数理解析研究所講究録
第 768 巻 1991 年 45-49

Sharp指標と有限単純群

筑波大　飯寄　信保（Nobuo Iiyori）

Gを有限群、χをGの一般指標とする。1904年にBlichfeldtは$b(\chi)=|G|^{-1}\prod_{x\in\chi(G^{\#})}\{\chi(1)-x\}$が有理整数になることを示した。$b(\chi)=1$のとき指標$\chi$はSharp又は$\chi(G^{\#})$型のsharp指標と呼ばれる。又、$|\chi(G^{\#})|$を$\chi$のrankと言う。Sharp指標については、Cameron, Kataoka, Kiyota, Matsuhisaらによっていろいろと考察されている。

定義　(1) ρ_GをGの正則指標、nを有理整数とする。一般にρ_G+n1_Gはsharp指標であるが、これを自明なSharp指標と呼ぶ。

(2) χをGの(Sharp)指標とする。$\chi(G^{\#})$が$\mathbb{Z}-\{\chi(1)-1, \chi(1)+1\}$の部分集合で又、$\chi(G^{\#})=L_1\cup\cdots\cup L_k$ (disjoint union)に分解され、$i\neq j$ならば$l_i\in L_i$, $l_j\in L_j$は常に$(\chi(1)-l_i, \chi(1)-l_j)=1$となるとき$\chi$は$k$-連結であると言う。

さて、Sharp指標に関する主な問題に次のようなものがある。

問題 (1) 任意の型Lに対し、L型のSharp指標をもつ群を分類せよ。

(2) 自明でないSharp指標をもつ群を見つけよ。

(3) 自明でないSharp指標をもたない群を見つけよ。

[2]には、問題(1)について色々な結果が書れておりその中の一つに次の定理1がある。

定理1 (Cameron-Kiyota [2]) $\{-1, 1\}$型のSharp指標をもつ群は次のものに限る。

D_8, Q_8, S_4, $\widehat{S_4}$, $SL(2,3)$, $GL(2,3)$, S_5, $SL(2,5)$
$PSL(2,7)$, A_6, $\widehat{A_7}$, そして M_{11}.

問題(2)については、あまり考察されていなかったが、最近次の定理がKataokaによって示された。

定理2 (Kataoka [5]) 偶数位数基本アーベル群は自明でないSharp指標を持たない。

Kataokaは実際は上の定理をもっと大きなクラスの群について示している。

<u>定義</u>　Gの Prime graph $\Gamma(G)$とは、$V(\Gamma(G))=\pi(G)$で $x, y \in V(\Gamma(G))$ $(x \neq y)$に対し、Gが位数 xyの元を持つとき、$\{x, y\} \in E(\Gamma(G))$となるようなグラフのことである。

このPrime graphとk-連結Sharp指標の概念は密接に関係している。問題(3)に関して次の結果を得た。

定理3（Iiyori［3］）次の(1)、(2)は同値である。

(1) $\Gamma(G)$の連結成分の個数が2以上。

(2) Gはrank 2の2-連結Sharp指標をもつ。

(2)から(1)はKiyotaによる。証明の概略を述べる。次の補題は有限群のSharp指標を見つける上で、重要なものである。

<u>補題</u>　Gを有限群とし、$\mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)=\{\chi_0, \cdots, \chi_r\}$ $(\chi_0=1_G)$とする。又、$\{g_0, \cdots, g_r\}$ $(g_0=1)$をGの共役類の代表系とする。$A=(\chi_i(g_j))$とおく。$S={}^t(s_1, \cdots, s_r)$が$\prod_{\sigma \in \{s_1, \cdots, s_r\}} \sigma = |G|$を満しているとする。

もし
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} = -A_{11} \begin{pmatrix} |C_G(g_1)|^{-1} & & O \\ & \ddots & \\ O & & |C_G(g_r)|^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_r \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^r$$
ならば、$\chi = \sum_{i=1}^{r} a_i \chi_i + z 1_G$ $(z \in \mathbb{Z})$ は Sharp 指標である。ここで A_{11} は A の1行1列の余因子行列とする。

さて $\Gamma(G)$ の連結成分の個数 s が2以上ならば、$|G| = n_1 \cdots n_t$ $(n_i \in \mathbb{Z})$ で次の性質を満すものがあるのが容易にわかる。

(i) $(n_i, n_j) = 1$ for $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq t$ かつ $1 < t \leq S$。

(ii) $\tau \in G^\#$ に対しある i が存在して $|C_G(\tau)|$ は n_i を割り切る。

そこで $\Gamma_i = \{\tau \in G^\# \mid n_i \equiv 0 \pmod{|C_G(\tau)|}\} \cup \{1\}$ とおき、$\theta \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{C}}(G)$ に対し、θ_i を
$$\theta_i(\tau) = \begin{cases} |G|\theta & \tau \in \Gamma_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$
とおく。θ_i は Brauer の指標定理から一般指標になることがわかる。これと補題から
$$\varphi(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau = 1 \\ -n_i & \tau \in \Gamma_i - \{1\} \quad \text{for } 1 \leq i \leq t \end{cases}$$
とおくと φ が Sharp 指標になることがわかる。従って (1) から (2) を得る。(2) から (1) は背理法を用いて示される。

定理3によって rank 2 の 2-連結 Sharp指標をもつ群の分類は実質、Prime graph の連結成分の個数が2以上の有限単純群Gの分類に帰着される。この分類はWilliams に始まりYamakiと筆者によって完成されている。

以 上.

References

[1] H.F. Blichfeldt, *A theorem concerning the invariants of homogeneous groups with some applications to substitution groups,* Trans. Amer. Math. Soc. 5(1904) 461–466.

[2] P.J. Cameron and M. Kiyota, *Sharp characters of finite groups,* J. Algebra 115(1988) 123–143.

[3] N. Iiyori, *Sharp characters and prime graphs of finite groups* (preprint)

[4] N. Iiyori and H. Yamaki, *Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic,* (in preparation)

[5] T. Kataoka, private comunication. (1991年1月11日付)

[6] J.S. Williams, *Prime graph components of finite groups.* J. Algebra 69(1981) 487–513.