数理解析研究所講究録
第768巻 1991年 103-113

Cayleyの公式の組合せ論的証明

京大・理　梅田亨
(Tôru Umeda)

0:　ここでいう所謂「Cayleyの公式」とは現代的に言えば、$GL_n \times GL_n$ が $Mat_{n \times n}$ に働くという概均質ベクトル空間のb-函数の計算のことである。実際にA. Cayley自身がその公式を導いたのかは定かではない。ほかにもいくつか文献上の謎があって「数学史」として興味深いのだが、紙数も限られているのでいまは措く。

この公式の発展は Gårding (1946), Shimura (1984) と続くし、冒頭で述べたように概均質ベクトル空間のb-函数の計算がほかならぬ一般化を与えている。証明法はいくつかの異なるものが知られているが、大別して (a) Plücker relation, (b) $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2} dx$ のような積分, (c) Capelli identity を使うものと分けられる。(see [S]; [GY], [T1], [T2], [G]; [Sh], [RS]; [HU]). また超局所解析による一般的な方法については[K]を参照されたい。筆者はこれに関しては知るところは少ない。

本稿では公式にあらわれる $s(s+1)\cdots(s+n-1)$ という因子が如何にも組合せ論と関係していそうな点に注目して，上のいずれとも異なる"純"組合せ論的証明を与える。使う道具は高校で習う「順列・組合せ」と大学1年で習う行列式の基本性質のみである。

（注）本稿は筆者の1989-90 Yale大学滞在中に思いついたささやかな結果に基く。これは[HU]とは一応独立だが，その研究途中の副産物でもある。しかし多分に既知のものではないかと考えており，厖大な文献をいちいち調べるのも煩しく，発表するのはここが始めてである。はじめのCayleyの件も含めて識者の御教示を乞いたい。

1：「順列・組合せ」の復習

高校数学（或いは小学校高学年で既習のことともいえるかも知れない）の復習から始める．

(a) 順列．「ならべ方の数」をかぞえることを反省する為に「モノを並べる」とはどういうことかと考えてみる。心理的には二つの逆の方向の描像があり得るが，簡単に済ませる。'モノ'(=記号)を'位置'に置くとは{位置}から{記号}へのmap（写像）に他ならぬ。（モノを置かないことも許すときは{記号}を拡張してゼロ記号(=空)を入れておけばよ

い。零の発見に倣うのである。）これが〈順列〉である。数をかぞえる為に $X=\{$位置$\}$, $Y=\{$記号$\}$ という集合は有限として $r=\#X$, $n=\#Y$ と置く。

((例 1)):

	mapについての制限	$\#\{maps\}$	備考
1)	制限なし	n^r	「重複順列」
2)	injective	${}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1)$	「順列」
3)	surjective	$n! \times$ 第二種 Stirling 数	

(b) 組合せ. 順列 $X \xrightarrow{f} Y$ について'位置'の集合 X の方で或る種の同一視を行うのが〈組合せ〉である。それが群による対称性である場合が典型的で（数珠を作ったり，サイコロに色を塗ったり），しかもそのうちで群が置換全体の群 $\mathfrak{S}(X)$ の時が，いちばんよく知っている「組合せ」である。

((例 2)): 上の例1で 1) なら「重複組合せ」，2) なら「組合せ」である。

$\mathfrak{S}(X)$ で割ると X の元には個性がなくなり「濃度」だけの問題となる（濃度の定義！）。つまり $\#f^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ という f の fiber の箇数のみが問題となってくる。よってこれを別の言葉で言えば "組合せ" は不定方程式

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = r \qquad (\alpha_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

の解と対応する，ここで map についての制限は α_i に反映して 例1 に対応して次の例を得る．

((例2'))

制限		「組み合せ」の数	備考
1)	制限なし	${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1}$ (*)	「重複組合せ」
2)	$\alpha_i = 0, 1$	${}_nC_r$	「組合せ」
3)	$\alpha_i > 0$	${}_{r-1}C_{n-1} = {}_nH_{r-n}$	

(*) 重複組合せの数 ${}_nH_r$ でなぜ H という文字を使うのかよく知らないが n 変数 r 次斉次の homogeneous polynomials の"個数"（次元）に等しいからだという説をきいたことがある．また ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1} = (n+r-1)!/(n-1)!r! = \frac{1}{r!}n(n+1)\cdots(r+n-1)$ という「公式」については高校以来さまざまな工夫を知っている．あとで使うのはこのことである．

「組み合せ」も"増加写像"の個数を数えることに帰着させたり定式化したりして「写像一元論」を唱える立場もある．しかし，むしろこれは $\{\text{maps}\} \to \mathfrak{S}(X)\backslash\{\text{maps}\}$ の section のうまいとり方として「順序」という構造が付加されたと見るべきであろう．これは対称性によって「幾何」をみる典型的状況のひとつといえる．

(c) 補足．あとで使わないのだが，ついでに述べておく．$X \to Y$ を $\mathfrak{S}(Y)$ で割ることも考えられる．うまい名前

を知らないが,「区分け」とか「類別」のようなものである.
さらに $\mathfrak{S}(X)$ と $\mathfrak{S}(Y)$ の両方で割ると,さきほどの不定方程式で α_i の順番をとりかえたものが同一視されるから「数の分割」があらわれる.

2: 「順列・組合せ」と微分

本稿の主題 Cayley の公式の最も易しい場合は,ほかならぬ

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

というものである。これをくりかえし使えば

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}.$$

この係数として順列の数 ${}_nP_r$ が出てくるのは勿論偶然ではない。まず $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ について見ると,$x^n = \overbrace{x\times\cdots\times x}^{n}$ を $\frac{d}{dx}$ という derivation の積の微分の公式を使って微分を実行すると,どの x を消すかということで n 通りの場合が生じ,それが係数の n となる。少し見易くする為に $\frac{d}{dx}$ の代りに $\xi\frac{d}{dx}$ という derivation を用いて

$$\xi\frac{d}{dx}x^n = \xi x^{n-1} + x\xi x^{n-2} + \cdots + x^{n-1}\xi$$

と書いてみると「語」$x\cdots x$ のどの x が ξ にとり替られて「語」$x\cdots\xi\cdots x$ となるか区別して書ける。この polarization operator $\xi\frac{d}{dx}$ を用いて $\left(\frac{d}{dx}\right)^r x^n = n(n-1)\cdots(n-r+1)x^{n-r}$ を解釈してみると,$\xi_0,\cdots,\xi_{r-1}$ を新たな文字として

$$\left(\xi_{r-1}\frac{d}{dx}\right)\left(\xi_{r-2}\frac{d}{dx}\right)\cdots\left(\xi_0\frac{d}{dx}\right)x^n$$

を計算すると もとあったnコのxが$\xi_1,\cdots,\xi_r$にとり替えられていくあらゆる可能性だけの和が生じる。その項数は順列 $r\to n$ (injective) の箇数であるから ${}_nP_r$ となる。ここで公理的集合論の記号の便法を流用して $r=\{0,1,\cdots,r-1\}$ という略記法を使った(以下でも時に使う).

以上は非常に易しい局面での説明だが，微分計算と組合せのこのような関係は MacMahon などによって多く使われている。併し詳しいことはよく知らない.

3: Cayleyの公式

易しいことの復習は充分したから本題に入る。$n\times n$行列 $\mathrm{Mat}_{n\times n}$ の座標をx_{ij}，対応する微分作用素 $\partial_{x_{ij}}$ を ∂_{ij} と書く。定数係数 n 階の微分作用素 Ω を

$$\Omega = \det(\partial_{ij})$$

と定義する. これは Cayley の omega process と呼びならわされ 古典不変式論及び典型群の不変式論に於て重要な役割を果たしてきた. さて Cayley の公式とは Ω を $\det(x_{ij})^s$ に作用させた時の計算である. 簡単の為 $X=(x_{ij})$ と書く:

$$\Omega(\det X)^s = s(s+1)\cdots(s+n-1)(\det X)^{s-1}$$

一般に $\Omega(\det X)^s=\beta(s)(\det X)^{s-1}$ となる多項式 $\beta(s)$ の

存在すること，及びsが正整数のとき0でない，などを見るのは易しい．よって問題となるのは$\beta(s)$の具体的な計算である．いくつかの知られている方法については序に述べた文献を参照されたい．

4: 証明

$\beta(s)$が多項式であることを認めると $\beta(s)=s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を証明するにはsが正整数のとき言えばよい。基本的なideaはpolarization operatorによって微分結果の各項と或る写像(map)の対応を見ることである。そしてこの場合はmap $=$〈順列〉の数が高校数学の範囲で計算できるという訳である．

今，行列 $X=(x_{ij})$ を nコのタテベクトルがnコ並んだものとみて $X=(X_1,\cdots,X_n)$ と書く．別に同じsizeの一組のベクトルを用意する。それを並べた行列を $\Xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$．これらに関して polarization operator

$$\xi_j\partial_{x_i}=\sum_{k=1}^{n}\xi_{kj}\partial_{ki}$$

を考える．すると determinant は multilinear だから

$$(\xi_j\partial_{x_i})\det X=\det(x_1\cdots\overset{i}{\xi_j}\cdots x_n)$$

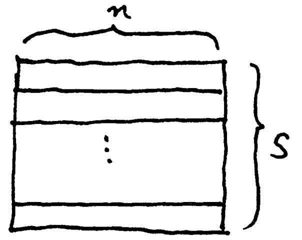
となる．つまりi番のベクトルがξ_jでとり替る．今sを正整数として $(\det X)^s$ にこの polarization operator を施すと，

sコの因子のうち，ひとつだけがさうおき替ったものが混りそういうsコの和が生ずる．このことを念頭において $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ について

$$D_\sigma=(\xi_{\sigma(n)}\partial_{x_n})(\xi_{\sigma(n-1)}\partial_{x_{n-1}})\cdots(\xi_{\sigma(1)}\partial_{x_1})$$

を $(\det X)^s$ に施した結果を考えよう．det の multilinear であることを強調して $\det X=|x_1\cdots x_n|$ のように書いてみる．このsコをタテに並べて「積」を表わすことにしよう．すると上の D_σ を $(\det X)^s$ に作用させたとき生ずる各項は

$$\left.\begin{array}{l} |x_1\cdots x_n| \\ \times|x_1\cdots x_n| \\ \quad\vdots \\ \times|x_1\cdots x_n| \end{array}\right\} s$$

（これを図式化して  と書く）

のうちタテに並んだsコの x_i のうちどれかひとつが $\xi_{\sigma(i)}$ に置きかわったものである．よって σ を fix すると $n\xrightarrow{f}s$ という s^n 箇の項が並ぶ。σ も込めて $n\xrightarrow{f_\sigma}n\times s$ $(i\mapsto(\sigma(i),f(i)))$ と書く。さて我々が必要なのは $(\det X)^s$ への Ω の作用である。上の D_σ との関係をみると

$$(\det\Xi)\cdot\Omega=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\operatorname{sgn}\sigma\cdot D_\sigma$$

であることは，行列式の積の法則である（ξ_j は x_i と独立な新たな変数であるから微分と積が可換である）。よって D_σ を施し交代和をつくったのち ξ_j を x_j と特殊化すれば必要

な結果が得られる．即ち

$$(\det \Xi)\cdot\Omega\,(\det X)^s\Big|_{\Xi\mapsto X} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}\sigma\cdot D_\sigma(\det X)^s\Big|_{\Xi\mapsto X}$$

で左辺は $(\det X)\cdot\Omega(\det X)^s$ となるから，示すべきは右辺が $s(s+1)\cdots(s+n-1)\,(\det X)^s$ となることである。

さて D_σ を $(\det X)^s$ に作用させて生ずる項で f_σ に対応するものを見る．ここで $\Xi\mapsto X$ と特殊化するとどうなるか．たとえば $|x_1\ \xi_1\cdots|$ のような因子を含んでいれば $\xi_1\to x_1$ によって重複したタテベクトルを含み，消える。よってこの特殊化で生き残るのは f_σ についての条件

(*)　σ は各 $f^{-1}(j)$　$(j\in S)$　の中で閉じた置換．

を満たすものに限る．またこのとき $\Xi\mapsto X$ と特殊化して得られるものは up to $\operatorname{sgn}\sigma$ で $(\det X)^s$ である．符号は交代和の符号と打ち消すので，結局は (*) をみたす f_σ の箇数を数えればよいことになった。

ここで $\{f_\sigma\}$ に $\mathfrak{S}_n$ が次のように働く：

$$f_\sigma=(\sigma,f)\ \overset{\tau}{\longmapsto}\ \tau f_\sigma=(\tau\sigma\tau^{-1},\,f\tau^{-1})\qquad \tau\in\mathfrak{S}_n$$

これは(*)を保つ。(*)をみたす$\{f_\sigma\}$の$\mathfrak{S}_n$－同値類は $\{f^{-1}(j)\,;\,j\in S\}$ という data できまることは容易だから，$\#\{f_\sigma\,;\,(*)\text{をみたす}\}/\sim\mathfrak{S}_n$ という「組合せ」は $\alpha_j=\#f^{-1}(j)$ として

$$\alpha_1+\cdots+\alpha_s = n \qquad\qquad \alpha_j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

の解の箇数に等しい．これは既に見たように ${}_sH_n$ である．

更に $\quad {}_sH_n = \binom{s+n-1}{n} = \frac{(s+n-1)!}{n!\,(s-1)!} = \frac{1}{n!}\, s(s+1)\cdots(s+n-1)$ を使うと，これが $\mathfrak{S}_n$-同値類の数であるから $n! = \#\mathfrak{S}_n$ を乗じたものが，結局 $(*)$ をみたす $\{f_\sigma\}$ の個数となる．よって

$$\beta(s) = s(s+1)\cdots(s+n-1)$$

が示された．（注：これは同時に $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} s^{c(\sigma)} = \beta(s)$ とも見れるが詳しいことは略す．但，ここで $c(\sigma)$ は σ の cycle の個数．）

5： 問題

証明は終ったが，残りの紙数を使って，問題を提出しておこう．必ずしも意味のあるものとは限らないかも知れないが当然考えられるものである．但し，筆者は充分吟味した訳ではない．

［1］ 同様の論法が別の b-函数（及び Shimura の b-函数）に使えるか？ 特に Gårding の例など．または［HU］の中の multiplicity-free action の例など

［2］ Cayley の公式の q-analogue に対して，組合せ論的な解釈も含めて拡張できるか？ 特に有限体上のベクトル空間の写像の個数との関連．

［3］ Capelli 恒等式の組合せ論的証明．さらに［HU］の中の skew symmetric case について．

以上 （1991年 1月 25日）

BIBLIOGRAPHY

[Ca1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Annalen **29** (1887), 331–338.

[Ca2] ——, *Ricerca delle operazioni invariantive fra piu serie di variabili permutabili con ogni altra operazione invariantiva fra le stesse serie*, Atti delle Scinze Fis. e Mast. di Napoli **(2) I** (1888), 1–17.

[Ca3] ——, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Annalen **37** (1890), 1–37.

[HU] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli Identity, the Double Commutant Theorem, and Multiplicity-Free Actions*, preprint 1990.

[G] L. Gårding, *Extension of a formula by Cayley to symmetric determinants*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 73–75.

[GY] J.H. Grace and A. Young, *The Algebra of Invariants*, Cambridge University Press, 1902.

[K] T. Kimura, *The theory of prehomogeneous vector spaces*, (in Japanese), Sugaku **32** (1980), 97–118.

[KS] B. Kostant and S. Sahi, *Capelli identity, tbe domains and the generalizesd Laplace transform*, preprint 1989 Dec..

[Ra] M. Raïs, *Distributions homogènes sur des spaces de matrices*, (Thèse Sc. math. Paris, 1970), Bull. Soc. math. France, Mémoire **30** (1972), 1–109.

[RS] H. Rubenthaler and G. Schiffmann, *Opérateurs différantiels de Shimura et espace préhomogènes*, Invent. math. **90** (1987), 409–442.

[S] M. Sato, *The theoy of prehomogeneous vector spaces*, notes by T. Shintani (in Japanese), Sugaku no Ayumi **15–1** (1970), 85–157.

[Sh] G. Shimura, *On differential operators attached to certain representations of classical groups*, Invent. math. 77 (1984), 463–488.

[T1] H.W. Turnbull, *The Theory of Determinants, Matrices, and Invariants*, Dover, 1960.

[T2] ——, *Symmetric determinants and the Cayley and Capelli operators*, Proc. Edinburgh Math. Soc. Ser. 2 **8** (1947), 76–86.

[W] H. Weyl, *The Classcal Groups, their Invariants and Representations*, Princeton University Press, 1946.