

密度成層流体中における楕円渦領域の  
三次元超短波長不安定性

国立環境研究所 宮寄 武 (Takeshi Miyazaki)

1. 序論

渦領域の三次元不安定性は不安定モードの渦軸方向の波長の大きさに応じて三つのタイプに分けられる。航空機の翼端から発生する後引き渦の不安定性に代表されるような渦核半径に比べて非常に長い波長を持つ不安定性は Crow 不安定性<sup>1)</sup>と呼ばれている。一方、Widnall-Bliss-Tsai<sup>2)</sup>は渦核半径と同程度の波長のモードに対して渦輪が不安定化することを示した。これらの不安定性に共通するメカニズムは、集中渦にたつ慣性波動（渦波）が渦周辺に局所的に誘起された Strain 場と共鳴的に相互作用して増幅されることにある。最近になって Pierrehumbert<sup>3)</sup>は引延ばされた渦領域（中心付近の流線が楕円状に歪むので、簡単に「楕円渦」と呼ぶことにする）が超短波長のモードに関して不安定化することを数値的に示した。この Pierrehumbert 型の不安定性の増幅率は攪乱の波長に依らないので、大きなスケールの運動から非常に小さなスケールの運動へと直接的にエネルギーが流れる可能性を示唆している。Pierrehumbert の発見の後、Bayly<sup>4)</sup>は同じ問題を行列型の Floquet 問題に定式化して不安定性がなんらかの共鳴現象に結びついていることを示した。さらに Waleffe<sup>5)</sup>はそれを Ince 方程式に帰着して解析的な性質を調べるとともに、弱い Strain 場の極限で不安定性の明確な物理的解釈を与えた。それによると Pierrehumbert 型の不安定性も上述の二つの不安定性と同様に、渦にともなう慣性波動が Strain 場によってパラメトリックに励起され増幅されるために生じるものである。L

andman and Saffman<sup>6)</sup>は Pierrehumbert型の不安定性に対する粘性の影響を考えて、粘性散逸が弱い限りこの不安定性が姿を現わし得ることを指摘した。

大気海洋中の流れでは密度成層が大きな影響を及ぼすことが知られている。Miyazaki and Fukumoto<sup>7)</sup>は安定成層のもとでの鉛直渦を伝播する慣性波動の分散関係が均一流体中のものとは大きく異なることを示した。したがって慣性波動とStrain場との相互作用によってもたらされる三次元不安定性もまた大きな影響を受けるものと思われる。ここでは Pierrehumbert型の不安定性に対する安定密度成層の効果を調べる。直感的には安定成層は三次元運動を抑える方向に働くので三次元不安定性も抑制されるように思われるが、どうであろうか。

## 2. 定式化

流体は非粘性、非圧縮かつ非拡散的であるとする。運動方程式は

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \mathbf{u} \right) = - \text{grad} p - \rho g \mathbf{e}_z \quad (1)$$

と与えられる。但し、 $\mathbf{u} = u \mathbf{e}_x + v \mathbf{e}_y + w \mathbf{e}_z$  は速度場、 $\rho$  と  $p$  はそれぞれ密度と圧力である。デカルト座標系  $(x, y, z)$  と対応する単位ベクトル  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$  を使う。重力  $g$  は負の  $z$  方向に働く。密度に対する非圧縮、非拡散の条件は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \text{grad} \rho = 0 \quad (2)$$

で与えられ、速度場は

$$\text{div} \mathbf{u} = 0 \quad (3)$$

を満足する。

### A 基本場

簡単のため鉛直方向に指数的な安定密度成層が形成されているものとする。したがって流体全域に渡って Brunt-Vaisala 振動数  $N^2 = \alpha g / \gamma^2$  は一定となる。ここで  $\alpha$  は成層の強さを表わす指数であり、 $2\gamma$  は鉛直渦度である。いまは楕

円渦の中心付近に起こる Pierrehumbert型の不安定性に注目しているので、渦運動にともなう遠心力は重力に比べて十分に小さいと仮定して基本場をFroude数  $Fr = \gamma^2 L/g \ll 1$  の展開の形に定める。ただし  $L$  は考えている渦を代表する長さのスケールを表わす。

$$U = -\gamma L [ (1+\varepsilon)y + O(Fr^2) ], \quad (4)$$

$$V = \gamma L [ (1-\varepsilon)x + O(Fr^2) ], \quad (5)$$

$$W = \gamma L [ Fr W_1(x, y) + O(Fr^2) ], \quad (6)$$

$$\rho_0 = \rho^* e^{-\alpha L z} [ 1 + N^2 Fr^2 \rho_1(x, y) + O(Fr^3) ], \quad (7)$$

$$P = \frac{\rho^* g}{\alpha} e^{-\alpha L z} [ 1 + N^2 Fr^2 p_1(x, y) + O(Fr^3) ], \quad (8)$$

$(x, y, z)$  は  $L$  で、時間は  $1/\gamma$  で無次元化した。(4)-(8) を (1) と (2) に代入して、

$$p_1 = \frac{1-\varepsilon^2}{2} (x^2 + y^2), \quad (9)$$

$$\rho_1 = \frac{1-\varepsilon^2}{2[N^2-4(1-\varepsilon^2)]} [(N^2-4+4\varepsilon)x^2 + (N^2-4-4\varepsilon)y^2], \quad (10)$$

$$W_1 = -\frac{2\varepsilon(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)}{N^2-4(1-\varepsilon^2)} N^2 xy \quad (11)$$

を得る。以下に続く安定性の解析は (4)-(8) の  $Fr$  のかかった項を無視した基本場に関して行われる。これは、(9)-(11) の分母がゼロにならない限り、 $Fr \ll 1$  の場合の第ゼロ近似を与えることになる。ただし分母がゼロとなる  $N^2 = 4(1-\varepsilon$

\*)の近辺では、安易に高次項を落とすことが許されない。この条件は流体粒子が渦中心を一度まわる間に丁度二回 B-V振動数で鉛直振動することに相当している。同じ共鳴が渦の三次元不安定性にも寄与しているようであるが、非粘性、非拡散のワク組のなかでは基本場を構成しきれないため、安定性の解析結果の議論に際してもこの点に留意しなければならない。

## B 線形安定性

次に基本場の線形安定性を調べよう。攪乱に対応する変数には ' をつける。その時間発展は、非線形項とFr展開の高次項を無視すると、

$$D_t u' - (1+\varepsilon)v' = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (12)$$

$$D_t v' + (1-\varepsilon)u' = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (13)$$

$$D_t w' = -\frac{\partial p'}{\partial z} - N^2 \rho', \quad (14)$$

$$D_t \rho' - w' = 0, \quad (15)$$

$$\text{div } \mathbf{u}' = 0, \quad (16)$$

となる。ただし

$$D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} - (1+\varepsilon)y \frac{\partial}{\partial x} + (1-\varepsilon)x \frac{\partial}{\partial y} \quad (17)$$

は基本場にのったLagrange微分を表わす。Bayly<sup>4)</sup>やLandman and Saffman<sup>5)</sup>そしてWaleffe<sup>6)</sup>に従って

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ p' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \\ \hat{p} \end{pmatrix} e^{ik(t)\cdot x} \quad (18)$$

$$D_t e^{ik(t)\cdot x} = 0 \quad (19)$$

の形の攪乱モードを考える。この形の解は Navier-Stokes 方程式の三次元的な厳密解になることが Craik and Criminale<sup>5)</sup> によって全く独立に指摘されている。(19)式は簡単に解けて

$$kx = \sin\theta \cos\varphi, \quad ky = (1+\varepsilon)^{\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}} \sin\theta \sin\varphi, \quad kz = \cos\theta \quad (20)$$

$$\varphi = (1-\varepsilon^2)^{1/2} (t-t_0) \quad (21)$$

となる。問題が長さのスケールに依存しないことに注意して、波数ベクトルを鉛直軸からの角度  $\theta$  によって代表させている。Waleffe<sup>6)</sup> と同様に (12)-(16) から  $u'$ ,  $v'$ ,  $w'$  及び  $p'$  を消去して (20), (21) を使うと

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon \cos^2\theta - \varepsilon \sin^2\theta \cos 2\varphi) \frac{d^3 \hat{p}}{d\varphi^3} + 4\varepsilon \sin^2\theta \sin 2\varphi \frac{d^2 \hat{p}}{d\varphi^2} \\ & + [4(1-\varepsilon) \cos^2\theta + \frac{N^2}{1-\varepsilon^2} \sin^2\theta (1-\varepsilon \cos 2\varphi)] \frac{d \hat{p}}{d\varphi} \\ & + 4\varepsilon \sin^2\theta \frac{N^2}{1-\varepsilon^2} \sin 2\varphi \hat{p} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

を得る。したがって問題は三次の Ince 方程式に帰着される。(22)式は不安定性のメカニズムを議論するときには便利であるが、数値的な結果を得るために、さらに行列型の Floquet 問題に定式化し直す。

$$\frac{d}{d\varphi} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \xi & \eta & \zeta \end{pmatrix} \mathbf{M}.$$

$$\xi = -\frac{4\epsilon N^2 \sin^2 \theta \sin 2\varphi}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon \cos^2 \theta - \epsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi)},$$

$$\eta = -\frac{4(1-\epsilon)^2(1+\epsilon) \cos^2 \theta + N^2 \sin^2 \theta (1-\epsilon \cos 2\varphi)}{(1-\epsilon^2)(1-\epsilon \cos^2 \theta - \epsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi)},$$

$$\zeta = -\frac{4\epsilon \sin^2 \theta \sin 2\varphi}{1-\epsilon \cos^2 \theta - \epsilon \sin^2 \theta \cos 2\varphi}.$$

(23)

ここで  $M$  は  $M(0)$  が  $3 \times 3$  の単位行列であるような解行列である。  $M(2\pi)$  の固有値  $\nu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) は Floquet 指数と呼ばれ、いまの問題ではそのうちひとつが 1 になる。他の二つの積が 1 となることもわかるが、大きさが 1 の互に共役な複素数となるか二つの実数になる場合が考えられる。後者の場合には、系は不安定となり、その増幅率は

$$\sigma = \frac{\sqrt{1-\epsilon^2}}{2\pi} \log |\nu_i| \quad (24)$$

で与えられる。

### 3. 結果

$M(2\pi)$  を 4 次の Runge-Kutta-Gill 法で計算し、固有値を Double-QR 法を用いて求める。まず密度成層がかかっていない場合の結果を再現しよう。図 1 は  $\epsilon - \theta$  平面内での等増幅率線を表している。横軸は楕円率  $\epsilon$ 、縦軸は  $\theta$  である。一番外側の線は増幅率  $10^{-5}$  を辿り、内側にはいるにつれて 0.04 ずつ値が大きくなる。破線は与えられた  $\epsilon$  に対して最大増幅率をもたらす  $\theta$  の値を示している。最も不安定なのは  $\epsilon = 0.81$ 、 $\theta = 0.83$  のときで増幅率は 0.35 となる。図 2-5 に安定成層がかけられた場合の結果を示す。B-V 振動数はそれぞれ 0.6 (図 2)、1.5 (図 3)、2.1 (図 4) そして 3.5 (図 5) である。図 2 を図 1 と比べるとわかるように Pierrehumbert 型の不安定性の増幅率も不安定が起こるパラメータ領域も小さくなっている。これは、安定密度成層は三次元不安定性抑える方向に働くであろうという直感を裏付けている。実際、図 3 で見ると  $N$  が 1 を超えると Pierrehumbert 型の不安定性は消えてしまう。

しかし、話はそれだけではない。図2からは二つの新しいタイプの不安定性が発生していることも見て取れる。ひとつは基本場の構築のときにも現れた  $\varepsilon = \varepsilon_c = (1 - N^2/4)^{1/2}$  の左側に丘状の不安定領域を持つもので、これをタイプHの不安定性と呼ぶ。B-V振動数が大きくなると  $\varepsilon_c$  が小さくなり、不安定領域は  $\varepsilon$  の小さな領域へと移動して(図3)、B-V振動数が2を超えるところで(図4)消えてしまう。この不安定性の物理的メカニズムは渦運動による流体粒子の回転運動と成層にともなう鉛直振動の共鳴的相互作用にあると思われるが、前節でも述べたように  $\varepsilon = \varepsilon_c$  の近くでは基本場の設定が破綻している。はっきりとした理解を得るためには粘性あるいは拡散効果等を考慮して、より慎重に解析する必要があるだろう。

もう一つのタイプの不安定性は  $(\varepsilon, \theta) = (1, 0)$  の角から発生する何本かの山脈状の不安定領域によって特徴づけられる。これをタイプMの不安定性と呼ぶ。各ブランチはB-V振動数が大きくなるにつれて、より左下方にのびてゆき(図2-4)、Nが3を超えると最下端のブランチが  $\theta$  軸に到達する(図5)。到達点のクローズアップを図5'に示す。Nが大きくなるにつれて各ブランチはますます細くなり、この不安定性が非常に選択的なものであり、ある種の共鳴現象に結びついていることを強く示唆している。次節で各不安定モードの物理的メカニズムを掘り下げてみよう。

#### 4. 物理的考察

Waleffe<sup>6)</sup> は Pierrehumbert型の不安定性のメカニズムを  $\varepsilon \ll 1$  (弱いStrain場)の極限で考え、渦に付随する慣性波動のパラメトリックな励起(Strain場による)が不安定性の源泉であることを明らかにした。同様の考察は、密度成層のもとでは何故 Pierrehumbert型の不安定性が抑制されて消えてしまうのか、あるいは何故別のタイプの不安定モードが姿を現すのかを理解するために

も有用である。

$\varepsilon \ll 1$  ときには基本場はほとんど剛体回転しているので、同じ角速度で回る回転座標系に乗って見よう。(12)-(16)は

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - 2v' = -\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + 2u' = -\frac{\partial p'}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{\partial p'}{\partial z} - N^2 \rho', \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} - w' = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0 \quad (29)$$

と書換えられる。微小な慣性波動（平面波）

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \\ r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ \bar{\rho} \end{pmatrix} e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} - \omega_0 t)} \quad \mathbf{k}_0 = \begin{pmatrix} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 \\ \sin \theta_0 \sin \varphi_0 \\ \cos \theta_0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

の分散関係は

$$\omega_0^2 = N^2 + (4 - N^2) \cos^2 \theta_0 \quad (31)$$

で与えられる。慣性系でみて、弱いStrain場（定常）が剛体回転に重ねられている場合、回転系からみるとStrain場は角速度  $-1$  で回転して見える。したがって振動数  $\omega_0$  が1となるような慣性波動は共鳴的に励起され、増幅されることとなる。これが Pierrehumbert型不安定性の発生メカニズムのエッセンスである。この共鳴条件を満たす  $\theta_0$  を  $\theta_c$  とすると

$$1 = N^2 + (4 - N^2) \cos^2 \theta_c \quad (32)$$



である。事実、Pierrehumbert型の不安定性領域は $\theta_c = \pi/3$  (図1) 及び1.14 (図2) で $\theta$ 軸に届いていることがわかる。もしB-V振動数が1を超えると(32)を満足する $\theta_c$ はなくなり、Pierrehumbert型の不安定性は消えることになる。

高次の共鳴も可能であろうか。(31)で $N=2$ とすると $\theta_c$ の値に係わらず $\omega_c = 2$ となり、2次の共鳴が予想される。この共鳴はタイプHの不安定性に結びついているようにも思われるが(特に $N \rightarrow 2^-$ でタイプHの不安定性領域が $0 < \varepsilon < \varepsilon_c$ にはさまれてつぶれるところ)、タイプHの不安定性の原因は渦回転運動と内部重力波の共鳴と捉えるほうが自然であり、前にも触れたようにその完全な理解は将来の課題であろう。一方、タイプMの不安定性に関しては高次の共鳴現象としての解釈が役にたつ。例えば $N > 3$ の場合 $\theta_c = \theta_s = \cos^{-1}((N^2 - 9)/(N^2 - 4))$ とすると $\omega_c = 3$ となり、 $N > 3$ では3次の共鳴が許されることになる。確かに図5、5' ( $N=3.5$ )で最下端の不安定領域は $\theta_s = 0.892$ で $\theta$ 軸に達しており、タイプMの不安定性のメカニズムが慣性波動とStrain場の高次共鳴であることを裏付けている。同様にして $N$ が大きくなるにつれて $[N]$ 本の不安定ブランチが $\theta$ 軸まで届く。また、 $\theta$ 軸に届いていない不安定ブランチについても、そのメカニズムは高次共鳴にあると思うのが自然であり、タイプMの不安定領域は $(\varepsilon, \theta) = (1, 0)$ から伸びる無限本のブランチからなると予想される。

## 5. まとめ

本論文では引延ばされた渦領域の三次元不安定性に対する安定密度成層の効果調べた。結果を簡単にまとめると

- a) Pierrehumbert型の不安定性は成層効果によって抑えられ、無次元化されたBrunt-Vaisala振動数が1を超えると消えてしまう。
- b) その一方で、渦回転運動と鉛直重力振動との共鳴によると思われるタイプH

不安定性が  $0 < N < 2$  で現れる。

c) さらに、すべての B-V 振動数 ( $\neq 0$ ) に対して無限本の不安定ブランチを持つタイプ M 不安定性が存在する。タイプ M 不安定性は慣性波動と Strain 場との高次共鳴に起因する。

等のように密度成層は楕円渦領域の不安定性に自明でない影響を与えることがわかる。これらの結果は密度成層流体中での乱流遷移過程の理解に有意な知見を供するものと思われる。

#### 参考文献

- 1) S. C. Crow, AIAA J. 8, 2172 (1972).
- 2) S. E. Widnall, D. B. Bliss and C. Y. Tsai, J. Fluid Mech. 66, 35 (1974).
- 3) R. T. Pierrehumbert, Phys. Rev. Lett. 57, 2157 (1986).
- 4) B. J. Bayly, Phys. Rev. Lett. 57, 2160 (1986).
- 5) F. Waleffe, Phys. Fluids A2, 76 (1990).
- 6) M. J. Landman and P. G. Saffman, Phys. Fluids 30, 2339 (1987).
- 7) T. Miyazaki and Y. Fukumoto, Phys. Fluids A3, in press (1991).
- 8) A. D. D. Craik and W. O. Criminale, Proc. Roy. Soc. London Ser. A406, 13 (1986).

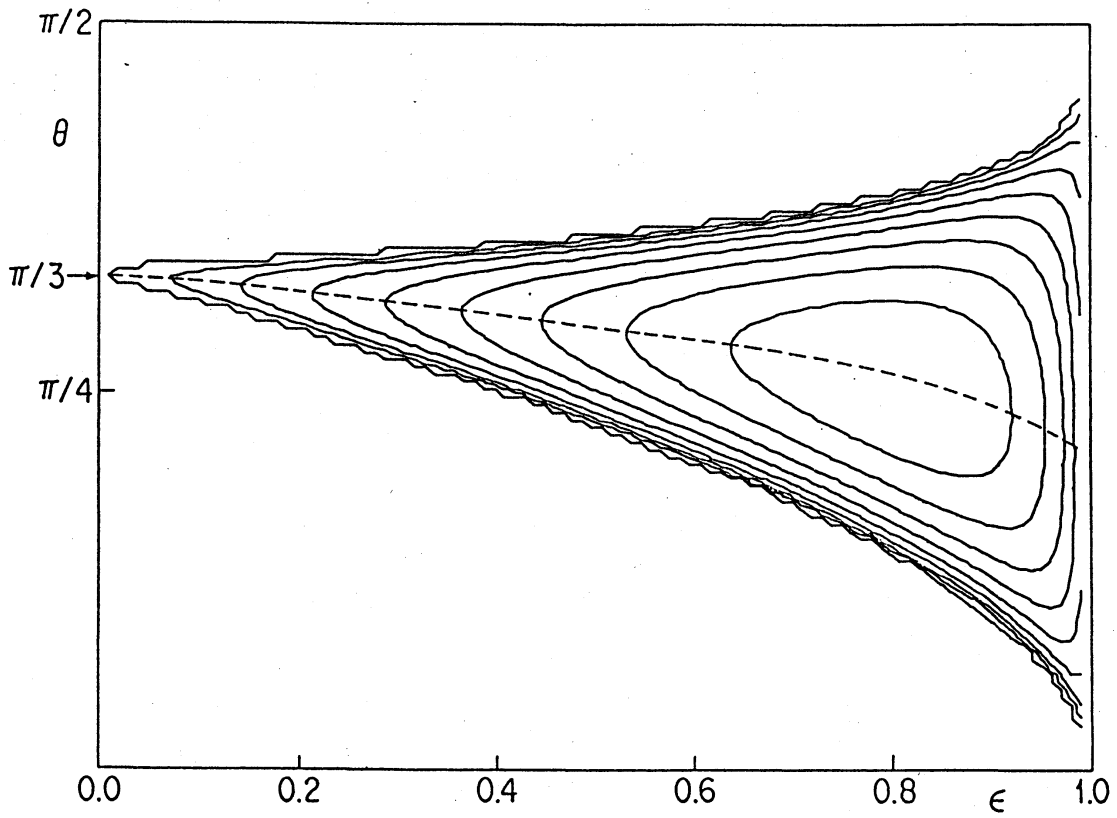


图 1

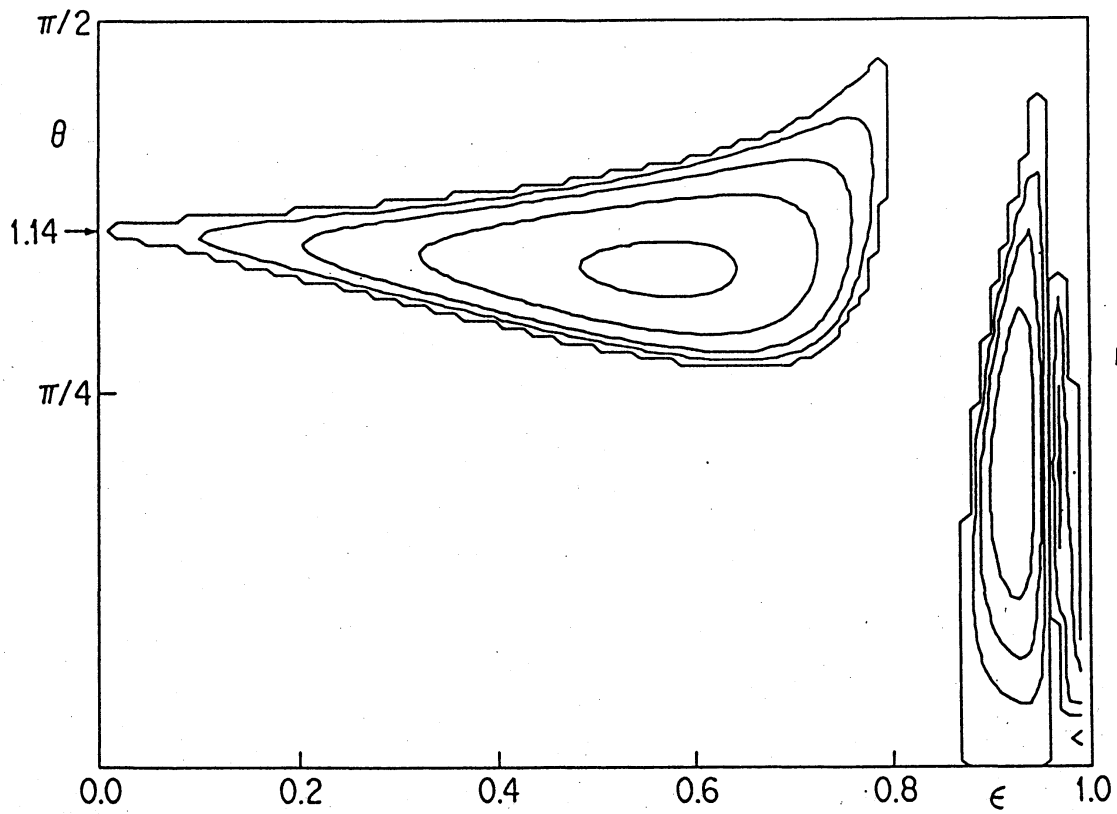


图 2

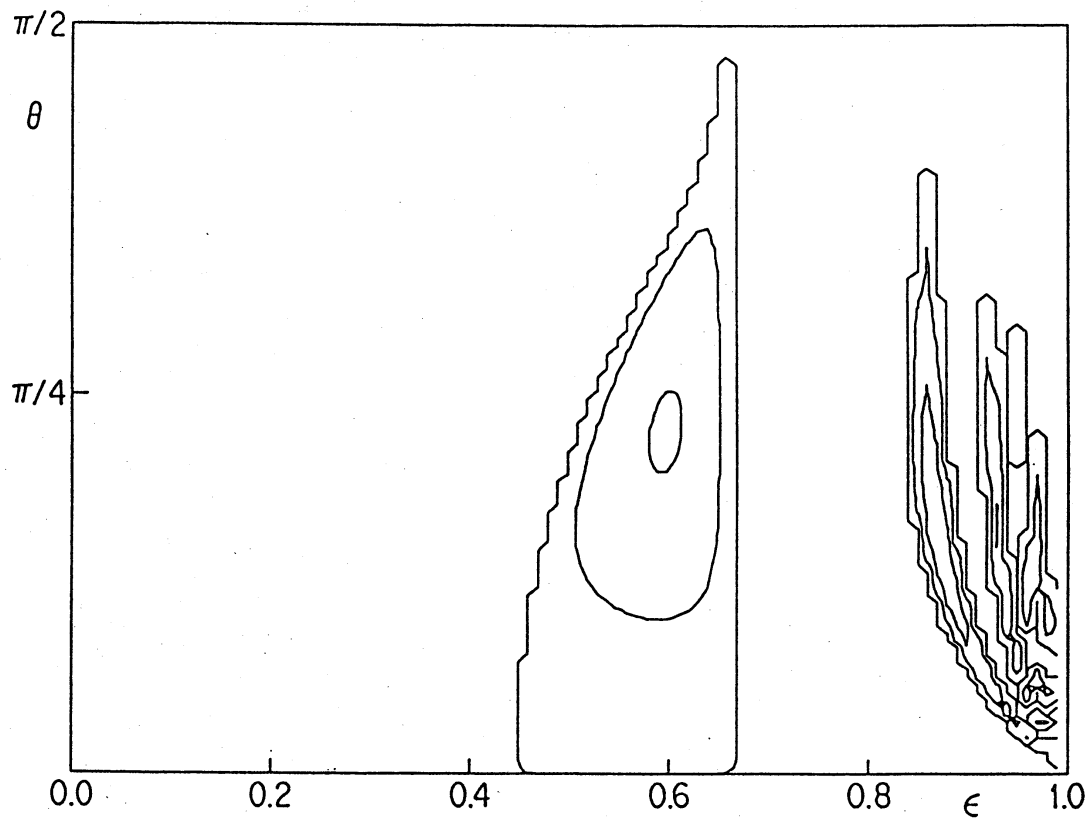


图3

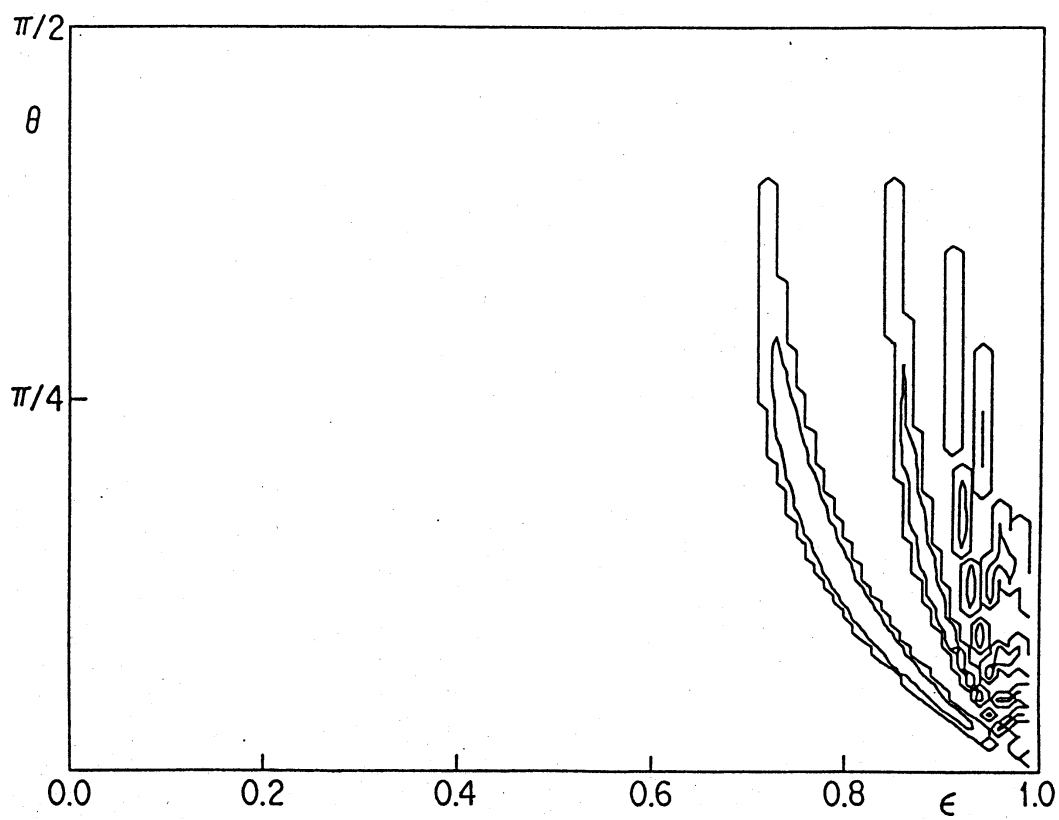


图4

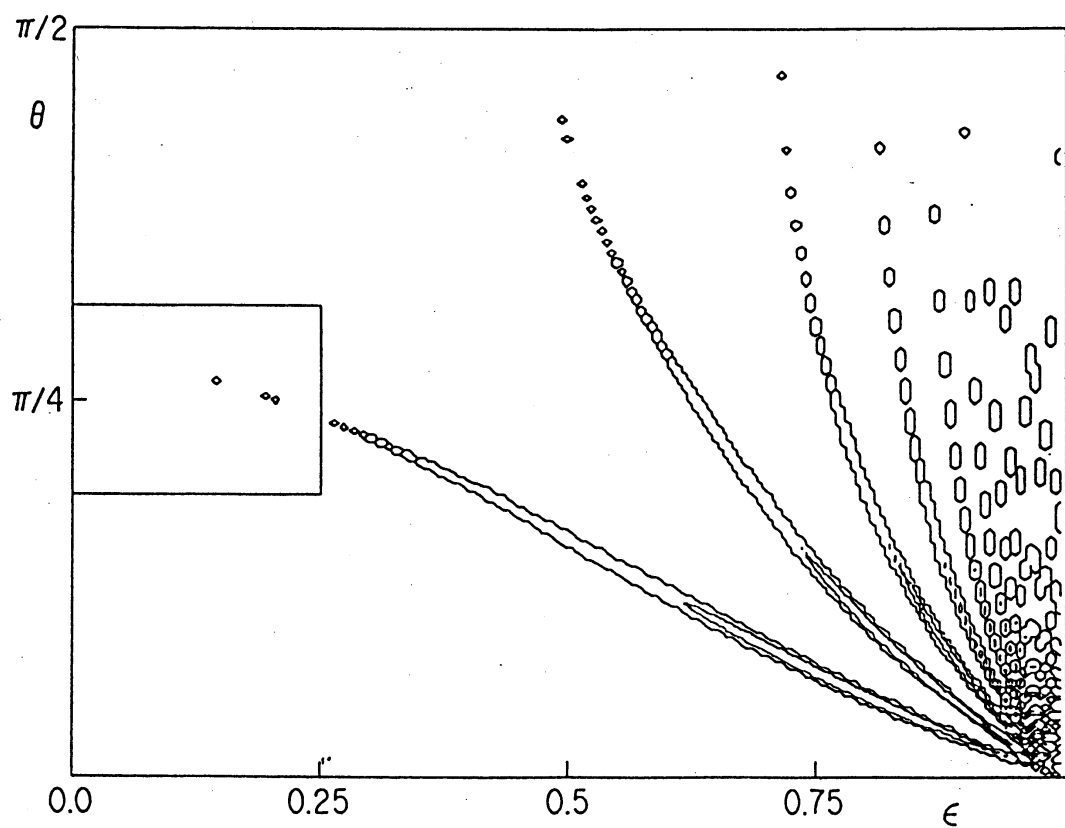


图 5

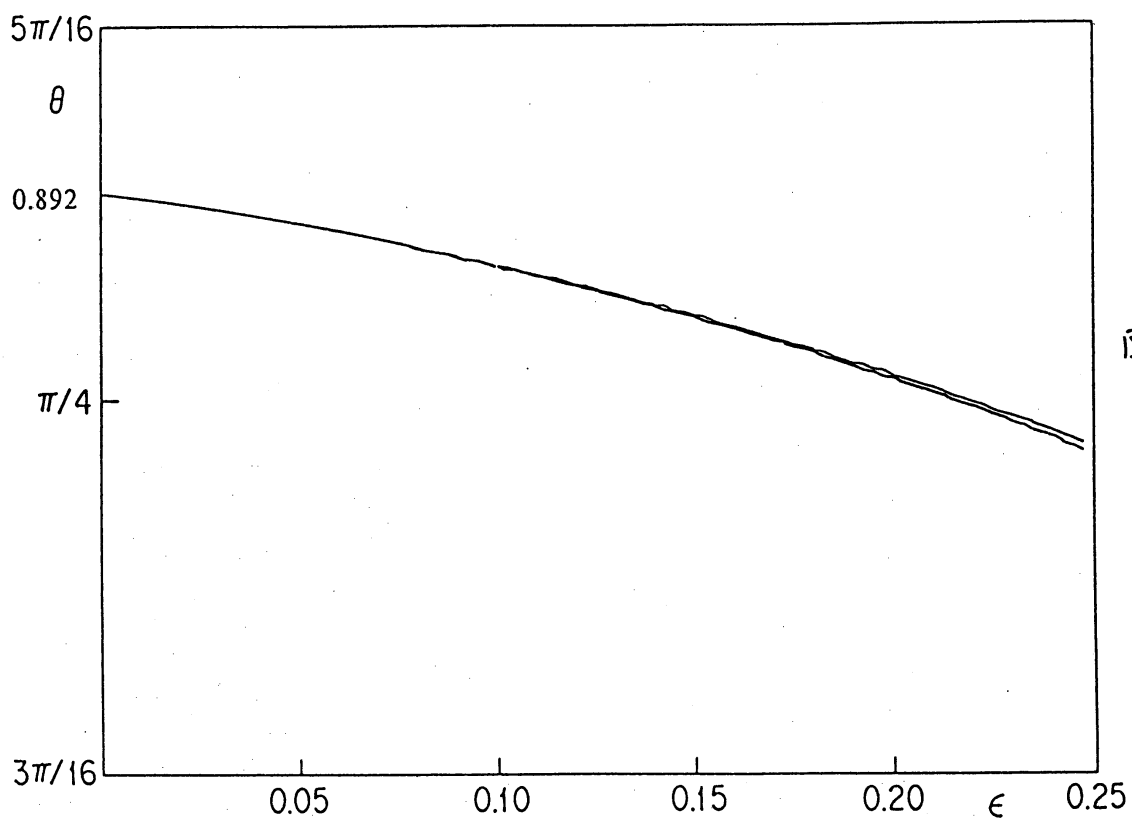


图 5'