1} \quad \delta'_i = \delta_{\mu-i+1} \quad (1 \leq i \leq \mu)$$

$$\textcircled{2} \quad u'_i = u_{\mu-k-i+2} \quad (1 \leq i \leq \mu-k+1), \quad \tau'_i = \tau_{\mu-k-i+2} \quad (1 \leq i \leq \mu-k+1)$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ により $(\delta'_i) (1 \leq i \leq \mu-p-k)$ は $(\tau'_i) (1 \leq i \leq \mu-p-k)$ に対応する消失サイクル、 $(\delta'_i) (\mu-p-k+1 \leq i \leq \mu-p)$ は $\tau'_{\mu-p-k+1}$ に対応する消失サイクル、 $(\delta'_i) (\mu-p+1 \leq i \leq \mu)$ は $(\tau'_{i-k+1}) (\mu-p+1 \leq i \leq \mu)$ に対応する消失サイクルとなる。

[図 4]



基底 (δ'_i) はこの順序をもって distinguished basis となる。

[2.3] 基底の変換 (詳細については [3] を参照)

一般に (Δ_m) を $H_n(F; Z)$ の distinguished basis, (u_m) を Δ_m に対応する道、 (τ_m) を u_m に導かれる閉道とする。この時、新たな基底 $(\bar{\Delta}_m)$ と道 (\bar{u}_m) を次のように構成できる。

① $\bar{u}_i = u_i$ for $i \neq m, m+1$

$$\bar{u}_m = u_{m+1}$$

$$\bar{u}_{m+1} = u_m \cdot \tau_{m+1}$$

② $\bar{\Delta}_i = \Delta_i$ for $i \neq m, m+1$

$$\bar{\Delta}_m = \Delta_{m+1}$$

$$\bar{\Delta}_{m+1} = h_{m+1}^{-1}(\Delta_m) = \Delta_m + (-1)^{n(n+1)/2} (\Delta_{m+1}, \Delta_m) \Delta_{m+1}$$

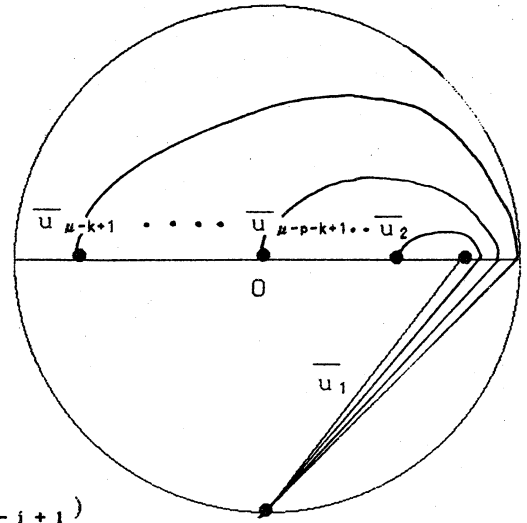
$$(h_{m+1} = (\tau_{m+1})_* : H_n(F; Z) \rightarrow H_n(F; Z))$$

この作用を $\beta_m (2 \leq m \leq \mu)$ と表すと、明かに β_m は distinguished basis (Δ_m) を distinguished basis $(\bar{\Delta}_m)$ に移す。

我々の問題にもどると、作用の列 $\beta_2 \beta_3 \cdots \beta_{\mu-k+1} \beta_2 \cdots \beta_{\mu-k} \beta_2 \cdots \beta_{\mu-k-1} \cdots \beta_2 \beta_3 \beta_2$ により (δ'_i) は新たな distinguished basis (δ_i) に移される。この基底 (δ_i) は (δ'_i) と $h_i (= (\tau'_i)_*)$ によって、次のように記述される。

$$(h_i = (\tau'_i)_* : H_1(F; Z) \dashrightarrow H_1(F; Z))$$

[図 5]



$$\begin{aligned} \overline{\delta_1} &= \delta'_{\mu} \\ \overline{\delta_2} &= h^{-1}_{\mu-k+1}(\delta'_{\mu-1}) \\ \overline{\delta_3} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k}(\delta'_{\mu-2}) \\ &\vdots \\ \overline{\delta_i} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-k-i+3}(\delta'_{\mu-i+1}) \\ &\vdots \\ \overline{\delta_p} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+3}(\delta'_{\mu-p+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{p+1}} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2}(\delta'_{\mu-p}) \\ &\vdots \\ \overline{\delta_{p+k}} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2}(\delta'_{\mu-p-k+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{p+k+1}} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} \cdot h^{-1}_{\mu-p-k+1}(\delta'_{\mu-p-k}) \\ &\vdots \\ \overline{\delta_j} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} \cdot h^{-1}_{\mu-j+2}(\delta'_{\mu-j+1}) \\ &\vdots \\ \overline{\delta_{\mu}} &= h^{-1}_{\mu-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-k} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} \cdots h^{-1}_2(\delta'_1) \end{aligned}$$

従って $\overline{\delta_i}$ ($1 \leq i \leq p$) は正領域に、 $\overline{\delta_i}$ ($p+1 \leq i \leq p+k$) は二重点に、 $\overline{\delta_i}$ ($p+k+1 \leq i \leq \mu$) は負領域に対応するサイクルとなる。

[2.4] 交点数の計算

基底 $(\underline{\delta}_i)$ は次の交点数を持つ。

$$(1) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0 \quad (1 \leq i < j \leq p)$$

$$(2) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0 \quad (p+1 \leq i < j \leq p+k)$$

$$(3) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0 \quad (p+k+1 \leq i < j \leq \mu)$$

$$(4) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = (\delta_i, \delta_j) \quad (1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+k)$$

$$(5) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = (\delta_i, \delta_j) \quad (p+1 \leq i \leq p+k, p+k+1 \leq j \leq \mu)$$

$$(6) (\underline{\delta}_i, \underline{\delta}_j) = \begin{cases} -1 & \overline{P}_i \cap \overline{N}_j \text{ は } C_i \text{ の } 1 \text{ 区分} \\ 0 & \overline{P}_i \cap \overline{N}_j = \phi \\ & (1 \leq i \leq p, p+k+1 \leq j \leq \mu) \end{cases}$$

[補題 2.4.1]

$a, b \in H_1(F; Z)$ に対して、以下が成り立つ。

$$\textcircled{1} \quad (a, b) = (h_i(a), h_i(b))$$

$$\textcircled{2} \quad (a, b) = (h_i^{-1}(a), h_i^{-1}(b)).$$

([2.3] と同様な用法で $h_i = (\tau_i)_*$ とする。)

[証明] Picard-Lefschetz の公式により

$$h_i(a) = a - (a, \Delta_i) \Delta_i \cdots \cdots (1)$$

$$h_i(b) = b - (b, \Delta_i) \Delta_i \cdots \cdots (2)$$

(1) と (2) により次のように $\textcircled{1}$ がえられる

$$\begin{aligned} (h_i(a), h_i(b)) &= (a - (a, \Delta_i) \Delta_i, b - (b, \Delta_i) \Delta_i) \\ &= (a, b) - (b, \Delta_i)(a, \Delta_i) - (a, \Delta_i)(\Delta_i, b) \\ &\quad + (a, \Delta_i)(b, \Delta_i)(\Delta_i, \Delta_i) \\ &= (a, b) - (a, \Delta_i)(b, \Delta_i) + (a, \Delta_i)(b, \Delta_i) \\ &= (a, b) \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$ を得るには $\textcircled{1}$ において a を $h_i^{-1}(a)$ に、 b を $h_i^{-1}(b)$ に代入する。

[補題 2.4.2]

$\mu - p + 1 \leq \ell \leq \mu, \mu - p + 1 \leq m \leq \mu$ に対し

$$h_{m-k+1}^{-1}(\delta'_\ell) = \delta'_\ell \text{ が成り立つ。}$$

[証明] $\delta'_l (= \delta_{\mu-l+1})$ と $\delta'_m (= \delta_{\mu-m+1})$ は正領域に対応する消失サイクルであるから、定理2より

$$(\delta'_l, \delta'_m) = 0 \quad \dots\dots (1)$$

h_{m-k+1} に対応する消失サイクルは δ'_m である、よって Picard - Lefschetz の公式により

$$h_{m-k+1}^{-1}(\delta'_l) = \delta'_l - (\delta'_m, \delta'_l) \delta'_m \quad \dots (2)$$

(1) と (2) から

$$h_{m-k+1}^{-1}(\delta'_l) = \delta'_l \text{ を える。}$$

[(1)の証明]

$1 \leq i < j \leq p$ に対して

$$(\delta_i, \delta_j) = (h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-k-i+3}^{-1}(\delta'_{\mu-i+1}), h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-k-j+3}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, h_{\mu-k-i+2}^{-1} \cdots h_{\mu-k-j+3}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

また $1 \leq i < j \leq p$ から、

$\mu-p+1 \leq \mu-j+1 < \mu-i+1 \leq \mu$ となるので

補題 2.4.2 を用いると

$$h_{\mu-k-i+2}^{-1} \cdots h_{\mu-k-j+3}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}) = \delta'_{\mu-j+1} \quad \text{従って}$$

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) = (\delta_i, \delta_j)$$

δ_i と δ_j は正領域に対応する消失サイクルであるので、

$$\text{定理2より} \quad (\delta_i, \delta_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0$$

[(2)の証明]

$p+1 \leq i < j \leq p+k$ に対して

$$(\delta_i, \delta_j) = (h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+2}^{-1}(\delta'_{\mu-i+1}), h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 より

$$\begin{aligned} (\delta_i, \delta_j) &= (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) \\ &= (\delta_i, \delta_j) \end{aligned}$$

δ_i と δ_j は通常二重点に対応する消失サイクルより、定理2から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0$$

[補題 2.4.3]

$1 \leq \ell \leq \mu - p - k$, $1 \leq m \leq \mu - p - k$ に対して

$h_m^{-1}(\delta'_\ell) = \delta'_\ell$ が成り立つ。

[証明]

$\delta'_\ell (= \delta_{\mu-\ell+1})$ と $\delta'_m (= \delta_{\mu-m+1})$ は負領域に対応する消失サイクルであるから、定理 2 より $(\delta'_\ell, \delta'_m) = 0 \dots (1)$

$h_m(1 \leq m \leq \mu - p - k)$ は消失サイクル δ'_m に関連するので、

Picard - Lefschetz の公式から

$$h_m^{-1}(\delta'_\ell) = \delta'_\ell - (\delta'_m, \delta'_\ell) \delta'_m \dots (2)$$

(1) と (2) より

$$h_m^{-1}(\delta'_\ell) = \delta'_\ell$$

[(3)の証明]

$p+k+1 \leq i < j \leq \mu$ に対して

$$(\delta_i, \delta_j) = (h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-i+2}^{-1}(\delta'_{\mu-i+1}), \\ h_{\mu-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+1}^{-1} \cdots h_{\mu-j+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, h_{\mu-i+1}^{-1} \cdots h_{\mu-j+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

$p+k+1 \leq i < j \leq \mu$ から $1 \leq \mu-j+1 < \mu-i+1 \leq \mu-p-k$ となり

補題 2.4.3 を適用すると、

$$h_{\mu-i+1}^{-1} \cdots h_{\mu-j+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}) = \delta'_{\mu-j+1}$$

従って

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) = (\delta_i, \delta_j)$$

δ_i と δ_j は負領域に対応する消失サイクルより、定理 2 から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta_i, \delta_j) = 0$$

[補題 2.4.4]

$1 \leq i \leq p$, $p+1 \leq j \leq p+k$ に対して、次の等式が成り立つ。

$$h_{\mu-k-i+2}^{-1} \cdots h_{\mu-k-i+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1}) \\ = \delta'_{\mu-j+1} - (\delta_i, \delta_j) \delta'_{\mu-i+1} - \cdots - (\delta_{p-1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p+2} \\ - (\delta_p, \delta_j) \delta'_{\mu-p+1}$$

[証明]

$h_{\mu-k-\ell+2}(1 \leq i \leq \ell \leq p)$ に関連する消失サイクル $\delta'_{\mu-\ell+1}$

$(1 \leq i \leq \ell \leq p)$ は正領域に対応するので、

$$h_{\mu-k-i+2}^{-1} \cdots h_{\mu-k-i+1}^{-1} \cdots h_{\mu-p-k+2}^{-1}(\delta'_{\mu-j+1})$$

$$= h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdot h^{-1}_{\mu-k-i+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+3} (\delta'_{\mu-j+1} - (\delta'_{\mu-p+1}, \delta'_{\mu-j+1}) \delta'_{\mu-p+1})$$

$$= h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdot h^{-1}_{\mu-k-i+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+4} (h^{-1}_{\mu-p-k+3} (\delta'_{\mu-j+1}) - (\delta'_{\mu-p+1}, \delta'_{\mu-j+1}) h^{-1}_{\mu-p-k+3} (\delta'_{\mu-p+1}))$$

補題 2.4.2 から $h^{-1}_{\mu-p-k+3} (\delta'_{\mu-p+1}) = \delta'_{\mu-p+1}$ よって

$$= h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdot h^{-1}_{\mu-k-i+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+4} (\delta'_{\mu-j+1} - (\delta'_{\mu-p+2}, \delta'_{\mu-j+1}) \delta'_{\mu-p+2} - (\delta'_{\mu-p+1}, \delta'_{\mu-j+1}) \delta'_{\mu-p+1})$$

$$= h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdot h^{-1}_{\mu-k-i+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+4} (\delta'_{\mu-j+1} - (\delta_{p-1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p+2} - (\delta_p, \delta_j) \delta'_{\mu-p+1})$$

同様にして変形をすると

$$= \delta'_{\mu-j+1} - (\delta_i, \delta_j) \delta'_{\mu-i+1} - \cdots - (\delta_{p-1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p+2} - (\delta_p, \delta_j) \delta'_{\mu-p+1}$$

[(4) の証明]

$1 \leq i \leq p, p+1 \leq j \leq p+k$ に対して

$$(\delta_i, \delta_j) = (h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-k-i+3} (\delta'_{\mu-j+1}), h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} (\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} (\delta'_{\mu-j+1})) \cdots (1)$$

補題 2.4.4 から

$$\begin{aligned} & h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} (\delta'_{\mu-j+1}) \\ &= \delta'_{\mu-j+1} - (\delta_i, \delta_j) \delta'_{\mu-i+1} - \cdots - (\delta_{p-1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p+2} \\ & \quad - (\delta_p, \delta_j) \delta'_{\mu-p+1} \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

(1) と (2) より

$$\begin{aligned} (\delta_i, \delta_j) &= (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) - (\delta_i, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) \\ & \quad \cdots - (\delta_{p-1}, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-p+2}) \\ & \quad - (\delta_p, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-p+1}) \\ &= (\delta_i, \delta_j) - (\delta_i, \delta_j) (\delta_i, \delta_j) - \cdots \\ & \quad - (\delta_{p-1}, \delta_j) (\delta_i, \delta_{p-1}) - (\delta_p, \delta_j) (\delta_i, \delta_p) \end{aligned}$$

$1 \leq i \leq m \leq P$ のとき δ_i と δ_m はともに正領域に対応する

消失サイクルより、定理 2 から $(\delta_i, \delta_m) = 0$ である、

よって $(\delta_i, \delta_j) = (\delta_i, \delta_j)$

[補題 2.4.5]

 $1 \leq i \leq \mu$ に対して 次の等式が成り立つ

$$h^{-1}_{\mu-p-k+1}(\delta'_{\mu-i+1}) = \delta'_{\mu-i+1} - (\delta_{p+1}, \delta_i) \delta'_{\mu-p} - (\delta_{p+2}, \delta_i) \delta'_{\mu-p-1} \cdots - (\delta_{p+k}, \delta_i) \delta'_{\mu-p-k+1}$$

[証明]

$h'_i (1 \leq i \leq k)$ を通常二重点に対応する消失サイクル $\delta'_{\mu-p-i+1}$ に関連した $H_1(F:Z)$ の自己同型とすると、そのとき $h_{\mu-p-k+1}$ は $h'_i (1 \leq i \leq k)$ により次のように表される。

$$h_{\mu-p-k+1} = h'_1 \cdot h'_2 \cdots h'_k$$

従って、 $h^{-1}_{\mu-p-k+1}(\delta'_{\mu-i+1})$

$$\begin{aligned} &= (h'_1 \cdot h'_2 \cdots h'_k)^{-1}(\delta'_{\mu-i+1}) \\ &= h'^{-1}_k \cdot h'^{-1}_{k-1} \cdots h'^{-1}_1(\delta'_{\mu-i+1}) \\ &= h'^{-1}_k \cdot h'^{-1}_{k-1} \cdots h'^{-1}_2(\delta'_{\mu-i+1} - (\delta'_{\mu-p}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p}) \\ &= h'^{-1}_k \cdot h'^{-1}_{k-1} \cdots h'^{-1}_3(h'^{-1}_2(\delta'_{\mu-i+1}) - (\delta'_{\mu-p}, \delta'_{\mu-i+1}) h'^{-1}_2(\delta'_{\mu-p})) \end{aligned}$$

ここで、 δ'_ℓ と δ'_m ($\mu-p-k+1 \leq \ell \leq m \leq \mu-p$) は二重点に対応する消失サイクルより、定理2から $(\delta'_\ell, \delta'_m) = 0$ となる。

また $h'^{-1}_2(\delta'_{\mu-p}) = \delta'_{\mu-p} - (\delta'_{\mu-p-1}, \delta'_{\mu-p}) \delta'_{\mu-p-1}$ 従って、

$$\begin{aligned} h'^{-1}_2(\delta'_{\mu-p}) &= \delta'_{\mu-p} \quad \text{これより} \\ &= h'^{-1}_k \cdot h'^{-1}_{k-1} \cdots h'^{-1}_3(\delta'_{\mu-i+1} - (\delta'_{\mu-p-1}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p-1} - (\delta'_{\mu-p}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p}) \end{aligned}$$

同様な変形を繰り返すと

$$\begin{aligned} h^{-1}_{\mu-p-k+1}(\delta'_{\mu-i+1}) &= \delta'_{\mu-i+1} - (\delta'_{\mu-p}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p} - (\delta'_{\mu-p-1}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p-1} \cdots - (\delta'_{\mu-p-k+1}, \delta'_{\mu-i+1}) \delta'_{\mu-p-k+1} \\ &= \delta'_{\mu-i+1} - (\delta_{p+1}, \delta_i) \delta'_{\mu-p} - (\delta_{p+2}, \delta_i) \delta'_{\mu-p-1} \cdots - (\delta_{p+k}, \delta_i) \delta'_{\mu-p-k+1} \end{aligned}$$

[(5)の証明]

 $p+1 \leq i \leq p+k, p+k+1 \leq j \leq \mu$ から

$$(\delta_i, \delta_j) = (h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2}(\delta'_{\mu-i+1}), h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 から

$$(\delta_i, \delta_j) = (\delta'_{\mu-i+1}, h^{-1}_{\mu-p-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2}(\delta'_{\mu-j+1}))$$

$p+k+1 \leq j \leq \mu$ から $1 \leq \mu-j+1 \leq \mu-j+2 \leq \dots \leq \mu-p-k$ となる
よって、補題 2.4.3 を適用すると

$$h^{-1}_{\mu-p-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-p-k} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2} (\delta'_{\mu-j+1}) \\ = h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-j+1}) \cdots (1)$$

一方、 $h_{\mu-p-k+1}$ は二重点に対応する消失サイクル $\delta'_{\mu-p-l+1}$ ($1 \leq l \leq k$) に関連する自己同型であるから。

補題 2.4.5 から、

$$h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-i+1}) = \delta'_{\mu-i+1} \quad \cdots (2)$$

(1) と (2) から

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) = (h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-i+1}), h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 より

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) = (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) = (\delta_i, \delta_j)$$

[(6) の証明]

$1 \leq i \leq p$, $p+k+1 \leq j \leq \mu$ から

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) = (h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-k-i+3} (\delta'_{\mu-i+1}), \\ h^{-1}_{\mu-k+1} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2} (\delta'_{\mu-j+1}))$$

補題 2.4.1 から

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) =$$

$$(\delta'_{\mu-i+1}, h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-p-k} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2} (\delta'_{\mu-j+1}))$$

$p+k+1 \leq j \leq \mu$ より $1 \leq \mu-j+1 \leq \mu-p-k$ よって

補題 2.4.3 から

$$h^{-1}_{\mu-p-k+1} \cdot h^{-1}_{\mu-p-k} \cdots h^{-1}_{\mu-j+2} (\delta'_{\mu-j+1}) \\ = h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-j+1}) \cdots (1)$$

また $1 \leq i \leq p$ より $\mu-p+1 \leq \mu-i+1 \leq \mu$

よって補題 2.4.2 を適用すると、

$$h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} (\delta'_{\mu-i+1}) = \delta'_{\mu-i+1} \quad \cdots (2)$$

(1) と (2) より次をえる

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) = (h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} (\delta'_{\mu-i+1}), \\ h^{-1}_{\mu-k-i+2} \cdots h^{-1}_{\mu-p-k+2} h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-j+1}))$$

また補題 2.4.1 より

$$(\overline{\delta_i}, \overline{\delta_j}) = (\delta'_{\mu-i+1}, h^{-1}_{\mu-p-k+1} (\delta'_{\mu-j+1})) \quad \cdots (3)$$

補題 2.4.5 から

$$\begin{aligned}
 & h^{-1}_{\mu-p-k+1}(\delta'_{\mu-j+1}) \\
 &= \delta'_{\mu-j+1} - (\delta_{p+1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p} - (\delta_{p+2}, \delta_j) \delta'_{\mu-p-1} \cdots \\
 & \quad \cdots - (\delta_{p+k}, \delta_j) \delta'_{\mu-p-k+1} \quad \cdots \cdots \cdots (4)
 \end{aligned}$$

(3)と(4)より次をえる

$$\begin{aligned}
 & \overline{(\delta_i, \delta_j)} \\
 &= (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1} - (\delta_{p+1}, \delta_j) \delta'_{\mu-p} - (\delta_{p+2}, \delta_j) \delta'_{\mu-p-1} \cdots \\
 & \quad \cdots - (\delta_{p+k}, \delta_j) \delta'_{\mu-p-k+1}) \\
 &= (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-j+1}) - (\delta_{p+1}, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-p}) \\
 & \quad - (\delta_{p+2}, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-p-1}) \\
 & \quad \quad \quad \cdots - (\delta_{p+k}, \delta_j) (\delta'_{\mu-i+1}, \delta'_{\mu-p-k+1}) \\
 &= (\delta_i, \delta_j) - (\delta_{p+1}, \delta_j) (\delta_i, \delta_{p+1}) - (\delta_{p+2}, \delta_j) (\delta_i, \delta_{p+2}) \cdots \\
 & \quad - (\delta_{p+k}, \delta_j) (\delta_i, \delta_{p+k}) \quad \cdots \cdots (5)
 \end{aligned}$$

① $\overline{P_i} \cap \overline{N_j} = C_t$ の 1 区分

この時、定理 2 より $(\delta_i, \delta_j) = 1$ そして自然数 m, n ($p+1 \leq m, n \leq p+k$) が存在し、以下の条件をみたす

$$(\delta_i, \delta_m) = (\delta_m, \delta_j) = 1, (\delta_i, \delta_n) = (\delta_n, \delta_j) = 1$$

その他のすべての ℓ ($p+1 \leq \ell \leq p+k, \ell \neq m, n$) に対しては

$$\overline{(\delta_i, \delta_\ell)} = (\delta_\ell, \delta_j) = 0 \quad \text{従って、(5)より次をえる}$$

$$\overline{(\delta_i, \delta_j)} = 1 - 0 - \cdots - 1 \cdot 1 \cdots - 1 \cdot 1 \cdots - 0 = 1 - 1 - 1 = -1$$

② $\overline{P_i} \cap \overline{N_j} = \phi$

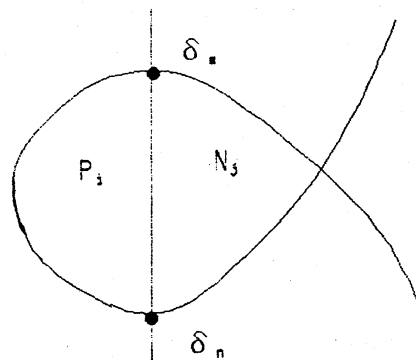
この時定理 2 から $(\delta_i, \delta_j) = 0$ そして

すべての ℓ ($p+1 \leq \ell \leq p+k$) に対して、 $(\delta_i, \delta_\ell) \cdot (\delta_\ell, \delta_j) = 0$

従って (5)より次をえる

$$\begin{aligned}
 \overline{(\delta_i, \delta_j)} &= 0 - 0 - \cdots - 0 \cdots - 0 \cdots - 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

[図 6]



参考文献

- [1] N. A' C a m p o ,
Le groupe de monodromie du de'ploiement des singularite's
isole'es de courbes planes I
Math. Ann. 213(1975), 1-32
- [2] N. A' C a m p o ,
Le nombre de Lefschetz d'une monodromie,
Indag. Math. 35(1973), 113-118. MR47 # 8903
- [3] A. M. G a b r i e l o v ,
Intersection matrices for certain singularities
Functional Anal. Appl. 7(1973), 182-193(1974). MR 48 # 2418
- [4] A. H e f e z a n d F. L a z z e r i ,
The Intersection Matrix of Brieskorn Singularities
Invention math. 25(1974), 143-157