数理解析研究所講究録
第 766 巻 1991 年 59-61

Nonlinear elliptic equations with critical growth

東大理　　石村　直之

Introduction and Main Result

次の方程式の古典解を問題にする。

$$-\Delta u = u^5 \qquad \text{in } \mathbf{R}^3. \tag{1}$$

(1) の解は $u \in H^1(\mathbf{R}^3)$ に対する functional

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 - \frac{1}{6}\int_{\mathbf{R}^3} u^6, \tag{2}$$

の critical point として与えられる。このとき (1) の右辺の指数 "5" は Sobolev の埋め込み

$$H^1(\mathbf{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbf{R}^3)$$

に対応する。そのため一般に J は $H^1(\mathbf{R}^3)$ において (P.S) 条件を満たさない。

Gidas, Ni, Nirenberg **[GNN]** は (1) の energy 有限な正値解、すなわち

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u|^2 < \infty$$

をみたす正値解は、ある $a > 0$ 、 $\xi \in \mathbf{R}^3$ に対して次の形であることを示した。

$$u(x) = 3^{1/4}\sqrt{\frac{a}{a^2 + |x-\xi|^2}}.$$

一方 Ding **[D]** は (1) の解の無限列 u_k で

$$\int_{\mathbf{R}^3} |\nabla u_k|^2 \ \to\ \infty \qquad \text{as } k \to \infty$$

をみたすものが存在することを示した。Ding の解は一般に正値解ではないことに注意する。

本講演では Ding の定理をひとつの方向に精密化する。

まずひとつ記号を導入する。

$$N(u) = \mathbf{R}^3 \setminus \{u^{-1}(0)\} \text{の連結成分の個数}$$

とおく。このとき次の定理が成立する。

定理. 任意の $k \in \mathbf{N}$ に対して $N(u) = k$ をみたす *(1)* の解 u が存在する。

u_k の energy が k によりどのように、特に下から、評価されるかは未解決である。

Idea of the Proof

まず立体射影により (2) を S^3 上の functional に書き直す。

$$S^3 = \{(y^1, ...y^4) \in \mathbf{R}^3 \mid \Sigma(y^i)^2 = 1\}$$
$$y^i = \frac{2x^i}{|x|^2+1} \qquad i = 1,2,3$$
$$y^4 = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+1}$$
$$v(y) = \sqrt{\frac{|x|^2+1}{2}}u(x)$$

とすれば

$$J(v) = \int_{S^3} \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \frac{3}{8}v^2 - \frac{1}{6}v^6 \, dv_y$$

ここで ∇ は S^3 上の standard metric に関してのもの。
$H^1(S^3)$ の subspace E を用意する。

$$E = \{v \in H^1(S^3) \mid v(y) = v(|y'|, |y''|)$$
$$(y')^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2, \, (y'')^2 = 1-(y')^2\}$$

補題 1、(Ding [**D**]). 埋め込み $E \hookrightarrow L^6(S^3)$ は *compact* である。

そこで E において定理の性質をみたす解 u_k を構成する。

$$E_k = \{v \in E \mid 0 = r_0 < r_1 < ... < r_{k-1} < r_k = 1, k \geq 1$$
$$v(r_i) = 0 \qquad 1 \leq i \leq k-1$$
$$(\pm 1)^i v \geq 0, \; v \neq 0 \qquad \text{および}$$
$$\int_{S_i^3} |\nabla v|^2 + \frac{3}{4}v^2 - v^6 \, dv \qquad \text{in } S_i^3$$
ここで
$$S_0^3 = \{|y'| < r_1\}$$
$$S_i^3 = \{r_i < |y'| < r_{i+1}\} \; i = 1,2,...k-2$$
$$S_{k-1}^3 = \{r_{k-1} < |y'| \leq r_k\} \; \}$$

とおく。 Cerami, Solimini, Struwe [**CSS**] の議論を利用して次を示す。

補題 2 . $Inf_{v \in E_k} J(v)$ は達成される。

最後に次の性質に注意する。

補題 3 . $J|_E$ の *critical point* は J の *critical point.*

REFERENCES

[CSS] G.Cerami, S.Solimini and M.Struwe, *Some existence results for superlinear elliptic boundary value problems involving critical exponents*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 289-306.

[D] W.-Y. Ding, *On a conformally invariant elliptic equation on* $\mathbf{R}^n$, Comm. Math. Phys. **108** (1986), 331-335.

[GNN] B.Gidas, W.-M.Ni and L.Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle,* Comm. Math. Phys. 68 (1979), 209-243.