

位相ダイナミクス

京都大学 理学部 蔵本 由紀

1. はじめに

場の理論や凝縮系の物理においては、対称性の破れという概念が重要な役割を果たしている。特に、系の連続対称性が破れる場合には、ゴールドストーン・モードと呼ばれる振動数 0 のモードが出現することはよく知られている。たとえば、回転方向が連続的に変化するスピンから成る系においては、臨界温度以下で現れる自発磁化の方向は、どの方向でもよいはずであるが、現実にはそうした回転対称性を破って特定の向きに現れる。したがって、人為的にこの自発磁化の向きを少し変化させてもそのままの状態を維持するだけで、全く復元力は働かない。また、液体が結晶化する場合にも同様のことが言える。液体状態においては、各原子にとっては空間のどの位置を占める確率も等しいが、結晶化するとこのような空間的均一性が破れて、特定の位置の近傍で原子の存在確率が高くなる。結晶構造を空間的に一様にずらしても、回転によって結晶軸の方向を変化させても、決してもとの状態には戻ろうとしない。このように、連続対称性が破れると必ず復元力のない、空間的に一様なモードが現れる。固体物理学で知られるスピン波やフォノンはこのような一様中立モードを長波長領域に延長したものである。したがって連続性から、充分長い波長をもつスピン波やフォノンの時間変動はきわめてゆるやかである。

流体現象や反応拡散系のパターン・ダイナミクスのようにマクロな次元においても、上に述べたような見方は大いに有用である[1]。たとえば、充分にアスペクト比の大きいベナル対流の場合を考えると、臨界レイリー数以上でロール構造が現れる。その場合、温度 T は

$$T(kx + \phi) = T(kx + \phi + 2\pi) \quad (1)$$

のように波数 k で周期的に変化している。そして、重要なことは、側壁の効果が無視できる限り、任意定数 ϕ が周期解に含まれることである。つまり、結晶構造とおなじように、ロール構造も空間並進対称性を破って現れたパターンであることから、その位相は任意であり、それが ϕ によって表されているのである。

マクロ・ダイナミクスにおける連続対称性の破れを示すもう一つの例として、ベルーソフ・ザ

ボチンスキー (BZ) 反応に見られるような振動化学反応をとりあげよう。溶液をたえず攪はんして物質濃度の空間一様性を保つと、濃度の一様なりミット・サイクル振動が現れる。振動数を ω とし、これを

$$X_0(\omega t + \phi) \quad (2)$$

によって表そう。ここに再び任意定数 ϕ が現れることは明かであろう。この例では、時間の並進対称性が破られた結果としてこのような中立モードが出現したのである。場の理論や物性物理学では、時間の並進対称性の破れということはあまり考えられない。これはマクロな非平衡現象に特有のことである。

上の二つの例における ϕ を位相と呼ぼう。 ϕ は任意定数であるから時間変化しない。このことから、連続対称性を破るパターン (時間的・空間的) が現れると、位相モードという中立モードが現れる、と一般に言えそうである。一定の波形と速度を持つ進行波も

$$X_0(x - ct + \phi) \quad (3)$$

のように任意位相 ϕ を含む。この場合は空間的並進対称性の破れによると言ってもよいし、時間的並進対称性の破れによると言ってもよい。

以上は、乱れのない、完全に規則的なパターンについての議論であった。しかるに、十分に広がった現実の系においては、完全なパターンというものはむしろまれであり、多少なりとも乱れているのが普通である。ベナル対流のロールにしても、多少はうねっており、ロール間の間隔も完全に一様ではないかもしれない。振動反応拡散系においても、攪はんをしなければ空間的一様振動は容易に得られず、離れた2点では振動のタイミングは多少ともずれているであろう。また、2, 3次元空間を伝わる進行波においても、波面は完全な直線や平面ではなく、ひずんでいるのが普通であろう。こうした乱れの原因としてはさまざまなものが考えられる。たとえば、パターンは定常状態に近づきつつある過渡状態かもしれない。実際、長波長の乱れの時間変化はきわめてゆるやかであるから、パターンが定常状態に達するには長時間を要する。あるいは、定常なパターン自体が完全に安定ではないために乱れが自発的に発生しているのかもしれない。また、系の性質がそもそも完全に均質でないのかも知れない。

乱れの原因の如何にかかわらず、乱れたパターンがどのように時間発展してゆくかを記述することは大変重要である。本論で述べる位相ダイナミクスは時間的にも空間的にもゆるやかな乱れ

をもつパターンのダイナミックスを記述するための一般的な方法である。その基本的なアイデアは、規則的パターンの解に現れる位相定数 ϕ を一般に時間空間に依存する力学変数と見直すことである。そして、もとの発展方程式を ϕ 発展方程式に縮約しようとするものである[2]。パターンのゆるやかな乱れが、まず位相のゆるやかな乱れを通じて現れるという物理的直観がそこにある。もちろん ϕ の変化のみによって乱れのダイナミックスを完全にカバーすることは不可能であろう。そのため補正も系統的に取り込んでゆける理論でなくては漸近的方法としては充分ではない。進んだ位相ダイナミックスはその点に関しても満足すべき理論装置を備えている。位相ダイナミックスは「弱い乱れ」に対する方法であるとのべたが、どの程度の乱れを弱い乱れと呼ぶのであろうか。一般的には、位相特異点、すなわちトポロジカルな欠陥が生じるような強い乱れに対しては位相ダイナミックスは定性的に破綻するが、位相特異点が現れないかぎり基本的にはこの方法は適用可能である。

2. 縮約法 (直接的方法)

一般性には欠けるが、分かりやすい位相ダイナミックス法を以下に述べる。2つの簡単な発展方程式を例として取り上げ、具体的に説明しよう。それらは単純化された Swift-Hohenberg 方程式

$$\dot{W} = W - (\partial_x^2 + k_0^2)W - |W|^2 W \quad (\text{A})$$

および複素 Ginzburg-Landau 方程式

$$\dot{W} = W - (1 + ic_1)\partial_x^2 W - (1 + ic_2)|W|^2 W \quad (\text{B})$$

である。いずれも無限に広がった系を考えている。

(A) の縮約 [3, 4]

式 (A) の平衡解として、いろいろな波数をもつ周期パターン解

$$W_0 = \sqrt{1 - (k^2 - k_0^2)^2} e^{ikx} \quad (4)$$

がある。 k は波数であり、 $|k^2 - k_0^2| < 1$ をみたす任意のパラメータである。位相定数 ϕ は 0 とってある。規則パターン (4) に乱れを与えよう。複素振幅 W の大きさおよび位相がともに乱さ

れるとして、乱れたパターン解を

$$W(x, t) = W_0 \cdot (1 + n)e^{i\phi} \quad (5)$$

と置く。ここに、 n 、 ϕ はともに時間空間に依存する乱れの変数である。(5) 式を (A) に代入すれば、 n と ϕ に対する攪乱方程式が次の形に得られる。

$$(\partial_t - L) \begin{pmatrix} n \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここに

$$L = \begin{pmatrix} -2 + 2(k^2 - k_0^2)^2 + 2(3k^2 - k_0^2)\partial_x^2 - \partial_x^4, & -4k\{(k^2 - k_0^2)\partial_x + \partial_x^3\} \\ 4k\{(k^2 - k_0^2)\partial_x - \partial_x^3\}, & 2(3k^2 - k_0^2)\partial_x^2 - \partial_x^4 \end{pmatrix} \quad (7)$$

であり、また f と g はともに n, ϕ の非線形な関数であるが、複雑なのであらわな形は示さないでおく。まず、(6) 式の線形部分 (左辺) から n を消去する。すると非線形部分は n, ϕ およびそれらの空間微分を含む種々の項から成っている。さて、この複雑な式を簡単化しなければならないが、われわれは周期的な構造がゆるやかに位相変調を受けたパターンに関心があるので、空間微分を含む項は、微分の次数が高いほど微小と考えられる。また、先にも述べたように、このようなパターンは、時間的にもゆっくりと変化すると期待される。更に、振幅のずれ n は、全く無視はできないにしても微小量であろう。そこで、 ε を微小量を表す indicator として、形式的に

$$\partial_x \rightarrow \varepsilon \partial_x, \quad \partial_t \rightarrow \varepsilon^2 \partial_t, \quad n \rightarrow \varepsilon^2 n \quad (8)$$

と置き、運動方程式に代入する。すると、それぞれの項の大きさを ε のべきで評価できるから、 ε の最低次のみを残し高次の項をすべて無視すれば

$$\dot{\phi} = \nu \partial_x^2 \phi \quad (9)$$

が得られる。ここに

$$\nu = 2(3k^2 - k_0^2) - \frac{8k^2(k^2 - k_0^2)^2}{1 - (k^2 - k_0^2)^2} \quad (10)$$

である。

ここで誰しも疑問に思うのは (8) 式の仮定であろう。 n , ∂_x および ∂_t を含む項が微小であることは認めるにしても、三者の間になぜこのような大きさの関係があると言えるのだろうか。これはきわめてもっともな疑問であり、実を言うと、(8) は結果を見越した仮定である。本当は $\partial_x \rightarrow \varepsilon_1 \partial_x$, $\partial_t \rightarrow \varepsilon_2 \partial_t$, $n \rightarrow \varepsilon_3 n$ のように、独立な微小量 ε_1 , ε_2 , ε_3 を割当てなければならない。そして、これら3つのパラメータについての最低次のみをまず残すのである。すると、(9) 式のような拡散項以外にいろいろな項が現れるはずである。また、(6) 式に戻ると、最低次では n が ϕ の空間微分で表されるから、 ε_1 と ε_3 の関係が $\varepsilon_3 = \varepsilon_1^2$ となることがでてくる。このようにして、種々の空間微分のうち ϕ の拡散項が主要項であることがわかる。そして、この項が ϕ の運動を支配する、つまり、 $\partial_t \phi$ と $\partial_x^2 \phi$ とが大きさとしてバランスするということから、 ε_1 と ε_2 との間に $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2$ なる関係が出てくるのである。このように、きちんと議論しようとする大変にややこしく、多分に物理的な直観も入ってくる。そうした煩雑さ、あいまいさを嫌って、通常は天下り的に (8) のような仮定の下に形式的に ε 展開を行い、自動的に (9) が得られるように装うのであるが、実際には (9) は決して数学的な結果ではない。多くの項のうちいずれが重要であるかをみきわめる際には、暗黙のうちにいかなる物理的状況にわれわれが着目しているかについての直観が働いているのである。

以上は空間次元1の Swift-Hohenberg 方程式の結果であったが、(A) の2次元版に対して

$$\dot{\phi} = \nu_x \partial_x^2 \phi + \nu_y \partial_y^2 \phi \quad (11)$$

の形の非等方的拡散方程式が得られることは Pomeau と Manneville (1979年) によって示された[3].

(B) の縮約 [2]

(B) 式は空間的に一様な振動解

$$W_0 = e^{-i\omega_0 t} \quad (12)$$

をもつ。(A) の場合と同様に、上の解をひずませたより一般的な解を

$$W(x, t) = W_0 \cdot (1 + n) e^{i\phi} \quad (13)$$

と置く。代入により,

$$(\partial_t - L) \begin{pmatrix} n \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} -2 + \partial_x^2 & -c_1 \partial_x^2 \\ -2c_2 + c_1 \partial_x^2 & \partial_x^2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

が得られ, f, g は非線形項を表す。再び線形部分より n を消去し, (8) に対応して

$$\partial_x \rightarrow \varepsilon \partial_x, \quad \partial_t \rightarrow \varepsilon^2 \partial_t, \quad n \rightarrow \varepsilon^2 \partial_t \quad (15)$$

を仮定することによって, 最低次で

$$\phi = \nu \partial_x^2 \phi + \mu (\partial_x \phi)^2 \quad (16)$$

を得る。ここに,

$$\nu = 1 + c_1 c_2, \quad \mu = c_2 - c_1 \quad (17)$$

である。(A) の場合に $(\partial_x \phi)^2$ のタイプの項が出なかったのは系の対称性によるものである。

モデル方程式 (A)(B) に対して示した上述のような縮約法は, 簡単で分かりやすいが, それぞれの系の特別な対称性に依存しており, 普遍性に欠ける。そこで, 次節ではより一般的な方法を述べる。

3. 縮約法 (一般的方法) [2, 5]

この節では前節よりも一般的な発展方程式

$$\dot{X} = F(X) - \alpha \partial_x^2 X - \beta \partial_x^4 X \quad (C)$$

に対する縮約を試みよう。ここに X は n 次元ベクトルであり, $F(X)$ は X の非線形な関数である。又 α と β は正の定数である。(C) は特別な場合として (A)(B) を含むことに注意しよう。以下では, (C) が定常な空間的周期解

$$X_0(x + \phi), \quad X_0(z + \ell) = X_0(z) \quad (18)$$

をもつ場合に議論を限定する。なお, (18) の周期パターンは, 適当な空間点に関して左右対称であ

るとする。従って、空間座標の原点を適当に選ぶと、 $X_0(z)$ は偶関数であり、

$$u_0(z) = \partial_z X_0(z) \quad (19)$$

によって定義される $u_0(z)$ は奇関数である。式 (C) を $X_0(z)$ の周りで線形化したときに線形作用素

$$\tilde{L} \equiv L - \alpha \partial_z^2 - \beta \partial_z^4, \quad (20)$$

が現れる。ここに L は $L_{ij} \equiv \partial F_i(X_0)/\partial X_{0j}$ を要素とする行列である。以下では、 \tilde{L} が作用する関数は周期 ℓ の周期関数であるとする。そして、この関数空間における内積を

$$(f_1, f_2) \equiv \frac{1}{\ell} \int_0^\ell dz \bar{f}_1(z) f_2(z) \quad (21)$$

によって定義する。ここに、バーは複素共役を表す。定常解 $X_0(z)$ は式

$$F(X_0) - \alpha \partial_z^2 X_0 - \beta \partial_z^4 X_0 = 0 \quad (22)$$

を満足しなければならないが、上式を z で一度微分すれば

$$\tilde{L} u_0(z) = 0 \quad (23)$$

が得られる。これは $u_0(z)$ が \tilde{L} のゼロ固有関数であることを示している。(19) 式からわかるように、 $u_0(z)$ はパターンの並進に対応しており、連続対称性の破れによって生じる位相モードなのである。 \tilde{L} の他の固有値についてはすべて負の実部をもつこと、すなわち周期 ℓ をもつ攪乱に対してパターンは安定であると仮定しよう。なお、以下の議論で用いる量として、 \tilde{L} の随伴作用素の 0 固有関数を u_0^\dagger によって表す。

以上で系 (C) の縮約の準備ができた。縮約は以下のように実行される。まず、基準となる定常状態を次式のように表す。

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0(z), & z &= x + \phi \\ \dot{\phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

次に、解 (24) を拡張するために、位相 ϕ が一様でなく、空間的にゆるやかな変化を許容する。このようにゆるやかな変調を受けたパターンはもはや定常解ではありえないであろうから、 ϕ は時間

的にもゆっくりと変化すると期待される。このようにゆるやかな時間空間依存性を ϕ に持たせても、なお (24) は厳密に (C) をみたすことができない。これはパターンのゆるやかな変動をすべて定常パターンをあらわす関数 X_0 中の ϕ の変動に吸収させることが一般には不可能だからである。たしかに、位相ダイナミックスは、パターンのゆるやかなひずみの本質的な部分を ϕ のひずみに吸収させることができるというアイデアに基づいている。しかし、位相の変化によってはカバーできない波形の変化、つまり X_0 からのずれは微小ながら存在すると考えなければならない。そこで、(24) 式の一般化として

$$\left. \begin{aligned} X &= X_0(z) + \rho(z, \partial_\xi \phi, \partial_\xi^2 \phi, \dots) \\ \dot{\phi} &= g(\partial_\xi \phi, \partial_\xi^2 \phi, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

の形を仮定する。ここに、 ξ は空間座標であるが、ゆるやかな空間変化を表すために x と区別してこのようにあらわした。これに対して、 x または z によって空間変化が表されている場合には、それは周期 l の周期的変化を表すものと約束しておく。(25) 式は二つの未知量 ρ 及び g を含んでいる。特に g の形がわかれば位相方程式が得られたことになるが、これらの未知量は同式を (C) に代入することによって決定されるはずである。 ξ は x と同じ空間座標であるから、代入に際して (C) の空間微分を次のように置き換えておく必要がある。

$$\partial_x \longrightarrow \partial_x + \partial_\xi \quad (26)$$

また、(C) の時間微分は結局は ϕ を通しての微分となり、しかも、 $\dot{\phi} = g$ であるから、時間微分は数式から消える。これらのことに注意すると、代入の結果

$$-\tilde{L}(z, \partial_z)\rho(z, \partial_\xi \phi, \dots) + g(\partial_\xi \phi, \dots)u_0(z) = I(z, \partial_\xi \phi, \partial_\xi^2 \phi, \dots) \quad (27)$$

を得る。上式では、微小な未知量 ρ , g の1次の項を左辺に取り出し、他はすべてひとまとめにして I とおいた。したがって I は

$$\begin{aligned} I &= -(2\alpha\partial_z u + 4\beta\partial_z^2 u_0)\partial_\xi \phi - (\alpha u_0 + 6\beta\partial_z^2 u_0)\partial_\xi^2 \phi \\ &\quad + (\alpha\partial_z u_0 + 6\beta\partial_z^3 u_0)(\partial_\xi \phi)^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

のようになる。(27) 式の両辺はいずれも z に関しては l の周期性をもっている。したがって、そこに現れる量、 ρ , I などは原理的に \tilde{L} の固有関数に分解され、それらの係数に対する方程式に直す

ことができるはずである。その場合、直ちにわかることは、(27)式の左辺第1項は \tilde{L} の0固有成分を含まないということである。しかも、左辺第2項は0固有成分しか含まないから、その係数 g は I の0固有成分に等しくなければならない。このようにして、 I が仮に ϕ やその空間導関数の既知関数であるならば、 g すなわち位相方程式が決定されることになる。ところが I は既知量ではなく、それ自身が ρ や g を含んでいる。しかしそれらは高次の微小量であるから、 I の第1近似 I_0 は(28)の中で $\rho = g = 0$ と置いたものである。そこで(27)の各辺と u_0^\dagger との内積を取ることにより、最低次での g を求めると、結果は単純で、

$$g = (u_0^\dagger, I_0) = \nu \partial_\xi^2 \phi \quad (29)$$

となる。ここに

$$\nu = -(u_0^\dagger, \alpha u_0) - 6(u_0^\dagger, \beta \partial_z^2 u_0) \quad (30)$$

である。 $\partial_\xi \phi$ や $(\partial_\xi \phi)^2$ も現れそうに思われるが、それらの係数は恒等的に0である。なぜならば、前に述べたように、 $u_0(z)$ は奇関数、したがってまた du_0/dz 、 d^3u_0/dz^3 は偶関数だからである。

高次の近似に進むためにはどうすればよいであろうか。 I の中に含まれる ρ と g を考慮しなければならなくなるが、 g については逐次代入すればよいので問題はない。問題は ρ である。最低近似における ρ は、(27)式において I を I_0 で置き換え、各辺と u_i ($i \neq 0$)との内積を取ることによって得られる。ただし、これではまだ ρ の0固有成分が未定である。これはしかるべくして不定なのであり、われわれは勝手にこれを0とおいてよいのである。実は、(C)の解を(25)の形に置いたときに、 ρ はなお一義的に定義されていないのである。 ρ はある一つの周期パターンからのずれをあらわすが、ずれのうち、パターンの単純な空間並進部分については、 X_0 の関数形のままで単に ϕ の値をシフトすることによって取り込むこともできる。ずれを ϕ の変化に担わせるのか、あるいは ρ に担わせるのか、(25)式のみではそれはわからない。換言すれば、 X を X_0 と ρ に分割するやり方は一義的ではないのである。これを一義的にするための条件は我々が都合の良いように決めてやればよいのである。最も自然なやり方は、空間並進というずれはすべて ϕ の変化に担わせることである。これは ρ が \tilde{L} の0固有成分をもたないという条件にはかならない。

かくして、最低次で g と ρ を決定することができた。それらを I に代入することにより、より正確な I が得られる。この I を用いて上にのべたのと同じことを繰り返せば原理的に任意の次

数にまで進ことができる。ここで次数というのは、何か微小な摂動パラメータについての次数のことを言っているのではない。単に逐次代入の回数を言っているに過ぎない。逐次代入によって一般に微分展開の形で得られた g と ρ からどのようにして重要と思われる項を取り出しそれ以外を無視するかということは物理の問題であり、数学的問題では決してないことを強調したい。

4. 縮約の一般的構造

ここでは前節で述べた縮約法をより一般的な立場から眺めてみたい。前節ではモデル方程式 (C) の解のうち、ゆるやかな変調を受けた周期構造を表す解として、

$$X(x, \xi, t) \quad (31)$$

を考えた。 X は x については周期 l の周期関数であり、 ξ はゆるやかな変調を表す空間座標で、形式的には x とは独立な変数として扱う。したがって (C) を

$$\dot{X} = F(X) - \alpha(\partial_x + \partial_\xi)^2 X - \beta(\partial_x + \partial_\xi)^4 X \quad (32)$$

のように書き直さなければならない。微分 ∂_ξ のかかった項は仮定によって微小量であり、摂動項とみなされる。摂動の有無にかかわらず X は x の l -周期関数であるから、 l -周期関数の関数空間 S で問題を考察する。まず $\partial_\xi = 0$ 、すなわち無摂動の場合には、 X は定常な l -周期解に移行するであろう。これは S における1点で表される。しかし、空間並進対称性による任意の位相定数があるから、これら一群の周期解は S において1次元の多様体をつくる。これを M_0 としよう (図1参照)。

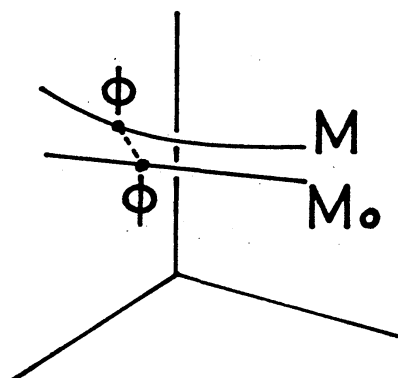


図1

系は M_0 上のいずれかの点に落ち込むのである。摂動項がつけ加わった場合はどのように状況が変化するのであろうか。十分に摂動が弱いかぎり、われわれは1次元の不変多様体が M_0 の近傍になお存続すると仮定する。それを M とする。 M は摂動を0に持ってゆく極限で M_0 に一致するはずである。一般に M 外に初期点を持つ系は、すみやかに M に漸近するであろう。しかる後に、 M 上をゆっくりと運動する。 M はもはや定常解の集合ではないからである。求められていることは、 M_0 の近傍に M の具体的な形を見だし、かつ M 上のゆるやかな運動を支配する運動方程式を見いだすことである。前節では、 M を

$$X(x + \phi, \partial_\xi \phi, \partial_\xi^2 \phi, \dots) \quad (33)$$

の形で求めた。 $\partial_\xi \phi$, $\partial_\xi^2 \phi$ などは与えられた外部摂動とみなされ、 M の形はこれらにパラメトリックに依存するとみなす。前節の ρ は M の M_0 からのずれをあらわす。当然のことながら、 M 上のある点が M_0 のどの点からずれていると見るのか、それを定義しておかないとずれ ρ は一義的ではありえない。つまり、 M 上の各点と M_0 上の各点との間に一対一対応を何らかの仕方をつけておく必要がある。 M_0 上の点は位相 ϕ によってパラメトライズされるから、この一対一対応を定義することは、 M 上に ϕ を導入することにほかならない。そうしてはじめて X の運動が ϕ の運動として記述されるのである。前節では一対一対応を最も自然と思われるやりかたで定義し、ずれ ρ を一義的にした。さらに M 上の速度 (ϕ の変化率) を g と置き、 ρ と g を微小な未知量として摂動的に求める方法を述べた。

位相ダイナミクスをこのように一般的な観点からみると、分岐理論との殆ど完全な類似性に気付かされる。詳細は省くが、分岐理論において、 M_0 に対応するものは臨界固有空間である。 M に対応するものは中心多様体である。 M 上のゆっくりとしたダイナミクスを表現しようとする場合、やはり M_0 と M との対応関係を適切に定義する必要が生じる。特に、これらの多様体の次元が2次元、3次元と高くなるにつれて（つまり、分岐の縮退度が高くなるにつれて）下手な対応のさせかたをすれば、 M 上の発展方程式の形が大変複雑になる。“最良”の対応づけをいかに系統的におこなうかというのがいわゆる標準形理論の目的とするところである。

参考文献

- [1] Y.Kuramoto, in “Spatial Inhomogeneities and Transient Behavior in Chem-

- icak Kinetics" ed. P.Gray et al. (Manchester Univ. Press, 1990), p.299.
- [2] Y.Kuramoto, Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence (Springer, 1984)
- [3] Y.Pomeau and P.Manneville, J. Physique-Letters **40**, L-609 (1979)
- [4] P.Manneville, Dissipative Structures and Weak Turbulence,
(Academic Press, London, 1990) Ch. 10.
- [5] Y.Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **71** (1984) 1182.