

せん断乱流に対する一様回転の影響

岡山大学 工学部 柳瀬 真一郎 (YANASE, Shinichiro)

I . M . G . M. L e s i e u r

I . M . G . O. M é t a i s

Univ. Washington J. J. R i l e y

地球大気・海洋、また惑星・恒星大気の流体運動は回転によるコリオリ力、遠心力の影響を強く受けている。一方これらの流体運動において、しばしば特徴的な渦運動が発生し、木星大気の大赤斑の様に長時間安定に存在するものもあることが知られている。従って渦運動に対する回転の効果を調べることは、地球・宇宙流体力学において重要であり、研究の第一歩としては一様な回転の渦に対する影響を調べるのが適当と考えられる。ところで、これらの系における渦は多く回転軸方向の渦度を持つ 2 次元的な形態を示すが、一様な回転は回転軸と垂直な面内での二次元運動に対しては影響を与えないため一様な回転の効果調べるためには 3 次元的な流体運動を調べる必要がある。本研究では、ケルビン・ヘ

ルムホルツ渦に対する一様回転の影響を3次元直接数値計算及び  $\tanh$  型の主流に対する3次元線形安定性計算によって調べた。結果は、渦が一様回転に対してサイクロニック（渦が一様回転と同方向に回転）であるかアンティサイクロニック（反対方向に回転）であるかによって全く異なり、前者の場合渦は常に安定であるが、後者の場合は弱い一様回転に対して渦は激しい3次元不安定を起こすことが示された。

### § 1. 渦管モデルによる考察

一様回転による渦の安定化・不安定化効果は絶対渦度の保存に基づく簡単な理論的考察によって説明できる。その内容はすでに発表済みである (Lesieur et al. 1991) ので、ここでは要約を述べることにする。ある初期時間  $t_0$  で、 $z$  方向の渦度  $\omega_{2D}(x, y, t_0) < 0$  を持つ渦管を考える。一様回転の角速度  $\Omega > 0$  と  $\Omega < 0$  は、それぞれサイクロニックおよびアンティサイクロニックの場合に対応する。局所ロスビー数は次のように定義される。

$$R_0^{(1)} = \omega_{2D} / |\Omega|. \quad (1)$$

この2次元的な渦管に小さな三次元攪乱  $\omega^{(1)}$  を加える。一様回転のない非粘性流体では、ケルビンの定理によって渦度が保存される。それに対して回転系では絶対渦度  $\omega_a$  が保存され

る (Lesieur, 1990)。

$$\omega_a = \omega + 2\Omega = (\omega_{2D} + 2\Omega) k_z + \omega^{(1)}. \quad (2)$$

ここで  $k_z$  は  $z$  方向の単位ベクトルである。

さて、この攪乱がどの様に時間発展するかを絶対渦度の保存に基づいて考えてみる。

a) サイクロニック回転 ( $\Omega < 0$ )

(2) で表される絶対渦度ベクトルは、対応する相対渦度と比べて  $z$  軸に近いつまりより2次元的である。従って、サイクロニックな回転は安定化効果を持つことがわかる。

b) アンティサイクロニック回転 ( $\Omega > 0$ )

i) 弱回転:  $\Omega$  が正の値をとって大きくなると絶対渦管 (絶対渦度に対応する渦管) は、対応する相対渦管 (相対渦度に対応する渦管) と比べて強い三次元的な変形を受ける。故に一樣回転は不安定化効果を持つ。最も強い三次元的不安定化は、 $\omega_{2D} + 2\Omega \sim 0$ , で発生する。このとき局所ロスビー数は1のオーダーとなる。初期に強く三次元的な構造を持つ絶対渦管は、平均場 (二次元せん断層によって作られる) のために引き延ばされて強い流れ方向 (streamwise) の渦が生成され、逆に平均場を変形させるようになる。最後に流れ全体が三次元的となる。

ii) 強回転:  $\Omega$  が大きくなり  $\omega_{2D} + 2\Omega > |\omega^{(1)}|$  となる

と、絶対渦管は相対渦管と反平行に近づく。

$$\omega_{2D} + 2\Omega = -\omega_{2D}, \quad (3)$$

すなわち  $R^{(1)} = 0.5$  となると、絶対渦度は対応する相対渦度と同じ大きさとなり、非回転場における渦管と鏡面对称となる。そして、 $\Omega$  がさらに大きくなると一様回転は安定化効果を示す。

## § 2. 基礎方程式

回転系における流体運動を支配する方程式は次のようになる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (4)$$

$$(\partial / \partial t) \mathbf{u} = \mathbf{u} \times (\boldsymbol{\omega} + 2\boldsymbol{\Omega}) - \nabla \Pi + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (5)$$

ここで  $\mathbf{u}$  は速度、 $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  は渦度、 $\nu$  は分子粘性で、

$$\Pi = p / \rho + \mathbf{u}^2 / 2 - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) / 2$$

は一般化圧力である。流れ方向 (streamwise,  $x$ ) と渦軸方向 (spanwise,  $y$ ) に流れ場が周期的であると仮定する。一方せん断方向 (transverse,  $z$ ) には、流れ場が無限遠点 ( $y \rightarrow \pm \infty$ ) で静止すると仮定する。数値計算は、流れ方向と渦軸方向にフーリエ分解をし、一方せん断方向には座標の引き延ばしを行った。三次元数値計算に用いたのは

$$y = h(\zeta) = -b \cotan \zeta. \quad (6)$$

ここで  $b$  は調節パラメーターである。この変換は Cain et al. (1981) によって導入されたもので、混合境界層および二次元後流の数値実験に適用することができ、フーリエ変換を用いることができるので大変便利である。しかし回転系の混合境界層では、sine 部分と cosine 部分が混合するため、適用するためには少し工夫が必要である (Yanase et al. 1991)。

数値計算の結果の一部は既に発表された (Lesier et al. 1991) が、さらに詳細な流れの構造を調べた結果を得ている。また数値計算の結果の内特に初期時刻の流れの時間発展が、線形安定性によって明快に説明できることがわかった。本報告では線形安定性の結果を詳しく述べることにする。

### § 3. 線形安定性

主流  $U_0(y) = \tanh(2y/\delta_i)$  の上に無限小攪乱  $u'$ 、 $\pi'$  を次のように加える。

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= U_0(y) k_x + u'(x, y, z, t), \\ \pi(x, y, z, t) &= P_0(y) + \pi'(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (7)$$

ここで  $P_0(y)$  は  $U_0(y)$  に対応する圧力場である。(7) を (4) - (5) へ代入して、2次の項を無視する。さらに攪乱を次のようにフーリエ分解すると

$$u'(x, y, z, t) = \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\} u'(y),$$

$$\pi'(x, y, z, t) = \exp\{i(\alpha x + \beta y - \omega t)\} \pi'(y),$$

ここで、 $u'(y) = u'(y)k_x + v'(y)k_y + w'(y)k_z$  である。

固有値方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & (\omega / \alpha) (d^2 / dy^2 - k^2) v'(y) \\ &= \{U_0(y) - (\nu / (i\alpha)) (d^2 / dy^2 - k^2)\} \times \\ & \quad (d^2 / dy^2 - k^2) v'(y) \\ & \quad - d^2 U_0 / dy^2 + (2\Omega / (i\alpha)) \xi(y), \\ & (\omega / \alpha) \xi(y) \\ &= \{U_0(y) - (\nu / (i\alpha)) (d^2 / dy^2 - k^2)\} \xi(y) \\ & \quad + (\beta^2 / (i\alpha)) (2\Omega + dU_0 / dy) v'(y), \end{aligned} \tag{8}$$

ここで  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ 、 $\xi(y) = \beta(\beta u'(y) - \alpha w'(y))$  である。主流の代表速度  $U_0$ 、渦度厚さ  $\delta_i$ 、及び  $\Omega$ 、 $\nu$  で無次元化するとレイノルズ数  $R_0 = U_0 \delta_i / \nu$ 、ロスビー数  $R_0 = U_0 / (|\Omega| \delta_i)$  の二つの無次元パラメーターを得る。固有値問題を解くために (6) と類似した変数変換によって領域を  $(-\infty, \infty)$  から  $(-1, 1)$  へ写像してからチェビシェフ多項式展開を用いた。

増幅率  $\sigma = \text{Im}(\omega)$  をサイクロニック、アンティサイクロニックの場合について求めた。レイノルズ数は 300 に固

定した。増幅率一定の等高線をいくつかのロスビー数に対して図1から7に示す。各図の横軸は $\alpha/2$ を縦軸は $\beta/2$ を表す。等高線は、非負の増幅率に対してのみ描かれていることに注意していただきたい。また、縞模様の書き入れられた領域は負の増幅率を持つ。

最初に図1に非回転の場合 ( $R_0 = \infty$ ) に対する結果を示す。この場合には Squire の定理が成り立ち、2次元モードが最も不安定で最大増幅率  $\sigma_{\max}^{(a)} = 0.360$  は  $\alpha = 0.433 \times 2$ ,  $\beta = 0$  で与えられる。これを流れ方向の不安定と呼ぶことにする。この結果は、以前から得られている物と一致している (例えば Michalke, 1964; Metcalfe et al. 1987)。 (ここで与えられる増幅率及び波数は、Metcalfe et al. によって得られたものと比べて2倍となっていることに注意していただきたい。これは、単位長さ $\delta$ の選び方に起因している。)

次にサイクロニック回転の例として、図2に $R_0 = 1$ の場合を示す。不安定領域は非常に小さくなり、増幅されるのは小さな $\beta$ を持つほとんど2次元的なモードだけであることがわかる。最大増幅率  $\sigma_{\max}^{(a)} = 0.360$  は  $\alpha = 0.433 \times 2$ ,  $\beta = 0$  で与えられ、回転のない場合と全く同じである。つまりサイクロニックな場合には回転は最大増幅モードには影

響を与えない。この結果は Johnson (1963) によって得られたものと一致している。

ところがアンテサイクロニックな回転に対しては全く異なった結果が得られ、Johnson が見つけることのできなかった新しい不安定モードを得た。図 3 に示すように非常に弱い回転に対しても ( $R_0 = 20$ ) 増幅率の等高線は非回転の場合と比べて全く異なっている。不安定領域は  $\beta$  の大きな値に広がり、このことは渦軸方向 (spanwise) に変化する攪乱が発達することを示している。これを渦軸方向の不安定と呼ぶことにする。 $\beta$  軸の付近で増幅率は大きくなり、局所的な最大値  $\sigma_{\max}^{(b)} = 0.294$  が  $\beta$  軸上 ( $\beta = 1.51 \times 2$ ) で実現される。なお、大域的な最大値は  $\alpha$  軸上で得られ非回転の場合と全く同じであるが、 $\beta > 0$  の不安定領域の広がりを見れば三次元的なモードが増幅されるのは明かである。ところで  $\beta$  軸付近で得られた不安定モード (渦軸方向の不安定) は Johnson の非粘性解析では得られていない。我々は別に非粘性解析を行いこの不安定モードが非粘性極限でも存在することを示した。従って、この不一致は Johnson の不十分な漸近解析がこの不安定モードを取り逃がしたからではないかと考えている。

さらにサイクロニックな回転を増して行くと ( $R_0$  は減少する)  $\beta$  軸付近の不安定領域はますます広がり、これに対応す



る増幅率は大きくなる。得られた結果から内挿することによって  $R_o \sim 2.4$  で渦軸方向の不安定の増幅率は最大値  $\sigma_{max}^{(b)} = 0.674$  に達する事がわかる。図4に  $R_o = 2$  に対する増幅率の等高線を示す。この場合は増幅率の大域的最大値は  $\sigma_{max}^{(b)} = 0.664$  で与えられ、この値は  $\alpha$  軸上の局所最大値  $\sigma_{max}^{(a)} = 0.360$  の約2倍である。従って、この付近のロスビー数に対しては渦軸方向に変化する三次元不安定が流れ方向にのみ変化する二次元（ケルビン・ヘルムホルツ）不安定と比べて圧倒的に優勢となることがわかる。

サイクロニック回転が一層強くなると逆に渦軸方向の不安定モードがなくなっていく。そしてロスビー数が1をに近づくとき急激な変化が生じる。図5は  $R_o = 1.25$  に対する増幅率を示す。 $\beta$  軸上の増幅率が非常に小さくなり、 $\alpha$  軸上の不安定が見分けられるようになる。図6に見られるように  $R_o = 1.11$  となると、渦軸方向の不安定はほとんど消滅し、流れ方向の不安定が再び支配的になる。 $R_o = 1$  では、図7に見られるように渦軸方向の不安定は完全に消滅する。ここで再び Johnson の非粘性解析との一致が回復する。図7の不安定領域は、Johnson の図5 (e) の  $S = 1$  に対する破線とよく一致する。（Johnson の  $S$  は、本研究の  $R_o$  と同じである。）

$R_o = 0.5$  での増幅率分布は、サイクロニックな場合とほ

とんど同じとなる。従って、回転が強ければ、サイクロニック、アンティサイクロニックに関わりなく渦を安定化させ、流れを二次元に保つ効果が存在する事がわかる。

以上述べた線形安定性の結果は、直接数値計算の結果とほぼ完全に矛盾がなく、特に初期時刻における攪乱の時間発展を明快に説明するものである。しかし直接数値計算の結果は、アンティサイクロニックな回転が不安定効果を及ぼす時、線形相互作用が支配的である時間が予想外に長く続く事を示しており、この点に関する説明が今後の課題である。

#### 参考文献

Cain, A. B., Reynolds, W. C. & Ferziger, J. H. 1981

NASA Technical Report, No. TF-14.

Johnson, J. A. 1963 J. Fluid Mech. 17, 337-352.

Lesieur, M. 1990 Turbulence in Fluids, revised ed.

Kluwer Publishers.

Lesieur, M., Yanase, S. & Métais, O. 1991 Phys. Fluids

A 3, 403-407.

Metcalf, R. W., Orszag, S. A., Brachet, M. E., Menon, S. & Riley, J. J. 1987 J. Fluid Mech. 184, 207-243.

Michalke, A. 1964 J. Fluid Mech. 56, 695-719.

Yanase, S., Métais, O., Lesier, M. & Riley, J. J. 1991

投稿準備中.

$R_0 = \infty$

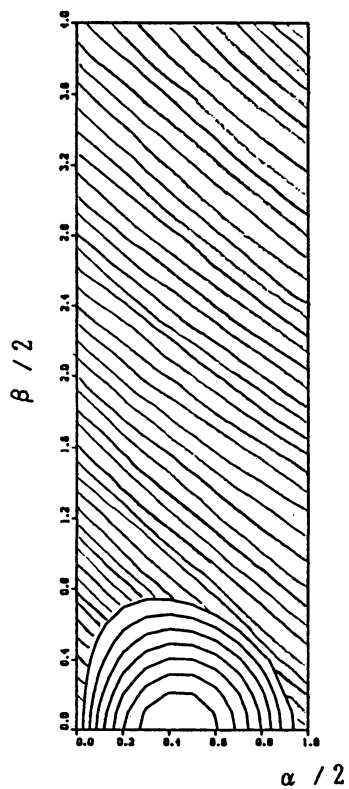


图 1

$R_0 = 1$

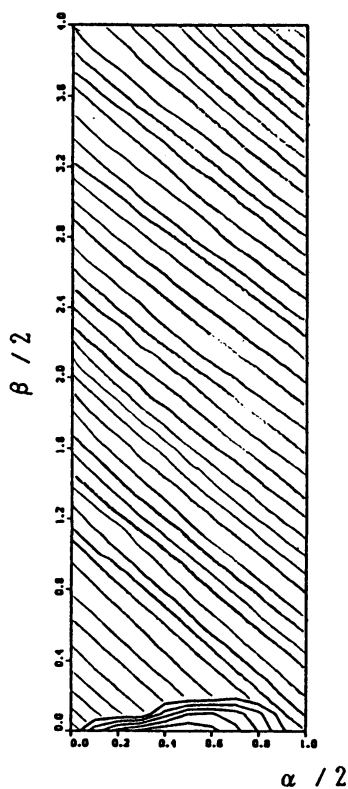


图 2

$R_0 = 20$

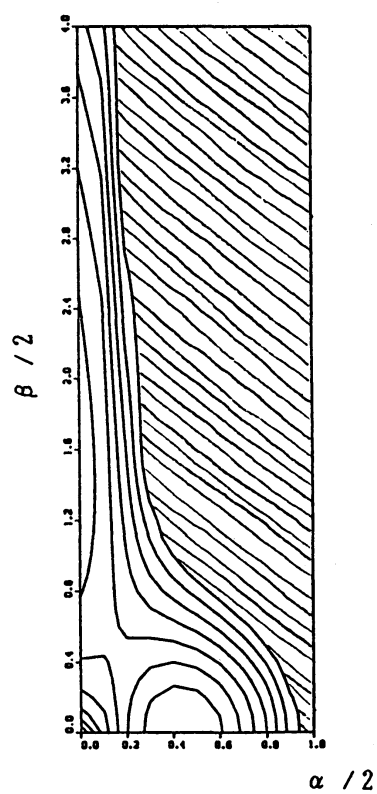


图 3

