数理解析研究所講究録
第768巻 1991年 146-159

「N-stable flags 全体」の affine 空間分割と「length と charge の対称性」の一般化

東大・理　　寺田　至
(91-04-01より東大・教養)

1. イントロダクション.

J. Matsuzawa (京大・理) は 1990 年 8 月に名古屋で行われた「可換代数と組合せ論」国際会議において (また古くは 1986 年 Arcata で行われた AMS Summer Institute において) 二つの variety の Poincaré 多項式の"同時 q-analogue" というべき 2 変数多項式 $G_\mu(t,q)$ を導入した。ここで μ はある自然数 n の分割 (partition) である。すなわち $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_l)$, $\mu_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ であって $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots\geq\mu_l$, $\sum_{i=1}^{l}\mu_i=n$ を満たすものとする。このとき $G_\mu(t,q)$ は次のように定義される:

$$G_\mu(t,q)=\sum_{\lambda\vdash n}\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)\widetilde{K}_{\lambda(1^n)}(t).$$

ここで $\lambda\vdash n$ は λ が n の分割であることを表す記号である。$\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)$, $\widetilde{K}_{\lambda(1^n)}(t)$ は Kostka-Foulkes 多項式と呼ばれる多項式である (§2 参照)。

$G_\mu(t,q)$ が二つの variety の Poincaré 多項式の"同時 q-analogue" というべきものだというのは、次の 2 式が成立するという意味である:

$$G_\mu(1,q)=P_{\mathcal{B}_N}(q^{\frac{1}{2}}), \tag{1.1}$$

$$G_\mu(t,1)=P_{\mathcal{P}_\mu}(t^{\frac{1}{2}}). \tag{1.2}$$

ここで右辺はそれぞれ、すぐ下で説明する variety $\mathcal{B}_N$ 及び $\mathcal{P}_\mu$ の Poincaré 多項式に $t^{\frac{1}{2}}$, $q^{\frac{1}{2}}$ を代入したものを表す。これらの Poincaré 多項式には偶数次の項しかなく、$t^{\frac{1}{2}}$, $q^{\frac{1}{2}}$ を代入したものは多項式になるのである。

まず2つの variety に共通に関係する flag の概念を復習しよう。ここでは単に $\mathbb{C}^n$ の flag といったら、$\mathbb{C}^n$ の部分空間の組 $(V_0, V_1, V_2, \ldots, V_r)$ であって $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r = \mathbb{C}^n$ を満たすものを言うことにする。すなわち $\mathbb{C}^n$ の flag とは、$\mathbb{C}^n$ の部分空間全体が包含関係に関してなす poset における chain で、最小元が 0 で最大元が $\mathbb{C}^n$ であるもののことである。$\mathbb{C}^n$ の flag $(V_0, V_1, \ldots, V_r)$ のうち、$r = n$ で $\dim V_i = i\ (0 \leq i \leq r)$ となっているものを特に complete flag という。chain のことばでいえば saturated chain である。そして $\mathbb{C}^n$ の complete flag 全体のなす variety を $\mathcal{B}$ と書いて flag variety という。

さて (1.1) においては Jordan type が μ であるような $n \times n$ のベキ零行列 N を fix する。$\mathcal{B}_N$ は N-stable な complete flag (すなわち $NV_i \subset V_i\ (0 \leq i \leq n)$ であるもの) 全体のなす variety である。μ を固定するとき、そのような N はすべて $GL(n, \mathbb{C})$ の共役による作用で移りあうから、$\mathcal{B}_N$ は N のとりかたによらず同型であり、その Poincaré 多項式 $P_{\mathcal{B}_N}$ は μ のみで定まる。一方 (1.2) において $\mathcal{P}_\mu$ は $\mathbb{C}^n$ の flag $(V_0, V_1, V_2, \ldots, V_l)$ (l は partition μ の項の個数) であって $\dim V_i = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_i\ (1 \leq i \leq l)$ であるもの全体のつくる variety を表す。

この講演ではまず、(1.1) において $H^{2i}(\mathcal{B}_N, \mathbb{C})$ を Springer 表現と呼ばれる $\mathfrak{S}_n$ の表現空間と見ると、$\mathfrak{S}_n$ の表現に対して定義されるある種の「次元の q-analogue」(この場合は記法の都合上 t-analogue) を用いると $G_\mu(t, q)$ 自体が次のように表示されることを示す。

定理 1. $G_\mu(t, q) = \sum_i t\text{-}\dim H^{2i}(\mathcal{B}_N, \mathbb{C}) q^i$.

ここで t-dim が上で述べた次元の t-analogue である (§3 参照) 。これは一応定理と書くが、定義と知られている事実から容易に導かれることである。

さて、周知のように flag variety $\mathcal{B}$ は、$\mathfrak{S}_n$ の元によって parametrize された Schubert cell X_w と呼ばれる cell の disjoint union に分割される (§5 参照) 。一方、N-stable flag の全体 $\mathcal{B}_N$ にも、N. Spaltenstein ([Sp]) 及び R. Hotta, N. Shimomura ([HoShi], [Shi]) による affine 空間への分割があり、各 affine piece の基本類の dual basis をとることにより Springer 表現の表現空間 $H^{2i}(\mathcal{B}_N, \mathbb{C})$ の基底が得られる。(この基底に関する表現行列を完全に決める問題は、top degree に限っても未解決だそうである。Springer 表現の定義については例えば [Sho] などに解説がある。そこでは $\mathcal{B}_N$ は標数 p の代数的閉体上で定義され、Springer 表現は l-adic cohomology と呼ばれる cohomology 群の上に定義されているが、$\mathbb{C}$ 上定義された $\mathcal{B}_N$ の通常の cohomology 群上の表現も同様の方法で定義される。)

ここでこれらの $\mathcal{B}_N$ の affine 空間分割と、$\mathcal{B}$ の Schubert cell 分解 (§5 参照) との関係をきちんと調べてみると、N を特別な形に取った場合には $\mathcal{B}_N$ の affine piece は $\mathcal{B}$の Schubert cell と $\mathcal{B}_N$ の共通部分として得られることがわかる (§5, 定理 2) 。この関係によって、上で述べた $H^{2i}(\mathcal{B}_N, \mathbb{C})$ の basis は $\mathfrak{S}_n$ のある部分集合 R_μ によって自然に parametrize されることがわかる。(Schubert cell と $\mathcal{B}_N$ の共通部分が空になることもあるので、R_μ は $X_w \cap \mathcal{B}_N \neq \emptyset$ であるような w の集合である。)

ここでさらに Springer 表現に関する N. Spaltenstein 及び G. Lehrer と T. Shoji, あるいは古くは R. Borho と R. MacPherson の結果を用いると、$G_\mu(t,q)$ は次のような組合せ論的表示を持つことがわかる:

定理 3. $G_\mu(t,q) = \sum_{w \in R_\mu} q^{l_\mu(w)} t^{\mathrm{MAJ}(w)}$.

ここで l_μ 及び MAJ は $R_\mu \to \mathbb{Z}_{>0}$ なる関数である。l_μ は $w \in R_\mu$ に対応する $\mathcal{B}_N$ の affine piece の次元であるが、w から図によって簡単に求められる (§5 参照) 。($\mathcal{B}_N$ の affine piece の次元のこのような求め方は既知のものを少し整理したにすぎない。) また MAJ は組合せ論で古くから研究されている $\mathfrak{S}_n$ 上の関数である major index (greater index とも呼ばれる) を単に R_μ に制限したものであるが、この部分が Springer 表現に関する上の人たちの結果を用いるところである。(major index については例えば [St, §4.5, p. 216] 参照。)

特に $\mu = (1^n)$ の場合 $\mathcal{B}_N$ は flag variety $\mathcal{B}$ と一致し、上の意味の affine piece は Schubert cell に一致する。R_μ は $\mathfrak{S}_n$ 全体であり、l_μ は対称群の length function (転倒数) と一致する。従って上の定理 3 は次の形になる。

$$\sum_{\lambda \vdash n} K_{\lambda(1^n)}(q) K_{\lambda(1^n)}(t) = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{l(w)} t^{\mathrm{MAJ}(w)}$$

これは D. Foata と M.-P. Schützenberger によって組合せ論的に証明された length とMAJ の対称性を表す式である ([FSc] 参照) 。従って定理 3 は length と MAJ または length と charge の対称性の一般化になっている。(w の charge とはMAJ$(w_0 w^{-1} w_0)$ (w_0 は $\mathfrak{S}_n$ の最長元) に等しい。$l(w_0 w^{-1} w_0) = l(w)$ であるから、length と MAJ の対称性は length と charge の対称性と同値である。) length と charge の対称性に対しては私も以前一つの証明を与えたが ([T], unpublished) 、H. Naruse 氏が $\mathfrak{S}_n$ の $H^{2i}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ 上の表現を用いて別証明を与え、さらに $\mathcal{B}_N$ の affine 空間分割に関して suggestion を与えた。この講演で紹介した内容は、その idea を実践したものである。

2. Kostka-Foulkes 多項式.

まず $\lambda, \mu \vdash n$ に対して定義される Kostka-Foulkes 多項式 $K_{\lambda\mu}(t)$ について説明する。上に出てきた $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(t)$ との関係もすぐ下で述べる。

$K_{\lambda\mu}(t)$ は本来 $GL(n, \mathbb{C})$ の root 系を用いて、他の root 系にも拡張できる形で定義される ([Mac, Ex. III.6.4] 参照) が、ここではそれは省略し、代わって $K_{\lambda\mu}(t)$ を Young tableau を用いて計算する方法を紹介する。これは A. Lascoux と M.-P. Schützenberger によって与えられたものである ([Mac, §III.6], [LaSc], [Sc] 参照) 。以下では [Mac, §III.6] の記法に従う。

定義. [semistadard tableau] λ, $\mu \vdash n$ とする。$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$ と書くとき l を λ の長さといい $l(\lambda)$ で表す。Fig. 1 のように、第 i 行に λ_i 個の自然数 $T(i,1)$, $T(i,2)$, $\dots$, $T(i,\lambda_i)$ を行の左端を揃えて並べたもの $T = (T(i,j))_{1\le j\le\lambda_i,\ 1\le i\le l(\lambda)}$ を shape λ の (Young) tableau という。これが特に

$$T(i,1) \le T(i,2) \le \dots T(i,\lambda_i) \qquad (1 \le i \le l(\lambda)),$$
$$T(1,j) < T(2,j) < \dots < T(\lambda'_j, j) \qquad (1 \le j \le \lambda_1)$$

を満たすとき **semistandard** であるという。(ここで λ'_j は λ の項 λ_i のうち大きさが j 以上のものの個数を表す。) tableau T と自然数 k に対し、$T(i,j) = k$ であるような (i,j) の個数を σ_k と書くとき、数列 $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ を T の **weight** という。λ, $\mu \vdash n$ のとき、shape が λ で weight が μ の semistandard tableau 全体の集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda;\mu)$ で表す。

2	7	11	5
3	3	1	8
4	2		
6			

(semistandard でない)

1	1	3	9
2	3	5	10
4	4		
7			

(semistandard)

Fig. 1. shape $(4,4,2,1)$ の tableau の例

定義. [charge] (A. Lascoux, M.-P. Schützenberger) $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda;\mu)$ に対し T の定める

word w_T とは、T の中身を次の順で並べたものをいう:

$$T(1,\lambda_1)\,T(1,\lambda_1-1)\,\cdots\,T(1,1)\,T(2,\lambda_2)\,T(2,\lambda_2-1)\,\cdots\,T(2,1)\,\cdots$$
$$\cdots\,T(l,\lambda_l)\,T(l,\lambda_l-1)\,\cdots\,T(l,1).$$

ただし $l=l(\lambda)$ である。

この w_T から次のようにして μ_1 個の words $w_T^{(1)}, w_T^{(2)}, \ldots, w_T^{(\mu_1)}$ を作る。まず w_T を左端から右へ見ていったとき最初にぶつかる 1 に印をつける。次にその 1 の右どなりから出発して右に見ていき、最初にぶつかる 2 に印をつける。ただしこのとき途中で word の右端に達してしまったら、左端に戻って続けて探す。したがって印をつけた 1 の右側に 2 がない場合は最も左にある 2 に印がつくことになる。続いて印をつけた 2 の右どなりから出発して右に 3 を探し、右端に達したら左端に戻って続ける。以下同様にして一番大きな数 $l(\mu)=\mu'_1$ まで印をつける。このとき印のついている 1 から μ'_1 までを w の中で並んでいる順番に取り出してできる長さ μ'_1 の word を $w_T^{(1)}$ とおく。こんどはいま印をつけて取り出した数を全部 w_T から消して詰めてできる word に対して同じ操作を行うと、1 から μ'_2 までを一つずつ含む word ができる。これを $w_T^{(2)}$ とおく。これを繰り返していくと、$w_T^{(\mu_1)}$ までの μ_1 個の word ができる。

$w_T^{(j)}$ は 1 から μ'_j までの自然数を一つずつ含む word であるが、この **charge** $c(w_T^{(j)})$ を

$$c(w_T^{(j)})=\sum\{\,n-i \mid 1\le i\le \mu'_j-1,\ i+1 \text{ は } w_T^{(j)} \text{ 中 } i \text{ より左にある}\,\}$$

で定義する。

このとき、w_T の **charge** $c(w_T)$ および T の **charge** $c(T)$ を

$$c(T)=c(w_T)=\sum_{j=1}^{\mu_1} c(w_T^{(j)})$$

で定める。

定理 (A. Lascoux, M.-P. Schützenberger). $\lambda, \mu \vdash n$ に対して $K_{\lambda\mu}(t)$ は次のように表される:

$$K_{\lambda\mu}(t)=\sum_{T\in \mathrm{SSTab}(\lambda;\mu)} t^{c(T)}.$$

注意. 特に $K_{\lambda\mu}(t)$ の各次数の係数は非負整数。

$G_\mu(t,q)$ に出てくる $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)$ はこれと次の関係にある。

定義. $\lambda,\,\mu \vdash n$ のとき $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q) := q^{n(\mu)}K_{\lambda\mu}(q^{-1})$ とおく。ここで $n(\mu) = \sum_{i=1}^{l(\mu)}(i-1)\mu_i$ である。

ここで用いる Kostka-Foulkes 多項式の性質をまとめておく。

性質 (1). $K_{\lambda\mu}(1) = \widetilde{K}_{\lambda\mu}(1) = K_{\lambda\mu}$, ここで $K_{\lambda\mu}$ は Kostka 数と呼ばれるもので、集合 SSTab($\lambda;\mu$) の元の個数に等しく、$GL(n,\mathbb{C})$ の多項式既約表現で highest weight が λ のものにおける weight μ の重複度に等しい。([Mac, §III.6], [Mac, §I.5] 参照)

性質 (2). $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q) = \sum_i \left\langle H^{2i}(\mathcal{B}_N,\mathbb{C}), V_\lambda \right\rangle_{\mathfrak{S}_n} q^i$. ここで $H^{2i}(\mathcal{B}_N,\mathbb{C})$ はいわゆる Springer 表現によって $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-module と見ている。Springer 表現には二通りあって、その両者の間には signature character だけの違いがあるが、ここでは trivial 表現が H^0 に現れるほうを考える。V_λ は分割 λ に対応する既約 $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-module を表すものとする。また $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{S}_n}$ は $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-module の間の intertwining number を表すものとする。([Mac, Ex. III.7.9] 参照。ただしそこで引用されている Springer 表現はここでいっているものと signature 分だけ異なる。)

性質 (3). 特に $\mu = (1^n)$ のとき $\widetilde{K}_{\lambda(1^n)}(t) = t\text{-}\dim V_\lambda$ (t-dim は下で定義する次元の t-analogue)。

3. $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-module の nice basis と t-dim.

性質 (1) にある通り、$\widetilde{K}_{\lambda,(1^n)}(1) = \dim V_\lambda$ であるから $\widetilde{K}_{\lambda,(1^n)}(t)$ は V_λ の次元の q-analogue (ここでは記号の都合で t-analogue) であるといえるが、どういう t-analogue であるかを記述する一つの方法を与えるために nice basis を定義する。

定義. [nice basis] (ρ, V) を $\mathfrak{S}_n$ の $\mathbb{C}$ 上の表現($\dim V < \infty$), $s_j = (j, j{+}1)$ $(1 \le j \le n{-}1)$ を隣接互換 ($\mathfrak{S}_n$ の Coxeter 群としての generator) とする。

(1) V の basis $\{e_k\}_{k\in K}$ が **nice** であるとは、各 generator s_j $(1 \le j \le n-1)$ に対して K の subset K_j が存在して、$\rho(s_j)$ の fixed point subspace がちょうど $e_k,\ k \in K_j$ で張られることをいう。

Fact. 任意の (ρ, V) に対し、V の nice basis が存在する。(このことは W-graph の存在から導かれる。)

(2) $\{e_k\}_{k\in K}$ を V の nice basis とするとき、$t\text{-dim}V=\sum_{k\in K} t^{\sum\{j|k\notin K_j\}}$ とおく。

注意. 右辺が nice basis の取り方によらないことは容易にわかる。また、t-dim は V に関して加法的である。

4. $G_\mu(t,q)$ の $P_{\mathcal{B}_N}(q^{\frac{1}{2}})$ の t-analogue としての表示.

以上から冒頭の定理 1 の表示が容易に得られる。

定理 1 の証明: 右辺の $\sum_i t\text{-dim}H^{2i}(\mathcal{B}_N,\mathbf{C})q^i$ において $H^{2i}(\mathcal{B}_N,\mathbf{C})$ を既約表現に分解すると $\sum_i\sum_\lambda\langle H^{2i}(\mathcal{B}_N,\mathbf{C}),V_\lambda\rangle_{\mathfrak{S}_n} t\text{-dim}V_\lambda q^i$ となる。ここで $t\text{-dim}V_\lambda$ は上の性質 (3) により $\widetilde{K}_{\lambda(1^n)}(t)$ に等しく、それにかかる q の多項式は性質 (2) により $\widetilde{K}_{\lambda\mu}(q)$ に等しい。∎

5. $\mathcal{B}_N$ の affine 空間分割と Schubert cell の関係.

$\mathbf{C}^n$ の complete flag の全体 $\mathcal{B}$ は、次のように affine 空間と同型な locally closed subsets に分解される:

$$\mathcal{B}=\coprod_{w\in\mathfrak{S}_n} X_w,\qquad X_w\approx\mathbf{C}^{l(w)}\quad(w\in\mathfrak{S}_n). \tag{5.1}$$

ここで $\approx$ は variety の同型を表す。また $l(w)$ の l は partition の長さとは違って対称群の length function であり、$\#\{(i,j)\mid 1\le i<j\le n,\ w(i)>w(j)\}$ に等しい。実際には (5.1) は cell 分割であって、X_w は Schubert cell と呼ばれる。

Schubert cell について少し復習しよう。(このあたりの survey はたとえば [H] にある。) $\mathbf{C}^n$ の complete flag $F=(V_0,V_1,V_2,\dots,V_n)$ に対し、$(v_1,v_2,\dots,v_n)$ が F の basis であるとは、各 $i=1,2,\dots,n$ に対して $v_1, v_2,\dots,v_i$ が V_i の basis であることをいうことにする。F を $\mathbf{C}^n$ の complete flag とするとき、次を満たす $\mathfrak{S}_n$ の元 w と F の basis $(v_1,v_2,\dots,v_n)$ がただ一つ定まる:

$$v_j=e_{w(j)}+\sum_{\substack{i<w(j)\\ i\neq w(1),\dots,w(j-1)}} c_{ij}e_i\qquad(c_{ij}\in\mathbf{C}) \tag{5.2}$$

ここで $e_i = (0, \ldots, 0, \overset{i}{\breve{1}}, 0, \ldots, 0)$ $(1 \le i \le n)$ とする。(ここがポイントであり、すべての内容がこの1点に凝縮されているが、チェックはすべて線型代数の問題。) $F \in \mathcal{B}$ によって決まるこのような $w \in \mathfrak{S}_n$ を $w(F)$ と書くことにすれば、各 $w \in \mathfrak{S}_n$ に対し、X_w とは:

$$X_w = \{ F \in \mathcal{B} \mid w(F) = w \} \qquad (w \in \mathfrak{S}_n)$$

と定義される。また $w \in \mathfrak{S}_n$ を fix するとき、

$$X_w \ni F \longleftrightarrow (c_{ij})_{i<w(j), w^{-1}(i)>j} \in \mathbb{C}^{l(w)}$$

なる対応が Schubert cell X_w と affine 空間 $\mathbb{C}^{l(w)}$ との同型を与える。

さて、N-stable complete flag の全体 $\mathcal{B}_N$ は $\mathcal{B}$ の closed subvariety であり、N. Spaltenstein 及び R. Hotta と N. Shimomura により affine 空間と同型ないくつかの locally closed subvariety に分割されることが示されている。ここで自然に生ずる問題として次のことを考えてみる。

問題. $\mathcal{B}$ の Schubert cell を用いて N-stable complete flag の全体を

$$\mathcal{B}_N = \coprod_{w \in \mathfrak{S}_n} X_w \cap \mathcal{B}_N$$

と分割したとき、$X_w \cap \mathcal{B}_N$ が affine 空間と同型になって Spaltenstein あるいは Hotta-Shimomura の分解を与えるだろうか?

これは Spaltenstein あるいは Hotta-Shimomura 式の $\mathcal{B}_N$ の affine 空間分割に対するもっとも「虫のいい」解釈であるといえる。

結論からいうと、もっとも素朴に N としてふつうの Jordan 標準形を選ぶとこれは成立しないが、N をうまくとれば成立するようにできる。もちろん Jordan type を fix するとき $\mathcal{B}_N$ はすべて同型だが、$\mathcal{B}$ の Schubert cell への分割は実は $\mathcal{B}$ の1点を基準にして定義されている (上の例では $V_i^0 = \bigoplus_{j=1}^{i} \mathbb{C}e_j$ $(0 \le i \le n)$ とおいてできる flag $F^0 = (V_0^0, V_1^0, V_2^0, \ldots, V_n^0)$ を基準にしている) ので、その基準点と N の位置関係が問題になるのである。

基準点を上の通りに固定しておくとき、N として通常の Jordan 標準形をとると、たとえば $\mu = (3, 3)$ ですでに「虫のいい」解釈は成立しなくなる。以下では N として次のよう

に Jordan 標準形を置換行列で変換したものを用いる。これを N_μ で表す。N_μ の取り方は一般の μ に対して記述することができるが、ここでは簡単のため例で示すことにする。

例. (N_μ の決め方) $\mu=(4,4,2,1)$ とする。Fig. 2 のように数字を並べた shape μ の tableau T_μ^0 を作る。これは 1 から n (この例では $n=11$) までの数を、shape が μ になるように「右縦書き」の要領で書いたものである。(この順番を縦書きになぞらえることばづかいは I. Cherednik から拝借した。) このとき $\mathbb{C}^{11}$ 上の nilpotent 線型変換を、各行に着目して下の右のように定める:

$$T_\mu^0 = \begin{array}{cccc} 8 & 5 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 4 & 2 \\ 10 & 7 & & \\ 11 & & & \end{array} \qquad N=N_\mu : \begin{cases} e_8 \mapsto e_5 \mapsto e_3 \mapsto e_1 \mapsto 0 \\ e_9 \mapsto e_6 \mapsto e_4 \mapsto e_2 \mapsto 0 \\ e_{10} \mapsto e_7 \mapsto 0 \\ e_{11} \mapsto 0 \end{cases} .$$

Fig. 2. T_μ^0 のおき方 (例)

このとき $X_{w,N_\mu} = X_w \cap \mathcal{B}_N$ とおくと、次の定理に述べるように $\mathcal{B}_{N_\mu} = \coprod X_{w,N_\mu}$ は Spaltenstein または Hotta-Shimomura 流の分割になる:

定理 2. (1) $X_{w,N_\mu} \neq \emptyset \iff w^{-1}(T_\mu^0)$ が row-decreasing 。ここで $w^{-1}(T_\mu^0)$ は T_μ^0 の各成分 (数) をその w^{-1} による像で置き換えてできる tableau を表す。

$\mathfrak{S}_n$ の中で (1) の条件を満たす元全体を R_μ とおく。

(2) $w \in R_\mu$ のとき X_{w,N_μ} はある次元の affine 空間と同型であり、その次元を $l_\mu(w)$ とおけば、$l_\mu(w)=\sum_{i=1}^n l_\mu{}^{(i)}(w)$, ここで $l_\mu{}^{(i)}(w)$ は $w^{-1}(T_\mu^0)$ 中で Fig. 3 の斜線部にあって i より大きいものの個数、と表される。

注意. (1) 上の定理が成立する N_μ を指定する Jordan 標準形の置換のしかたの規則はもう少し一般的に与えることができる。例えば上の T_μ^0 の代わりに $\begin{smallmatrix} 11 & 7 & 4 & 2 \\ 10 & 6 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & & \\ 8 & & & \end{smallmatrix}$ を用いてもよい。ここではその話は省略する。

(2) $(V_0,V_1,V_2,\dots,V_n) \in \mathcal{B}_N \iff V_1 \subset \mathrm{Ker}N,\ V_2/V_1 \subset \mathrm{Ker}(N_{V/V_1}),\ \dots$ である。N を上の N_μ の形に取れば、$(V_1,V_2,\dots,V_n)$ が上の条件を $V_i/V_{i-1} \subset \mathrm{Ker}(N_{V/V_{i-1}})$ まで満たしているとき (5.2) を満たす $w(1), w(2), \dots, w(i)$ が決まるが、このとき N_{V/V_i} の type

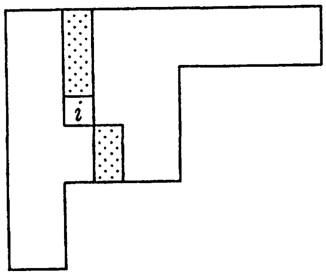

Fig. 3. $l_\mu{}^{(i)}(w)$ の数え方

は T^0_μ から $w(1)$, $w(2)$, ..., $w(i)$ までの数を取り去った図形に対応する partition になる。特に $F = (V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}_N$ のとき N, N_{V/V_1}, N_{V/V_2}, ... の type の列は F の属する Schubert cell のみによって決まっている。これに対し、N として普通の Jordan 標準形を取るとこうはいかない。

(3) $\mathcal{B}_N = \coprod_{w \in R_\mu} X_{w,N_\mu}$ は [DLuP] の意味の α-partition になっている。実際、$\coprod_{\substack{w' \in R_\mu \\ w' \prec w}} X_{w',N}$ ($\prec$ は Bruhat order を表す) は $\mathcal{B}$ の closed subvariety と $\mathcal{B}_N$ の共通部分であるから $\mathcal{B}_N$ 中で closed である。従って、$\mathcal{B}_N$ の cohomology 環の basis として X_{w,N_μ} の基本類の dual basis をとることができる:

$$H^{2i}(\mathcal{B}_N, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{w \in R_\mu \\ l_\mu(w) = i}} \mathbb{C}[X_{w,N_\mu}]^*.$$

(4) $\mu = (1^n)$ のときは $T^0_\mu = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$, $R_\mu = \mathfrak{S}_n$ であり、Fig. 3 の斜線部は i の上部だけであるから、$l_\mu(w) = l(w^{-1}) = l(w)$ であることが確かめられる。

6. parabolic との関係.

$\mathcal{B}$ の cohomology 環 $H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ ($\mathfrak{S}_n$ の $\mathcal{B}$ への作用を通じて $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$-module と見たもの) においては、Schubert cell の基本類の dual basis $\{X^*_w\}_{w \in \mathfrak{S}_n}$ が nice basis になることが次のようにわかった。まず $1 \leq j \leq n-1$ に対して

$$\mathcal{P}^j = \{ (V_0, V_1, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_n) \mid \dim V_i = i,$$
$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_{j-1} \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset V_n \}$$

(すなわち j-次元のところだけとばした flag 全体) とおき、$\mathcal{B}$ から $\mathcal{P}^j$ への自然な射影 $((V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n) \in \mathcal{B}$ の V_j を忘れる写像) を π^j とおく。$\mathcal{P}^j$ は $w \in \mathfrak{S}_n$ のうち $w(j) < w(j+1)$ であるようなものによって parametrize される cell Y_w^j に分割され、$w(j) < w(j+1)$ のとき π^j は $\mathcal{B}$ の Schubert cell X_w を Y_w^j に同型に写している:

$$\mathcal{P}^j = \coprod_{\substack{w \in \mathfrak{S}_n \\ w(j) < w(j+1)}} Y_w^j, \qquad Y_w^j \xleftarrow[\approx]{\pi^j} X_w \approx \mathbb{C}^{l(w)}\ (w(j) < w(j+1) \text{ のとき}).$$

いっぽう、π^{j*} は $H^*(\mathcal{P}^j, \mathbb{C})$ を $H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ の s_j-fixed part に同型に写す:

$$\pi^{j*} : H^*(\mathcal{P}^j, \mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})^{s_j}.$$

従って $H^*(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ の s_j-fixed part は $w(j) < w(j+1)$ を満たす w を index に持つ $[X_w]^*$ でちょうど張られる。これによって t-$\dim H^{2i}(\mathcal{B}, \mathbb{C})$ を計算するのに nice basis として $[X_w]^*$ が使えることがわかる。これが $\mu = (1^n)$ の場合の H. Naruse による証明の方法であった。

この論法が一般の μ の場合 ($H^{2i}(\mathcal{B}_{N_\mu}, \mathbb{C})$ 上の Springer 表現の場合) に使えるかどうか考える。まず

$$\mathcal{P}_{N_\mu}^j = \{ (V_0, V_1, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_n) \in \mathcal{P}^j \mid N_\mu V_i \subset V_i \}$$

とおくと、$\mathcal{P}_{N_\mu}^j$ も $\mathcal{B}_{N_\mu}$ と同様に次のように affine 空間に分割される:

$$\mathcal{P}_{N_\mu}^j = \coprod_{\substack{w \in R_\mu \\ w(j) < w(j+1)}} Y_{w,N_\mu}^j, \qquad \text{ただし } Y_{w,N_\mu}^j = Y_w^j \cap \mathcal{P}_{N_\mu}^j.$$

さらに π^j は $\mathcal{B}_{N_\mu}$ を $\mathcal{P}_{N_\mu}^j$ に写し、とくに 上の分割に現れる w に対して X_{w,N_μ} を Y_{w,N_μ}^j に同型に写す:

$$Y_{w,N_\mu}^j \xleftarrow[\approx]{\pi^j} X_{w,N_\mu} \approx \mathbb{C}^{l_\mu(w)} \qquad (w \in R_\mu \text{ かつ } w(j) < w(j+1) \text{ のとき}).$$

従って $H^*(\mathcal{P}^j_{N_\mu},\mathbb{C})$ の basis として Y^j_{w,N_μ} $(w \in R_\mu,\ w(j) < w(j+1))$ の基本類の dual basis をとることができ、またこのような w に対して π^{j*} は $[Y^j_{w,N_\mu}]^*$ を $[X_{w,N_\mu}]$ に写す:

$$H^*(\mathcal{P}^j_{N_\mu},\mathbb{C}) = \bigoplus_{\substack{w\in R_\mu \\ w(j)<w(j+1)}} \mathbb{C}[Y^j_{w,N_\mu}]^*, \qquad \pi^{j*}: [Y^j_{w,N_\mu}]^* \longmapsto [X_{w,N_\mu}]^*.$$

さらに、N. Spaltenstein 及び G. Lehrer と T. Shoji, あるいは古くは R. Borho と R. MacPherson による次の結果がある。(これらの結果はすべて l-adic cohomology 群に関するものであるが、T. Shoji から個人的にコメントをもらった通り、通常の cohomology 群—singular cohomology—に関する結果も同じ論法で証明できる。)

定理. (上にあげた人たちによる) $H^*(\mathcal{P}^j_{N_\mu},\mathbb{C}) \xrightarrow[\cong]{\pi^{j*}} H^*(\mathcal{B}_{N_\mu},\mathbb{C})^{s_j}$.

7. 定理 3 の証明.

上の定理より、$\{[X_{w,N_\mu}]^*\}_{w\in R_\mu}$ は $H^*(\mathcal{B}_{N_\mu},\mathbb{C})$ の nice basis であり、

$$[X_{w,N_\mu}]^* \in H^*(\mathcal{B}_{N_\mu},\mathbb{C})^{s_j} \iff w(j) < w(j+1)$$

であることがわかる。これを用いると定理 1 の右辺と定理 3 の右辺が等しいことが次のようにわかる。

定理 3 の証明: 定理 1 の右辺と定理 3 の右辺が等しいことを示せばよい。t-dim$H^{2i}(\mathcal{B}_{N_\mu},\mathbb{C})$ を上の nice basis を使って書けば、

$$\text{定理 1 の右辺} = \sum_i \left(\sum_{\substack{w\in R_\mu \\ l_\mu(w)=i}} t^{\sum\{j \mid w(j)\not< w(j+1)\}} \right) q^i$$

となる。$\sum\{j \mid w(j) \not< w(j+1)\} = \mathrm{MAJ}(w)$ に注意すれば、これは

$$= \sum_{w\in R_\mu} q^{l_\mu(w)} t^{\mathrm{MAJ}(w)}$$

となり定理 3 の右辺を得る。∎

8. 関連する問題.

(1) $X_{w,N}$ がすべて affine 空間と同型になるような $N \in \mathcal{B}$ の B-orbit を特徴づけることができるか。

(2) flag variety や Schubert cell, さらに N-stable flag の概念は一般の半単純 Lie 群に対して定義される概念の "A 型の場合" になっている。[DLu]では多くの型に対して "N-stable flag 全体" の affine 空間分割が存在することを示しているが、それらに対してここで述べたような素朴な解釈はどこまで可能か。

(3) "定理 1 の右辺 = 定理 3 の右辺" を Foata-Schützenberger 流に全単射の構成によって証明することができるか。また、Foata-Schützenberger の全単射に幾何学的あるいは表現論的な意味づけを与えることができるか。

(4) t-dim に幾何学的あるいは表現論的な意味づけを与えることができるか。

(5) ν も n の分割とするとき、$\sum_\lambda K_{\lambda\mu}(q)K_{\lambda\nu}(t)$ に組合せ論的な母関数としての意味づけを与えることができるか。(この式も J. Matsuzawa によって指摘されていたもの。またこの問は R. Stanley によっても指摘された。)

(6) 上に関連して、$K_{\lambda\mu}(t)$ を V_λ 内部の量として与えることができるか。

References

[DLuP] C. de Concini, G. Lusztig and C. Procesi, *Homology of the zero-set of a nilpotent vector field on a flag manifold*, J. Amer. Math. Soc. **1** (1988), 15–34.

[Hi] H. Hiller, "Geometry of Coxeter groups," Pitman, Boston/London/Melbourne, 1982.

[HoShi] R. Hotta and N. Shimomura, *The fixed point subvarieties of unipotent transformations on generalized flag varieties and the Green functions*, Math. Ann. **241** (1979), 193–208.

[FSc] D. Foata and M.-P. Schützenberger, *Major index and inversion number of permutations*, Math. Nachr. **83** (1978), 143–150.

[LaSc] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, *Sur une conjecture de H. O. Foulkes*, C. R. Acad. Sci. Paris **286A** (1978), 323–324.

[**LeSho**] G. I. Lehrer and T. Shoji, *On flag varieties, hyperplane complements and Springer representations of Weyl groups*, J. Austr. Math. Soc. Ser. A **49** (1990), 449–485.

[**Mac**] I. G. Macdonald, "Symmetric functions and Hall polynomials," Oxford University Press, Oxford, 1979.

[**Sc**] M.-P. Schützenberger, *Propriétés nouvelles des tableaux de Young*, in "Séminaire Delange-Pisot-Poitou, 19^e année, 1977/8, no. 26," Secrétariat Mathématique, Paris, 1977/8.

[**Shi**] N. Shimomura, *A theorem on the fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 55–64.

[**Sho**] T. Shoji, *Geometry of orbits and Springer correspondence*, in "Proc. special period on unipotent orbits, etc.," Astérisque vol. 168, Société Mathématique de France, Paris, 1988, pp. 61–140.

[**Sp**] N. Spaltenstein, *The fixed point set of a unipotent transformation on the flag manifold*, Proc. Kon. Ak. v. Wet. **79** (1976), 452–456.

[**Sp2**] ———, *On the reflection representation in Springer's theory*, preprint.

[**St**] R. P. Stanley, "Enumerative combinatorics, vol. 1," Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1986.

[**T**] I. Terada, *Symmetry of length and charge in the symmetric group*, unpublished.