数理解析研究所講究録
第 764 巻 1991 年 87-104

Special generic maps を許す単連結4次元閉多様体

東工大・理 佐久間 一浩

§0 序論

考察の対象は次の安定写像 $f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を中心とする。特に f の特異点集合 $S(f)$ と M^4 の間の位相的構造を種々の十分条件を与えた下で調べることを目標とする。写像の特異点論という立場から見ればこれはモース理論の一般化と言ってよいであろう。R. Thom は [1] の中で "モース理論の一般化" を提唱し、$\mathbb{R}^2$ への写像の性質を論じているがその後の研究の動向は写像から多様体に関する大域的構造を抽出するといった目的ではなく、むしろ当時としては混沌としていた写像空間の中での良い写像の選択とその一般性に関する研究へと進んでいった。1970年代前半、構造安定性の問題は John Mather により完全に解決され個々の写像を研究する時代に入った。

本稿では、多様体の構造そのものが写像によりどの程度反映されているか見るためにまず次節でモース関数が教える性質を概観し別の意味での一般化の方向性と可能性について論じ、得られた結果の証明の概略を与えることにする。

§1. モース関数について

ここではモース関数の特徴を列挙する。証明はよく知られているので省略する。参考文献もよく知られているので。

（1－1）（モースの補題）

$p \in M^n$ を index λ の非退化臨界点とする。p を中心とした局所座標系 $(U,(x_1,\cdots,x_n))$ を取ると開集合 U 上で関数 $f: M^n \to \mathbb{R}$ は次の様に書ける。

$$f = f(p) - x_1^2 - \cdots - x_\lambda^2 + x_{\lambda+1}^2 + \cdots + x_n^2 .$$

従って、特に非退化臨界点は孤立している。

特異点としての C^∞ 型は、index で一意に分類される。

（1－2）モース関数全体を $\mathrm{Morse}(M^n, \mathbb{R})$ と書く。これは関数空間 $C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ の部分集合であるが、$C^\infty(M^n, \mathbb{R})$ に Whitney 位相（コンパクト open topology より細かい位相）を与えその部分位相で $\mathrm{Morse}(M^n, \mathbb{R})$ は開集合になるが更に稠密である。

（1－3）（Reeb の定理）

コンパクトで境界のない多様体 M^n に対して、$f: M^n \to \mathbb{R}$ で $S(f) = \{p_1, p_2\}$ となる（モース）関数があれば実は M^n は n 次元球面 S^n に同相である。

更に、Smale は各臨界点の index に対応してハンドルがありコンパクトな多様体は有限個のハンドル分解を持つことを示し

より単純なハンドル分解の存在をモース関数に現れる非退化臨界点を解消する方法をホイットニーの手法を用いて分類論を築いた。ホイットニーの手法の次元的制約から$n \geqq 5$の多様体の上のモース関数は多様体の構造の解明上有効であることを示唆するにとどまっている。（Freedmanの仕事はTOPカテゴリーでの分類であるから、モース関数の特異点を解消するまでには至っていないのでここでは言及しない）低次元多様体上のモース関数の臨界点の解消には多分臨界点のindexが余分な情報を含み過ぎて（集約され）いるので本質的困難があると思われる。そこでそれらの情報を細分化させるために写像を用いる。適切な写像の選択の方法などを次節で触れたい。

§2. 写像の特異点論のあらまし

(1-1)と(1-2)に対応する写像の場合の事情を完全に解明したのが序論でも触れたMatherの仕事である。モース関数の概念を写像の場合に一般化したものが安定写像の概念である。大雑把に云えば写像を少し摂動しても特異点のC^∞型(or位相型)が変わらないものを云う。Matherにより特異点のタイプどんな次元対で安定写像全体が稠密かが決定されている。蛇足ながらモース関数、ホイットニーの埋め込み・はめ込み定理更に平面から平面への写像などの結果は歴史的には部分解を与え

ている。詳しくは『初等カタストロフィー(野口・福田)』参照

§3. 選ぶべき安定写像

正確には私が選んだ安定写像であるが、低次元多様体の構造を知るには関数よりも写像の方が勝る。行き先は2次元か3次元で4次元以上は選ばない方がよい。理由は2つある。

① 2次元か3次元ならば安定写像の特異点のタイプはA_k-typeのみで特異点集合は部分多様体である。D_k, E_kは4次元以上。

② 特異点集合の次元は、1次元か2次元つまり分類がわかっている。4次元以上では3次元以上が現れる

$f: M^4 \to \mathbb{R}^3$が安定写像ならば§2で述べた様に次の事柄が既に知られている。

(3－1)

(x_1, x_2, x_3, x_4)を$x \in M$を中心した局所座標、(y_1, y_2, y_3)を$f(x) \in \mathbb{R}^3$を中心した局所座標とする。xが特異点ならば次のいずれかが成り立つ

$$(\mathrm{I})\begin{cases} y_i = x_i & (i=1,2) \\ y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} y_i = x_i & (i=1,2) \\ y_3 = x_3^3 + x_1 x_3 \pm x_4^2 \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\begin{cases} y_i = x_i & (i=1,2) \\ y_3 = x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3 \pm x_4^2 \end{cases}$$

(I)のタイプを折り目(fold),(II)のタイプを尖点(cusp),(III)のタイプをつばめの尾(swallow tail)と云う。後の便宜の為に(I)で+のものを折り目定点(definite fold),−のものを折り目不定点(indefinite fold)と呼ぶことにする。局所的には次の図の様な形をしている。原点がつばめの尾である。

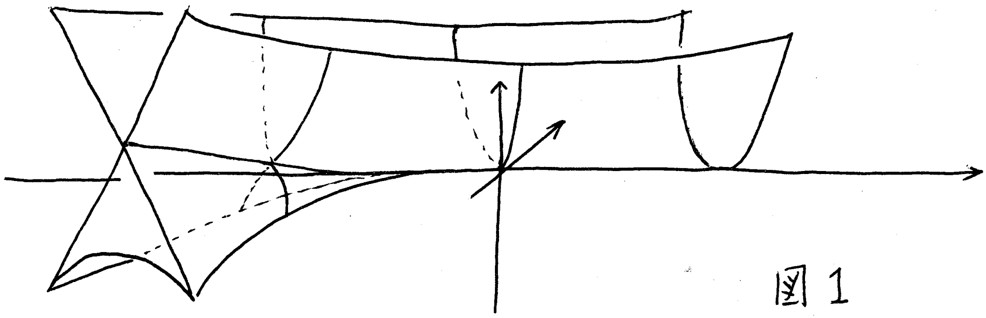


図1

2次元の部分が折り目、1次元の部分が尖点、0次元の部分がつばめの尾である。

(3−2) Matherの結果から安定写像全体 $S^{\infty}(M^4, \mathbb{R}^3)$ は、$C^{\infty}(M^4, \mathbb{R}^3)$ の中で open dense.

Reebの定理に該当する写像の場合の球面の特徴付けを与える定理を考察しようとすると関数の場合とは違った事情があることにすぐ気づく。$S(f)$ は2次元多様体であるので M^4 の構造と写像 f から次のことがどんな関係をもって結びついているか知らねばならない。即ち、$S(f)$ の(i)向き付け可能か不可能か(ii)連結成分の個数(iii)種数(iv)埋め込まれ方についてと特異点のタイプの出方・消え方についてである。Thom polynomial の計算から、M^4が向き付け可能か否かで Swallow tail の個数

が偶数か奇数かがわかり、特に我々の場合M^4を向き付けられているとしてSwallow tailは対で現れるので写像をホモトープで動かして消せる。(簡単ではない)
以前の私の結果から次の因果関係がわかっている。

定理1

M^4を向き付け可能、$H_1(M^4;\mathbb{Z})=0$とする。安定写像$f:M^4\to\mathbb{R}^3$に対して、

$$\sigma(M^4)\equiv -S(f)\cdot S(f)\pmod 4$$

が成り立つ。

σは符号数(signature),点は$S(f)$のMにおける自己交点数。
更に、$S(f)$として球面しか現れない様な写像$f:M^4\to N^3$があれば

定理2 $\sigma(M^4)\equiv S(f)\cdot S(f)\pmod{16}$

が成り立つ。但しN^3はコンパクトとは限らない向き付け可能3次元多様体。

また上記定理の証明の途中で、H_1の仮定なしで符号数が奇数ならば$S(f)$は種数が奇数の向き付け不可能な曲面を含むことがわかる。例えば$\mathbb{C}P^2$上の安定写像の特異点集合はS^2のみということはなく$\mathbb{R}P^2$, $\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$, --- が現れる。そこで$S^2$のみ特異点集合にもつような$f:M^4\to N^3$はどんなものかについて考察し、実はこの条件がReebの定理に対応するものであることを見る

ことにする。$\mathbb{R}^2$への写像の場合はすでに決定されているので次節でこの結果を紹介した後、主定理を述べる。

§4. $\mathbb{R}^2$への安定写像

$\mathbb{R}^2$への安定写像の場合、特異点のタイプは折り目と尖点の2つである。特異点集合は1次元なので、S^1の disjoint union.
ここで定義を1つ与える。

定義

$f: M^n \to \mathbb{R}^p$ $(n>p)$ は C^∞ 写像とする。f が特異点としては折り目定点しか持たないとき、special generic という。

[注] この用語は Burlet－de Rham による。日本語に直すと矛盾した用語に見えるのでそのままにした。

Burlet－de Rham (1974)

$f: M^3 \to \mathbb{R}^2$ を special generic map とする。

(i) $\pi_1(M^3)$ は自由加群

(ii) M^3が単連結ならば、S^3に同相。$\mathrm{rank}\,\pi_1(M^3) = r$ とすれば、$M^3 \approx \#_r S^2 \times S^1$

(iii) 特にM^3が単連結のとき $S(f) = S^1$ であり、$\pi_1(M^3 - S(f)) \cong \mathbb{Z}$
即ち特異点集合は knot しない。

この結果を4次元以上の多様体について拡張したのが最近の

結果である。

Porto-Furuya (1990)

$f: M^n \to \mathbb{R}^2$ を special generic map とする。但し、$n \geqq 4$。

(i) $\pi_1(M^n)$は自由加群

(ii) M^nが単連結のとき、$M^n \cong S^n$ $(n=4,5,6)$

$\approx S^n$ $(n \geqq 7)$

$\mathrm{rank}\,\pi_1(M^n) = r$ とおくと

$$M^n \approx \underset{r}{\#}\, S^{n-1} \times S^1$$

$\cong$ は diffeo, $\approx$ は homeo を表す。

これらの定理の主張するところを総括して云えば、最も素直な特異点のみもつような写像を許す多様体は"ねじれていない"ものに限るということである。(特性類が消えているという意味で)また、特異点集合の実現の仕方も自明である。尚、Porto-Furuya の論文の中で$\underset{(n\geqq 7)}{S^n}$から$\mathbb{R}^2$への special generic map の構成を述べた後、特異点集合と交わらない部分から円板を切り取って境界となる球面上の diffeo を自明でないものを選んで再び貼り合わせて exotic sphere 上にも special generic map が存在するという Remark があるがこの主張は筆者には疑しいことを附言しておく。

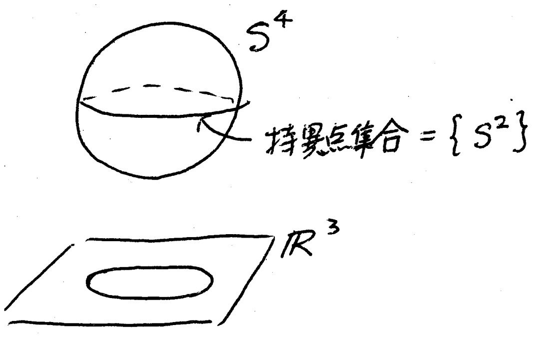
§5. $\mathbb{R}^3$への安定写像について part I

実際安定写像全体が稠密に存在するといっても手軽に作れるものかどうかやってみると案外難しい。この節ではいくつかの安定写像の例とその背後にある幾何的な状況を追ってみる。モース関数の作り方はどんな教科書にも載っているがこれをモデルとして写像を作ってみることにする。尚、$\mathbb{R}^2$への安定写像の構成は、小林真人氏が専門家で詳しい。彼の論文では前節の内容の更に進んだ場合(map fibre がS^2のみではなくT^2も出てくる場合)についての深い考察がなされている。4次元多様体に限って話を進める。

例1) $S^4=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5;\ \sum x_i^2=1\}\subset\mathbb{R}^5$

$p:\mathbb{R}^5\longrightarrow\mathbb{R}^3$, $p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(x_1,x_2,x_3)$

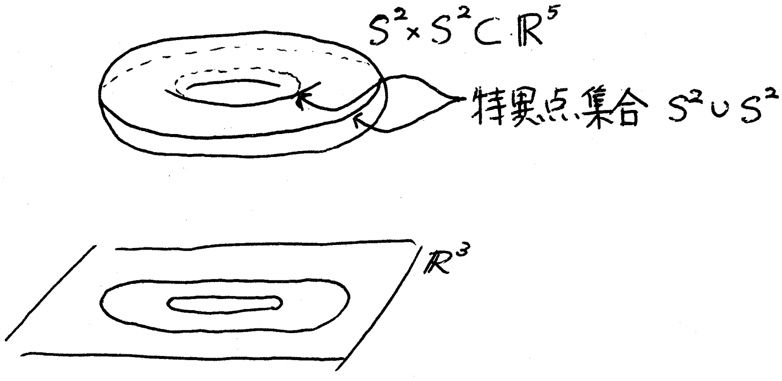
$p|S^4$がS^4上の安定写像。モース関数のアナロジー。



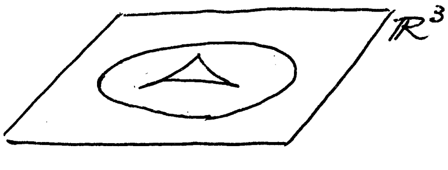
実はこの写像は special generic である。

例2) $S^2\subset\mathbb{R}^5$の管状近傍は、$S^2\times D^3$なのでその境界$S^2\times S^2$は$\mathbb{R}^5$に自然に埋め込まれている。例1と同様に自然な射影をうまく取って$S^2\times S^2$上に制限すると special generic map

が得られる。



例3) $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{R}^3$ 具体的に作るには開被覆 $\mathbb{C}P^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ を取って各開集合上で写像を定義する。しかしこれは面倒な割に特異点集合の位相がわかりにくい。そこで厳密さには欠けるが直観的イメージを述べる。$\mathbb{C}P^2$ をハンドル分解する。$\mathbb{C}P^2 = h^0 \cup h^2 \cup h^4$. $h^0 \cup h^4 = S^4$ だから例1の様な状況。2-ハンドル h^2 は1回ひねって attach されるのでここで特異点集合の位相が変わる。実際、discriminant は次の様になると思う。



これは $\mathbb{R}P^2$ が $\mathbb{R}^3$ に immerse された絵と思って頂きたい。絵からもわかるように尖点の1次元の集合は容易に消せない。従って special generic ではない。実は $\mathbb{C}P^2$ 上には special generic map は存在しない事が次節で示される。

以上3例からそれ程多くのことはわからないが、special generic map の存在、特異点集合の構造等には第2 Stiefel-Whitney 類が関係していることが予想される。

§6. $\mathbb{R}^3$への安定写像について part II

主定理

M^4：単連結４次元閉多様体　$f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ を special generic map とする。このとき次の等式が成り立つ。

$$\chi(M^4) = 2 \# S(f)$$

χはオイラー標数，$\# S(f)$は連結成分の個数。

例1，例2を見ると~~確かに~~上の等式が成り立っている。

[注] 実は任意の偶数次元単連結~~多様体~~$(n \geq 4)$について上の等式は成り立つ。

いくつかの興味深い系が得られるので列挙する。

系1　$\chi(M^4)$が奇数ならば，M^4上には special generic map は存在しない。例えば$\chi(\mathbb{C}P^2) = 3$.

系2　$f: M^4 \to \mathbb{R}^3$, special generic & $\pi_1(M^4) = 1$が与えられたとき、$S(f)$が連結ならばM^4はS^4に同相

（Reebの定理の写像版）

系3　$f: S^4 \to \mathbb{R}^3$, special generic に対して$S(f) \hookrightarrow S^4$は knot していない。（modulo ポアンカレ予想）

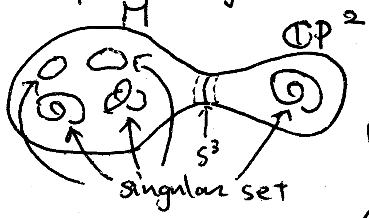
実は主定理の設定の下では現れる特異点集合達はすべて球面S^2であることが結論され、福田の定理を適用することによって等式が得られる。従って単連結4次元多様体上の$\mathbb{R}^3$へのspecial generic mapに対して定理2の合同式が成り立っている。

<u>命題1</u>

$M \# \mathbb{C}P^2$ (or $M \# \overline{\mathbb{C}P^2}$) 上に$\mathbb{R}^3$へのspecial generic mapは存在しない。但し、Mは単連結4次元多様体とする。

証明）

special generic mapが存在すれば特異点集合はすべてS^2。



S^3のカラー近傍を特異点集合と交わらないところにうまく取って、$M - \mathrm{Int}\, D^4$と$\mathbb{C}P^2 - \mathrm{Int}\, D^4$に分解する。non-singularな写像$D^4 \to \mathbb{R}^3$を選んで$\mathbb{C}P^2 - \mathrm{Int}\, D^4$と$D^4$をattachすると$S^2$を特異点集合としてのみもつ写像がつくれて矛盾。（あるいは$\mathbb{C}P^2$上のspecial generic mapがつくれて系1に矛盾）

ところで［6］によれば、bilinear formの分類が次に示すような表で与えられていることがわかる。（詳しい定義等は［6］を参照していただきたい。）

	indefinite	definite
odd	$\underset{p}{\oplus}\langle 1\rangle \underset{q}{\oplus}\langle -1\rangle$	$\pm\langle 1\rangle \oplus E_8$, $\Gamma^{4(2k+1)}$
even	$\pm \underset{m}{\oplus} E_8 \underset{n}{\oplus} H$ $\quad H=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	E_8 , $E_8\oplus E_8$, Γ_{16} , Γ_{24} , Γ_{32} , ---- の交点形式

Freedman によればこの表の lattice すべては topological 4-mfd で実現されるが、Donaldson 等の結果から smooth 4-mfd の交点形式として実現されるものには制約があることが知られている。

従って特に我々の場合には、命題1により次が得られる。

系4

$\#S(f)\leqq 11$ ならば、$r=\#S(f)-1$ とおくと

$$M^4 \underset{(\text{homeo})}{\approx} \underset{r}{\#}\, S^2\times S^2$$

($r=0$ のときは系2)

[注] E_8 , $E_8\oplus E_8$, Γ_{16} を交点形式にもつ smooth 4-mfd は存在しない。

$\#S(f)=12$ のときは、$E_8\oplus E_8\oplus 3H$ 即ち K3 曲面の可能性が現れる訳ではあるが K3 曲面上に special generic map が存在するか否かは私にはよくわからない。多分、存在しないとは思うが……。系4は限られた範囲ではあるが、special generic map を許す homeo. type の分類を与えている。一つ注目すべ

きことは、そのような smooth 4-mfd は少なくとも spin なものに限るということである。定理2から直接次が得られる。

<u>系5</u>　$S(f)$ の自己交点数は主定理の設定の下で16で整除される。

<u>§7. 主定理の証明の概要</u>

Burlet-de Rham, Furuya-Porto の結果と同様証明には Stein factorization を用いることが有効である。定義を与える。

<u>定義</u>

$f: X \to Y$ に対して $a, b \in X$ s.t. $f(a)=f(b)$ のとき, map fibre $f^{-1}(y)$ $(y=f(a)=f(b))$ の同じ連結成分に a と b が属するときに x と y を同一視してできる空間 $X/\sim$ を Stein factorization という。

$f: M^4 \to \mathbb{R}^3$ の Stein factorization を W_f と書き, quotient map を q と書くことにする。

$$\begin{tikzcd} M^4 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R}^3 \\ W_f \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

<u>補題1</u>

f が special generic map ならば W_f は境界付3次元多様体で、更に ∂W_f と $S(f)$ は同相。

definite fold の normal form をていねいに見ることによって得られる。

<u>補題2</u>

gは基本群の全射を誘導する。

<u>補題3</u>

$S(f)$はすべて球面S^2である。

補題1,2と対$(W_f, \partial W_f)$のホモロジー完全系列から得られる。

次にそれ自体で大変興味深い福田の定理を紹介する。

$f: M^n \to \mathbb{R}^p \ (n \geqq p)$をfoldのみ特異点にもつ$C^\infty$写像とする。

局所座標を使って特異点の標準形は次で与えられる。

$$(*)\quad \begin{cases} y_i = x_i & (1 \leqq i \leqq p-1) \\ y_p = x_p^2 + \cdots + x_{p+\lambda-1}^2 - x_{p+\lambda}^2 - \cdots - x_n^2 \end{cases}$$

$p \in S(f)$が$(*)$の標準形をもつとき、pをindex λのfold pointと呼ぶことにする。$n-p+1$が偶数のとき次の集合がwell-definedとなる。(向きを変えるとλは$n-p-\lambda+1$になる)

$$S^+(f) = \{p \in S(f);\ p\text{は index } \lambda \text{ の fold pt.}\quad \lambda \equiv 0\ (2)\}$$

$$S^-(f) = \{\quad\quad\quad〃\quad\quad\quad \lambda \equiv 1\ (2)\}$$

このとき次の等式が成り立つ。

<u>補題4</u>([7])

$$\chi(M^n) = \chi(S^+(f)) - \chi(S^-(f))$$

（主定理の証明）

special generic map に対しては $S^+(f)=S(f)$，$S^-(f)=\phi$
$n=4$，$p=3$ なので仮定を満たし，$\chi(M^4)=\chi(S(f))$．補題3を合わせると結論が得られる。▯

§8. 今後の課題

W_f は可縮なのでポアンカレ予想を認めると系2は"S^4 に微分同相"となる．一方，Eliasberg により（[8]）"M^4 を stably parallelizable とすると $M^4 \to \mathbb{R}^3$ で fold のみもつ写像が存在する"ことが示されている。ホモトピー4球面 Σ^4 は stably parallelizable だから cusp，swallow tail は消せるので exotic 4-sphere があると indefinite fold の eliminiation が障害となる。この意味である種の diffeo. invariant が定義できると思う。

また，系3は 2-knot conjecture にどの程度貢献しているかを見ることも重要である。実際，$M^4-S(f) \to \mathbb{R}^3$ は submersion で $M^4-S(f) \xrightarrow{g} \mathrm{Int}\,W_f$ が S^2 束になっているので完全系列から $\pi_1(M^4-S(f)) \cong \pi_1(S^2) \cong \mathbb{Z}$ となる。

謝辞

最後になってしまいましたが，私の足に地がつかない数学を忍耐と適切な叱噴をもって面倒を見て下さる福田先生に

は特別の感謝の意をお伝えしたいと思います。また暖かく見守って下さる特異点論セミナーの皆様に感謝します。

参 考 文 献

[1] R.Thom, Les singularites des application differentiables, Ann. Inst. Fourier (Grenoble),6(1955-56), 43-87.

[2] Burlet-de Rham, Sur certaines applications generiques d'une variete close a 3-dimensions dans la plan, L'Enseign.Math 20(1974) 275-292.

[3] Porto-Furuya, On special generic maps from a closed manifold into the plane, Topology and its appl. 35(1990), 41-52.

[4] Levine, Elimination of cusps, Topology 3(1965),263-296.

[5] 小林真人，本講究録

[6] Milnor-Husemoller, Symmetric bilinear forms, Ergebnisse Math.

[7] Fukuda, Topology of folds, cusps and Morin singularities, " A Fete of Toplogy", Academic Press, 331-353.

[8] Eliasberg, Surgery of singularities of smooth mappings, Math. USSR Izv. 6(1972),1302-1326.