数理解析研究所講究録
第768巻 1991年 114-123

有限数列と単体的複体の組合せ論

日比孝之 (北海道大学 理学部)
Takayuki Hibi

序. 昨今の'数え上げ'の組合せ論における重要な研究対象として, 単体的複体の面の数え上げ, および凸多面体に含まれる格子点の数え上げが挙げられる. 前者はEulerの公式 $v-e+f=2$ に, 後者はMinkowskiらの「数の幾何」に源を有し, いずれも伝統的な話題であるが, 近年, この両者と可換環論や代数幾何との著しい相互関係が明らかになり, 現在, 欧米諸国では活気に満ちた研究活動が展開されている. 本講では, 前者の話題を扱い, 現状を概観したい (cf. [B-K]).

a) 単体的複体の f-列

頂点集合と呼ばれる有限集合 V 上の単体的複体とは, V の部分集合の集合で, 条件 (i) $\{v\} \in \Delta$ $(\forall v \in V)$ および (ii) $\sigma \in \Delta$, $\tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in \Delta$ を満たすものであった.

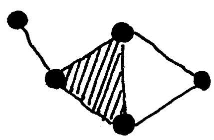
各$\sigma\in\Delta$はΔの面と呼ばれる。いま$d:=\max\{\#(\sigma);\sigma\in\Delta\}$と置き、$\Delta$の次元を$\dim\Delta:=d-1$と定義する。更に、$f_i=f_i(\Delta):=\#\{\sigma\in\Delta;\#(\sigma)=i+1\}$ $(0\leqq i<d)$とし、$f(\Delta):=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$を$\Delta$の$f$-列と呼ぶ。また、単体的複体$\Delta$が純であるとは、$\sigma$が$\Delta$の極大面であれば$\#(\sigma)=d$が成立するときを言う。便宜上、$\Delta$の$f$-列$f(\Delta)=(f_0,f_1,\cdots,f_{d-1})$から、公式

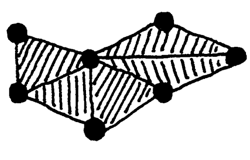
$$\sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(x-1)^{d-i}=\sum_{i=0}^{d} h_i x^{d-i}$$

で（$f_{-1}=1$と置く）Δのh-列$h(\Delta):=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$を定義する。すると、

$$h_0=1,\quad h_1=\#(V)-d,\quad f_{d-1}=\sum_{i=0}^{d} h_i$$

である。


図－1


図－2

周知のように、単体的複体Δには幾何学的実現と呼ばれる図形$|\Delta|$が対応する。たとえば$d=3$とし、図-1および図-2の単体的複体（の幾何学的実現）を考えると、それらのf-列は$(5,6,1)$、$(7,11,5)$、h-列は$(1,2,-1,-1)$、$(1,4,0,0)$となる。もちろん図-2は純であるが、図-1は純ではない。

他方，体kを係数とするΔのi-次元被約homology群を$\tilde{H}_i(\Delta;k)$で表し，$\beta_i=\beta_i(\Delta;k):=\dim_k\tilde{H}_i(\Delta;k)$とし，$\beta(\Delta;k)=(\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_{d-1})$を$\Delta$のBetti数と呼ぶ。

我々の研究課題は，単体的複体の著名な類が与えられたとき，その類に属する単体的複体から生起するf-列の組合せ論的特徴付けを探せ——という極めて明確なものである。もちろんf-列を知ることとh-列を知ることは，原理的には，同値である。以下，そのような考察の対象となる単体的複体の類の幾つかを挙げながら既知の結果を紹介したい。

記号の準備であるが，正の整数fとiが与えられたとき，

$$f=\binom{n_i}{i}+\binom{n_{i-1}}{i-1}+\cdots+\binom{n_j}{j}$$
$$n_i>n_{i-1}>\cdots>n_j\geq j\geq 1$$

なる表示が一意的に存在する。このとき

$$f^{(i)}:=\binom{n_i}{i+1}+\binom{n_{i-1}}{i}+\cdots+\binom{n_j}{j+1}$$
$$f^{\langle i\rangle}:=\binom{n_i+1}{i+1}+\binom{n_{i-1}+1}{i}+\cdots+\binom{n_j+1}{j+1}$$

と定義し，更に$0^{\langle i\rangle}=0$と置く。

b) Kruskal-Katonaの定理

まず，Kruskal [Kru] と Katona [Kat] によって独立に得られた，任意の $d-1$ 次元単体的複体から得られる f-列の組合せ論的特徴付けを述べる。

<u>定理</u> (Kruskal-Katona) 与えられた正の整数を成分とする数列 $(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ に対し $d-1$ 次元単体的複体 Δ で $f(\Delta)=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ となるものが存在するための必要十分条件は $f_{i+1} \leqq f_i^{(i+1)}$ $(0 \leqq {}^\forall i < d-1)$ となることである。

なお，Greene-Kleitman [G-K] は上記の定理とその周辺の話題の優れた survey paper である。

c) 純な単体的複体

純な単体的複体の f-列の特徴付けは，現在の所，まだ得られていないと信じる。ただし，

<u>定理</u> ([H_1]) 純な $d-1$ 次元単体的複体 Δ の f-列 $f(\Delta)=(f_0, f_1, \cdots, f_{d-1})$ は不等式

(i) $f_i \leqq f_{(d-2)-i}$,　$0 \leqq {}^\forall i \leqq [(d-2)/2]$

(ii) $f_0 \leqq f_1 \leqq \cdots \leqq f_{[(d-1)/2]}$

を満たす。

d) Cohen-Macaulay単体的複体

可換環論, 組合せ論そして位相幾何学を結び付ける虹の掛け橋がCohen-Macaulay複体[Sta_1]である。なお, Cohen-Macaulay複体は可換環論的に, また位相幾何学的に定義することが可能である(Reisner[Rei])が, 以下では, 簡単のため, 後者の定義を採用する。

単体的複体Δが体k上Cohen-Macaulayであるとは, Δの任意の面 σ ($\sigma = \emptyset$も含む)に対し

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma); k) = 0 \quad , \quad \forall i < \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))$$

が成立することである。ただし,

$$\mathrm{link}_\Delta(\sigma) := \{\tau \in \Delta \,;\, \sigma \cap \tau = \emptyset, \sigma \cup \tau \in \Delta\}$$

である。たとえばΔの幾何学的実現が球面や球体であれば, Δは任意の体上Cohen-Macaulayである。また, Cohen-Macaulay複体は純である。

さて, [Sta_2]で述べられている次の定理は, 本質的には, Macaulay[Mac]で既に得られている。

定理 (Macaulay-Stanley) 与えられた整数の数列 $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ に対し $d-1$ 次元 Cohen-Macaulay 単体的複体 Δ で $h(\Delta)=(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ となるものが存在するための必要十分条件は (i) $h_0=1$ かつ (ii) $0 \leqq h_{i+1} \leqq h_i^{\langle i \rangle}$ $(1 \leqq {}^\forall i < d)$ となることである。

可換環論の観点から Cohen-Macaulay 複体を扱ったsurvey paper として [Hoc], [Sta 4], または $[H_3]$, $[H_4]$ がある。

e) matroid 複体

頂点集合 V 上の単体的複体 Δ が matroid 複体であるとは,

(i) $\sigma, \tau \in \Delta$, $\#(\sigma) < \#(\tau)$ ならば $\sigma \cup \{v\} \in \Delta$ となる $v \in \tau - \sigma$ が存在する,

(ii) $\dim(\Delta - v) = \dim \Delta$, ${}^\forall v \in V$, ただし $\Delta - v := \{\sigma \in \Delta ; v \notin \sigma\}$ である

なる条件が満たされるときを言う。

たとえば, V が線型空間の非零な元の有限集合で, V が張る部分空間と $V-\{v\}$, ${}^\forall v \in V$, が張る部分空間が一致すると仮定し, Δ を V の線型独立な部

分集合の全体とするとΔはmatroid複体となる。

Björnerなどの組合せ論家がmatroid複体のf-列に興味を持っているとのことであるが、現状では、matroid複体のf-列の組合せ論的特徴付けを探すことは、ちょっと無理な気がする。ただし、Cohen-Macaulay環の規準idealの理論を使うと、次の定理が得られる。

定理([H_2]) 次元$d-1$のmatroid複体Δのh-列$h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$に対し線型不等式

$$h_0+h_1+\cdots+h_i \leqq h_d+h_{d-1}+\cdots+h_{d-i} \quad (0\leqq {}^\forall i\leqq d)$$

が成立する。

予想 次元$d-1$のmatroid複体Δのh-列を$h(\Delta)=(h_0,h_1,\cdots,h_d)$とせよ。このとき

(i) $h_i \leqq h_{d-i} \quad (0\leqq {}^\forall i\leqq [d/2])$

(ii) $h_0\leqq h_1\leqq\cdots\leqq h_{[d/2]}$

が成立する。

f) 球面の三角形分割

球面の三角形分割のh-列の組合せ論的特徴付けに関しては"球面版McMullen g-予想"と呼ばれるものがあっ

たが、[B-L], [Sta_3]から約10年が経過した1990年7月にKalaiが終止符を打った。

<u>定理</u>(Kalai) 与えられた整数の数列 $(h_0, h_1, \cdots, h_d)$ に対し $d-1$ 次元単体的複体 Δ で

(i) $h(\Delta) = (h_0, h_1, \cdots, h_d)$

(ii) $|\Delta| \simeq$ $d-1$ 次元球面

となるものが存在するための必要十分条件は

(i) $h_0 = 1$

(ii) $h_i = h_{d-i}$, $0 \leqq {}^\forall i \leqq d$

(iii) $0 \leqq h_{i+1} - h_i \leqq (h_i - h_{i-1})^{<i>}$, $0 \leqq {}^\forall i < [d/2]$

が成立することである。

球面の三角形分割の h-列に関しては [Sta_5] が妥当な survey paper である。

9) Buchsbaum複体のBetti数列

単体的複体 Δ が体 k 上 Buchsbaum であるとは、$\phi \neq {}^\forall \sigma \in \Delta$ に対し

$$\tilde{H}_i(\mathrm{link}_\Delta(\sigma); k) = 0 \ , \quad {}^\forall i < \dim(\mathrm{link}_\Delta(\sigma))$$

が成立し，更に△が純であるときを言う。Buchsbaum複体のh-列に関しては[Sch]などの結果があるが，組合せ論的特徴付けを探すことは将来の課題である。ただし，Buchsbaum複体のBetti数列の振舞については次の定理がある。

<u>定理</u>([B-H]) 与えられた任意の非負整数から成る数列$(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{d-1})$に対し$d-1$次元単体的複体△で条件「任意の体$k$上△はBuchsbaumであって，しかも$\beta(\Delta; k) = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{d-1})$が成立する」を満たすものが存在する。

参考文献

[B-H] A. Björner and T. Hibi, Betti numbers of Buchsbaum complexes, Math. Scand., to appear.

[B-K] A. Björner and G. Kalai, On f-vectors and homology, in "Combinatorial Mathematics," Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 555, 1989, pp. 63-80.

[B-L] L. Billera and C. Lee, A proof of the sufficiency of McMullen's conditions for f-vectors of simplicial convex polytopes, J. Combin. Theory, Ser. A 31 (1981), 235-255.

[G-K] C. Greene and D. Kleitman, Proof techniques in the theory of finite sets, in "Studies in Combinatorics" (G.-C. Rota, ed.), The Mathematical Association of Ameraca, Washington, D. C., 1978, pp. 22-79.

[H_1] T. Hibi, What can be said about pure O-sequences ?, J. Combin. Theory Ser. A 50 (1989), 319-322.

[H_2] _____, Face number inequalities for matroid complexes and Cohen-Macaulay types of Stanley-Reisner rings of distributive lattices, preprint (January, 1991).

[H_3] _____, 有限数列と可換環, 第 6 回可換環論研究集会報告集（１９８４年）.

[H_4] _____, An invitation to enumerative combinatorics via commutative algebra, 数理解析研究所講究録第６４１巻（１９８８年）.

[Hoc] M. Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory II" (B. R. McDonald and R. Morris, eds.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No. 26, Dekker, New York, 1977, pp. 171-223.

[Kat] G. Katona, A theorem for finite sets, in "Theory of Graphs" (P. Erdős and G. Katona, eds.), Academic Press, New York, 1968, pp. 187-207.

[Kru] J. Kruskal, The number of simplices in a complex, in "Mathematical Optimization Techniques" (R. Bellman,ed.), Univ. of California Press, Berkeley/Los Angeles, 1963, pp. 251-278.

[Mac] F. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular system, Proc. London Math. Soc. 26 (1927), 531-555.

[Rei] G. Reisner, Cohen-Macaulay quotionts of polynomial rings, Advances in Math. 21 (1976), 30-49.

[Sch] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, Math. Z. 178 (1981), 125-142.

[Sta_1] R. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen-Macaulay rings, Stud. Appl. Math. 54 (1975), 135-142.

[Sta_2] _____, Cohen-Macaulay complexes, in "Higher Combinatorics (M.Aigner, ed.), NATO Advanced Study Institute Series, Reidel, Dordrecht/Boston, 1977, pp. 51-62.

[Sta_3] _____, The number of faces of a simplicial convex polytope, Advances in Math. 35 (1980), 236-238.

[Sta_4] _____, "Combinatorics and Commutative Algebra," Birkhäuser, Boston/Basel/ Stuttgart, 1983.

[Sta_5] _____, The number of faces of simplicial polytopes and spheres, in "Discrete Geometry and Convexity," Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 440, 1986, pp. 212-223.