

### 3 次元乱流のクラスター構造 II

計算流体研 真田 勉 (Tsutomu Sanada)

#### I. Introduction

乱流の小さなスケールでは、乱れが空間的に一様にならず、局在化していることが知られている。例えば、エネルギー散逸は極めて小さい体積にその大部分が集中し、かたまりを作っている。このような乱流の間欠的構造は、「乱れの中の秩序形成」の代表例であり、乱流現象の基本的問題であろう (see, for review, Monin and Yaglom 1975, § 25)。

これまで乱流の間欠性を特徴付ける、さまざまなモデルや統計量が導入されてきた。トポロジカルなモデルとしては、vortex tube や vortex sheet が提案されている。また統計量としては、kurtosis (4 次モーメントを 2 次モーメントで規格化したもの、flatness factor と呼ぶ) や分布関数、特にその tail の形などは実験や直接数値シミュレーションのデータ処理で良く使われてきた。その結果 kurtosis に関するデータは極めて豊富である。十分レイノルズ数が高い乱流では、その間欠的構造が自己相似になることが期待され、フラクタル次元で特徴付けることも有効であろう。

多くの実験事実に依れば、速度場の kurtosis は Gauss 分布の値 3 に近いが、速度場の空間（または時間）微分場： $\partial u / \partial x$  や  $\partial^2 u / \partial x^2$  は、3 に比べて大きい kurtosis を持つ。例えば microscale Reynolds数  $R_\lambda$  が 100~200 では  $K[\partial u / \partial x] = 5 \sim 6$ ,  $K[\partial^2 u / \partial x^2] = 7 \sim 9$  である ( $K[ ]$  は kurtosis を表す)。小さいスケール（大きい波数）のフーリエ成分の寄与は、 $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$  の順に大きくなるから、kurtosis がこの順に大きくなる事実は、「小さいスケールほど、より間欠的である」ことを意味する。本論文は Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションで得られた乱流場の間欠的構造をクラスター統計を用いて解析し、「小さいスケールほど、より間欠的である」かどうか確かめる。

## II. Numerical method and kurtosis

解析する乱流場を得るために 3 次元 Navier-Stokes 方程式の直接数値シミュレーションを行う。

$$\partial U / \partial t + (U \cdot \text{grad}) U = - \text{grad } p + \nu \Delta U + f,$$

$$\text{div } U = 0.$$

$U = (u, v, w)$  は非圧縮性の速度場、 $p$  は圧力、 $\nu$  は動粘性率  
 そして  $f$  は定常な外力である。各方向  $2\pi$  の周期境界条件  
 と、 $U = 0$  の初期条件を課す。外力  $f$  は低波数  $k \leq 2$  の  
 フーリエモードのみから成っている。空間微分の計算は格子  
 点数  $256 \times 256 \times 256$  のフーリエスペクトル法を用い、時間発  
 展は 2 次 Runge Kutta 法で行う。

十分長時間の後、乱流場は統計的に定常な状態になること  
 が期待される。図 1 と図 2 は、kinetic energy と、 $R\lambda$  (定  
 義は Batchelor 1953 による) の時間発展である。ほぼ定常な  
 状態で、 $R\lambda \sim 120$  である。  $40 < t < 100$  での  $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  
 $\partial^2 u / \partial x^2$  の kurtosis はそれぞれ  $2.9 \pm 0.1$ ,  $5.6 \pm 0.5$ ,  
 $14.2 \pm 2.5$  であり、実験事実と同様、微分階数が高いほど、  
 kurtosis は大きくなっていく。ただし  $\partial^2 u / \partial x^2$  の  
 kurtosis は実験データよりも大きめである。2 階微分の ku  
 rtosis に関するこの食い違いは、Siggia (1981) の数値計算に  
 も現れておりその原因は良く分っていない。また、たて微分  
 に比べて、よこ微分の kurtosis は大きめである ( $K[\partial u / \partial$   
 $x] = 5.6 \pm 0.5$ ,  $K[\partial u / \partial y] = 8.7 \pm 0.7$ ,  $K[\partial u / \partial z] = 8.8 \pm 1.2$ )。  
 これは、たて微分場よりもよこ微分場の方がより間欠的であ  
 ることを意味する。

### III. Cluster statistics

kurtosis の値に依れば、 $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$  はこの順により間欠的であり、また  $\partial u / \partial x$  よりも  $\partial u / \partial y$  や  $\partial u / \partial z$  の方が間欠的である。このような間欠性をクラスター統計を用いて解析してみよう。クラスター統計は乱流の間欠構造、特に「かたまり」を直接捉える解析方法である (Sanada et al. 1991)。クラスターは次のように定義される。数値シミュレーションにより、各格子点上で何か物理量  $X$  を求める、例えば  $X = u^2$ ,  $(\partial u / \partial x)^2$  等である。最初に threshold を選び、その threshold よりも大きい  $X$  を持つ、すべての格子点上に ● を置く。そのとき、連結した ● の領域を一つのクラスターと呼ぶことにする。連結しているかどうかは格子によって決められる。また一つのクラスターを構成する格子点の数を、そのクラスターのサイズと呼ぶことにしよう。

もちろんクラスターのパターンは最初に選ぶ threshold に依存する。threshold が 0 に近いとき、ほとんどの格子点上に ● が置かれ、それらは連結して一つの大きなクラスターを作るだろう。逆に threshold が最大値に近い場合はクラスターの数に極めて少なく、またクラスターサイズもほとんど 1 になる。各 threshold に対して次の 2 つの統計量を求める。volume ratio を (クラスターサイズの和) / (全格子点数:

256<sup>3</sup>) で定義する。これはクラスターが占める体積比を表す。また  $X \text{ ratio}$  を (クラスター中の  $X$  の和) / (全空間の  $X$  の和) で定義する。これはクラスター中に、 $X$  が集中している割合を表している。ある  $\text{volume ratio}$  に対して、それに対応する  $X \text{ ratio}$  が大きいほど、集中度が高く、従ってより間欠的であると言えよう。

$X$  として、 $u^2$ ,  $(\partial u / \partial x)^2$ ,  $(\partial^2 u / \partial x^2)^2$  を選び、クラスター統計を用いてその間欠性の度合を調べる。最初にそれぞれの  $\text{volume ratio vs } X \text{ ratio}$  の関係を図 3 に示す。さまざまな  $\text{threshold}$  を取ることにより、いろいろな  $\text{volume ratio}$  に対する  $X \text{ ratio}$  を求めることができる。図は、 $u^2$ ,  $(\partial u / \partial x)^2$ ,  $(\partial^2 u / \partial x^2)^2$  の順に  $X \text{ ratio}$  が大きく、より間欠的であることを示している。これは  $\text{kurtosis}$  がこの順に大きくなって行くことと  $\text{consistent}$  である。次に  $\text{volume ratio vs number of clusters}$  の関係 (図 4) を見てみよう。図 4 は、 $\text{volume ratio}$  に対して、その  $\text{volume}$  を何個のクラスター ( $\text{number of clusters}$ ) で賄っているかを表している。ある  $\text{volume ratio}$  に対してそれに対応するクラスターの数が多いほど、そのクラスターパターンはよりバラバラに見え、平均的なクラスターサイズは小さくなる。すなわち ● の領域の連結性が弱まる。図 4 から  $u^2$ ,  $(\partial u / \partial x)^2$ ,  $(\partial^2 u / \partial x^2)^2$

の順に連結性が弱まって行き、この順に平均的なクラスターサイズは小さくなっていくことがわかる。volume ratio が極めて小さい ( $10^{-7} \sim 10^{-5}$ ) 領域では、データは非常に不規則であるが、このような領域では threshold はほとんど最大値に近くクラスターの数が少ないので、統計的有為性に乏しい。図3と4から、 $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$  については「小さいスケールを持つ場ほど、より間欠的である」ことが結論できる。

次にたて微分場  $\partial u / \partial x$  とよこ微分場  $\partial u / \partial y$ ,  $\partial u / \partial z$  のクラスター構造の比較を行う。場が等方的であれば  $\partial u / \partial y$  と  $\partial u / \partial z$  の統計量は同じになるはずであるが、その等方性の条件はたて微分場とよこ微分場の統計量が同じになることを導かない。従って、クラスター統計に関しても異なるかもしれない。

図5は  $(\partial u / \partial x)^2$ ,  $(\partial u / \partial y)^2$ ,  $(\partial u / \partial z)^2$  について、volume ratio と X ratio との関係を表したものである。予想通り2つのよこ微分場:  $(\partial u / \partial y)^2$  と  $(\partial u / \partial z)^2$  のデータは良く一致している。図からよこ微分場の方がたて微分場よりも集中度が高く、より間欠的であることがわかる。これはよこ微分場の kurtosis がたて微分場より大きいことと consistent である。次の図6はたて微分場の方が平均的クラ

スターサイズが小さいことを示している。図5と6は、よこ微分場の方が間欠的ではあるが、たて微分場の方が特徴的なスケールが小さいことを表している。

#### IV. Conclusion

数値的に得られた乱流場の間欠的構造をクラスター統計を用いて調べた。「小さいスケールほど、より間欠的である」というこれまで知られてきた実験事実は、 $u$ ,  $\partial u / \partial x$ ,  $\partial^2 u / \partial x^2$  については、クラスター統計を用いて確認された。ところが、たて微分場とよこ微分場に関しては「小さいスケールほど、より間欠的である」とは言えない。たて微分場とよこ微分場の統計の違いは3次元構造と密接に関係しており、その空間構造を頭の中だけで想像することは非常に困難であろう。クラスター解析のように、何か具体的な統計量を導入することが、その空間構造を比較するときに重要と思われる。

#### References

- G. K. Batchelor, The Theory of Homogeneous Turbulence  
(Cambridge Univ. Press, 1953).
- A. S. Monin and A. M. Yaglom, Statistical Fluid Mechanics  
Vol. 2 (MIT Press, 1975).
- T. Sanada, K. Ishii and K. Kuwahara, Prog. Theor. Phys. 85  
(1991) 527.

E. D. Siggia, J. Fluid Mech. 107 (1981) 375.

図の説明

図 1 : 運動エネルギーの時間発展。

図 2 : microscale Reynolds 数の時間発展。

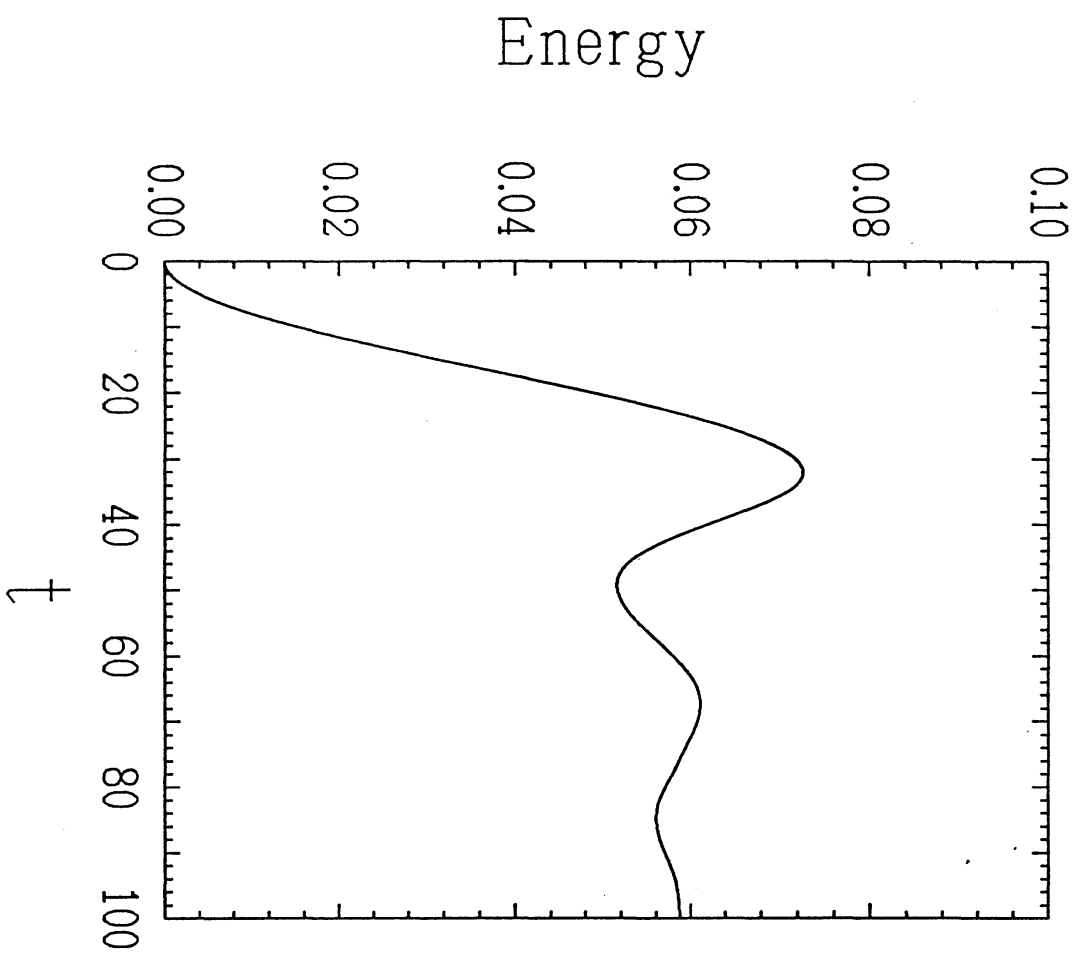
図 3 : volume ratio と  $u^2$  ratio (シンボル ○) ,  
 $(\partial u / \partial x)^2$  ratio (シンボル △) ,  $(\partial^2 u / \partial x^2)^2$   
 ratio (シンボル □) の関係。

図 4 : volume ratio と number of clusters の関係。  
 シンボルは図 3 と同様。

図 5 : volumr ratio と  $(\partial u / \partial x)^2$  ratio (シンボル ▲) ,  
 $(\partial u / \partial y)^2$  ratio (シンボル ○) ,  $(\partial u / \partial z)^2$  ratio  
 (シンボル □) の関係。

図 6 : volume ratio と number of clusters の関係。  
 シンボルは図 5 と同様。





☒ 1

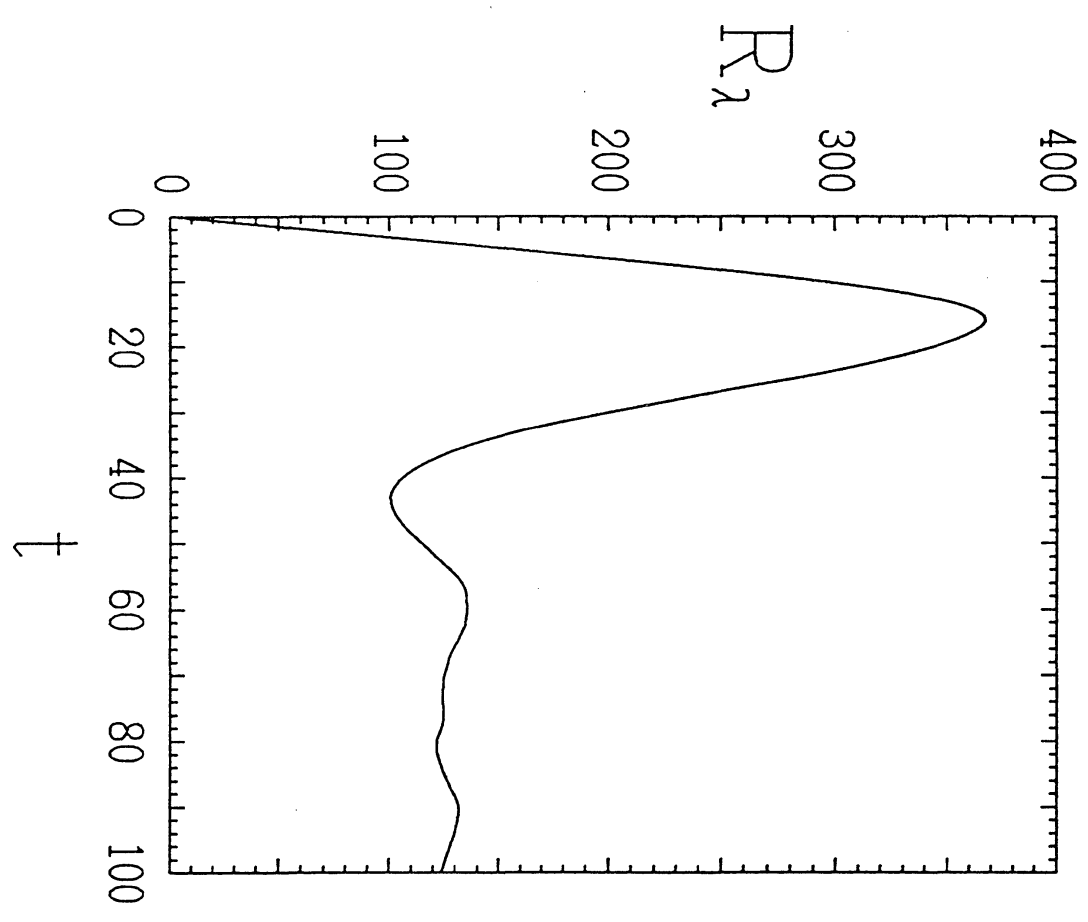
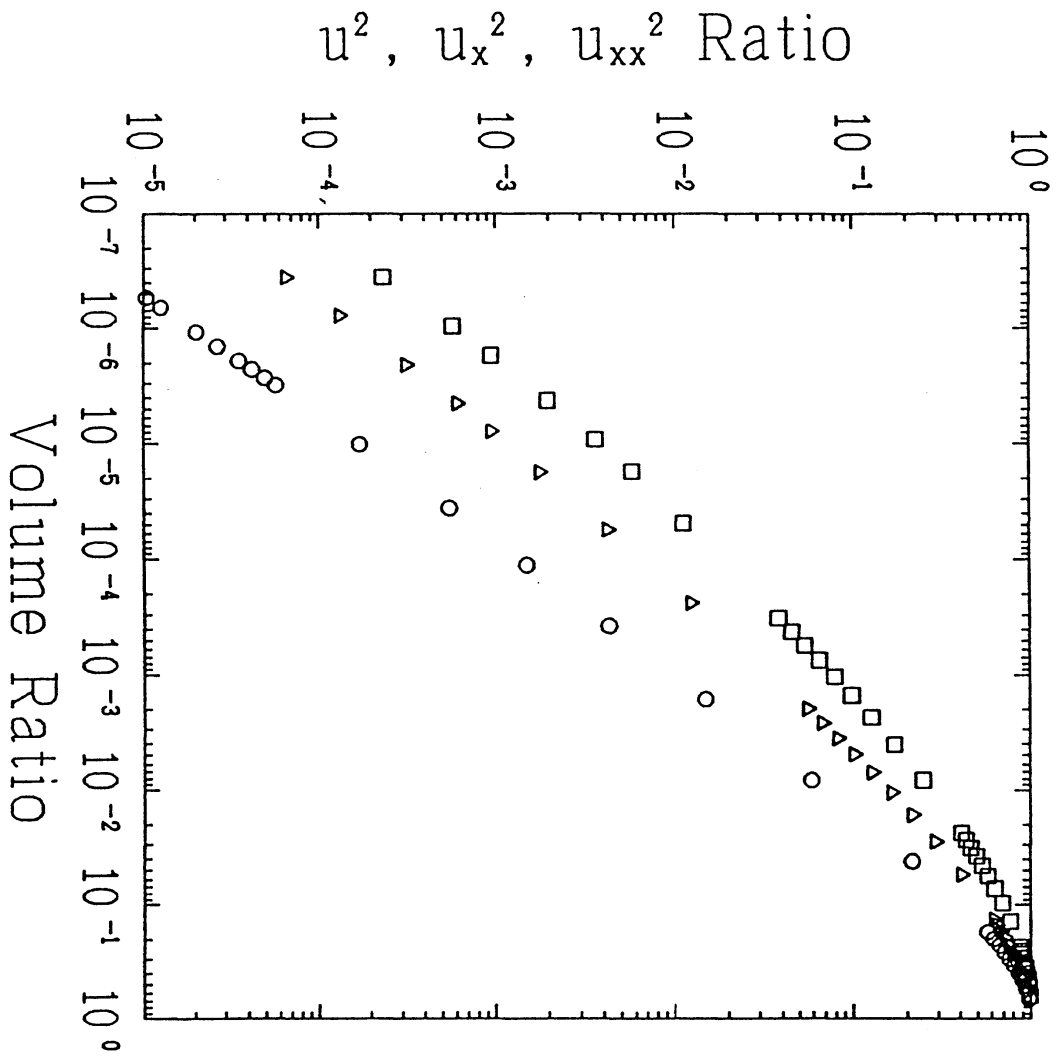


图 2



X 3

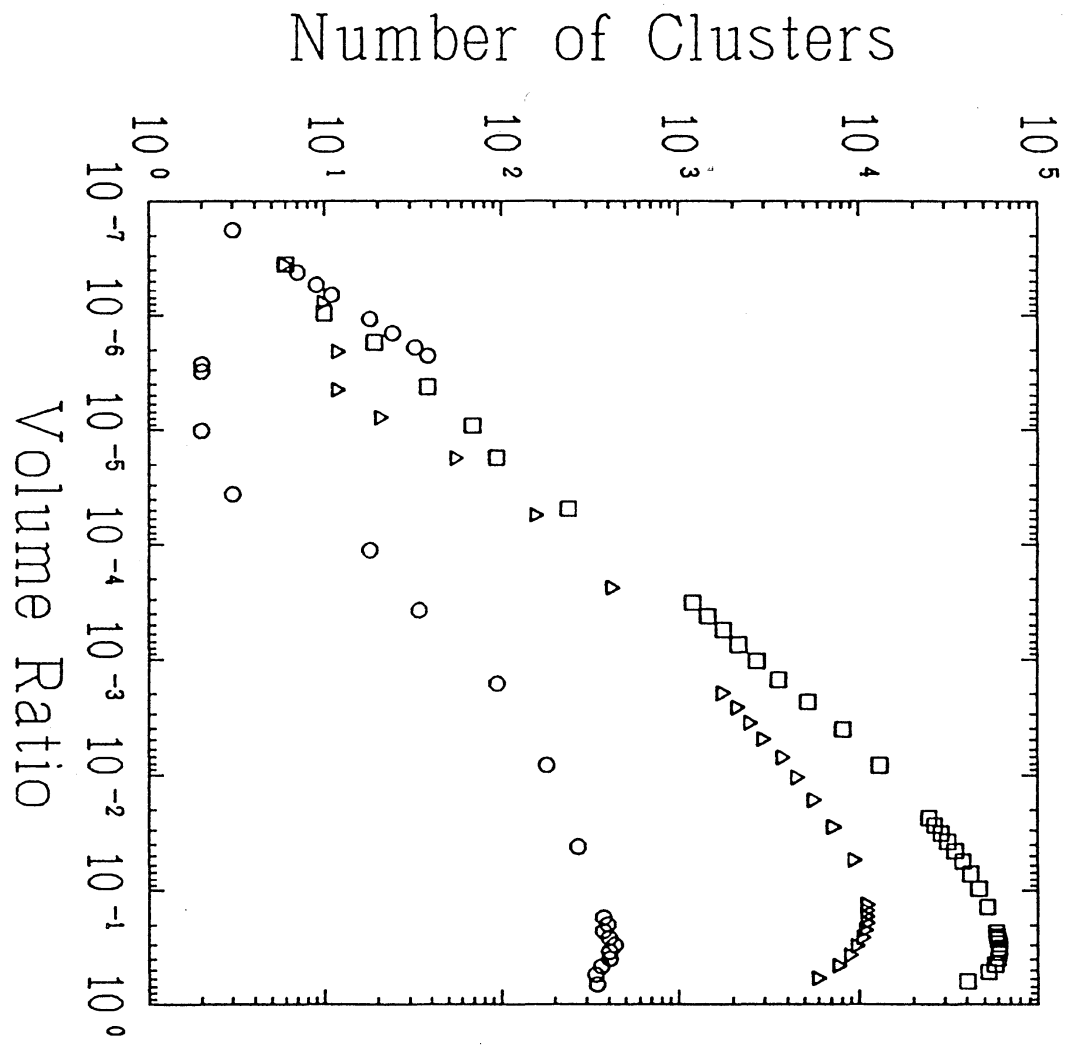
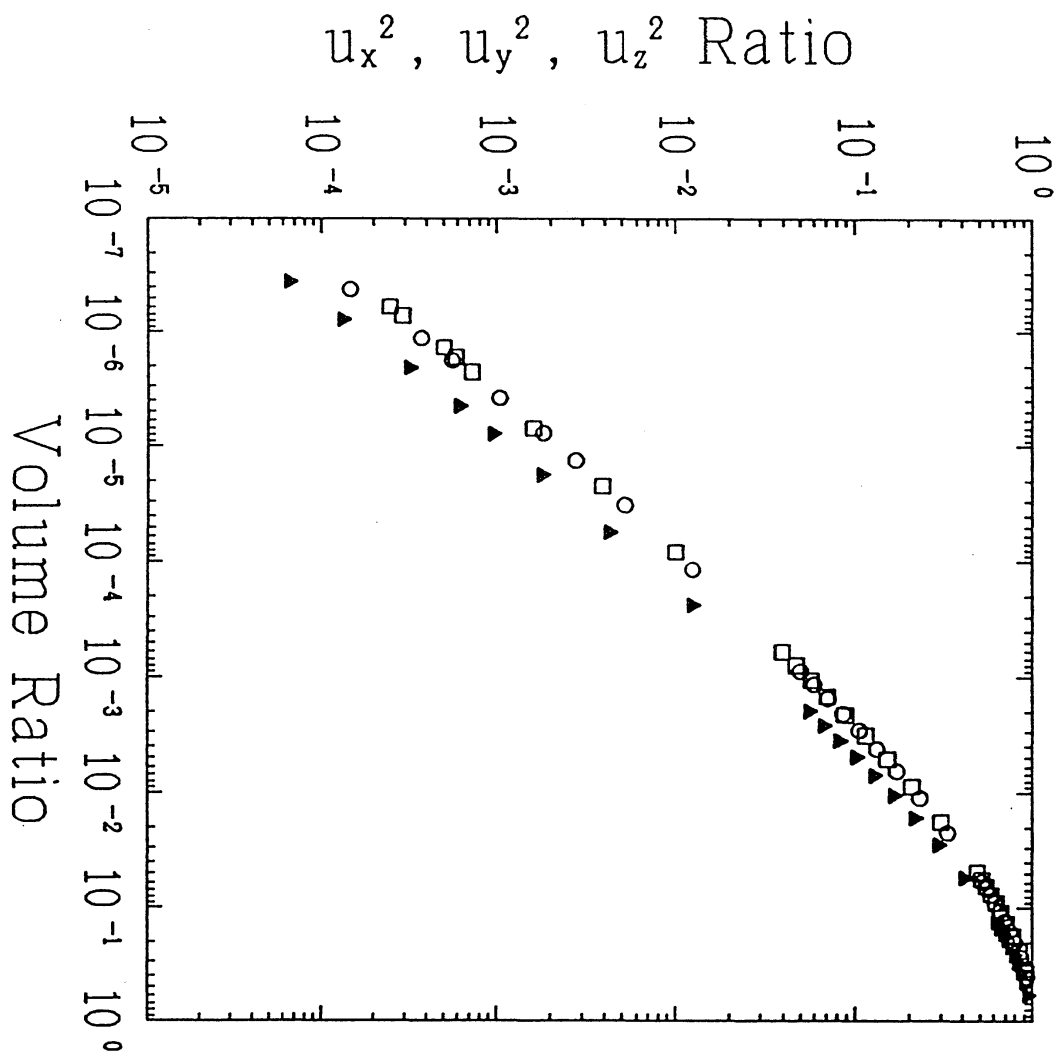


Figure 4



5

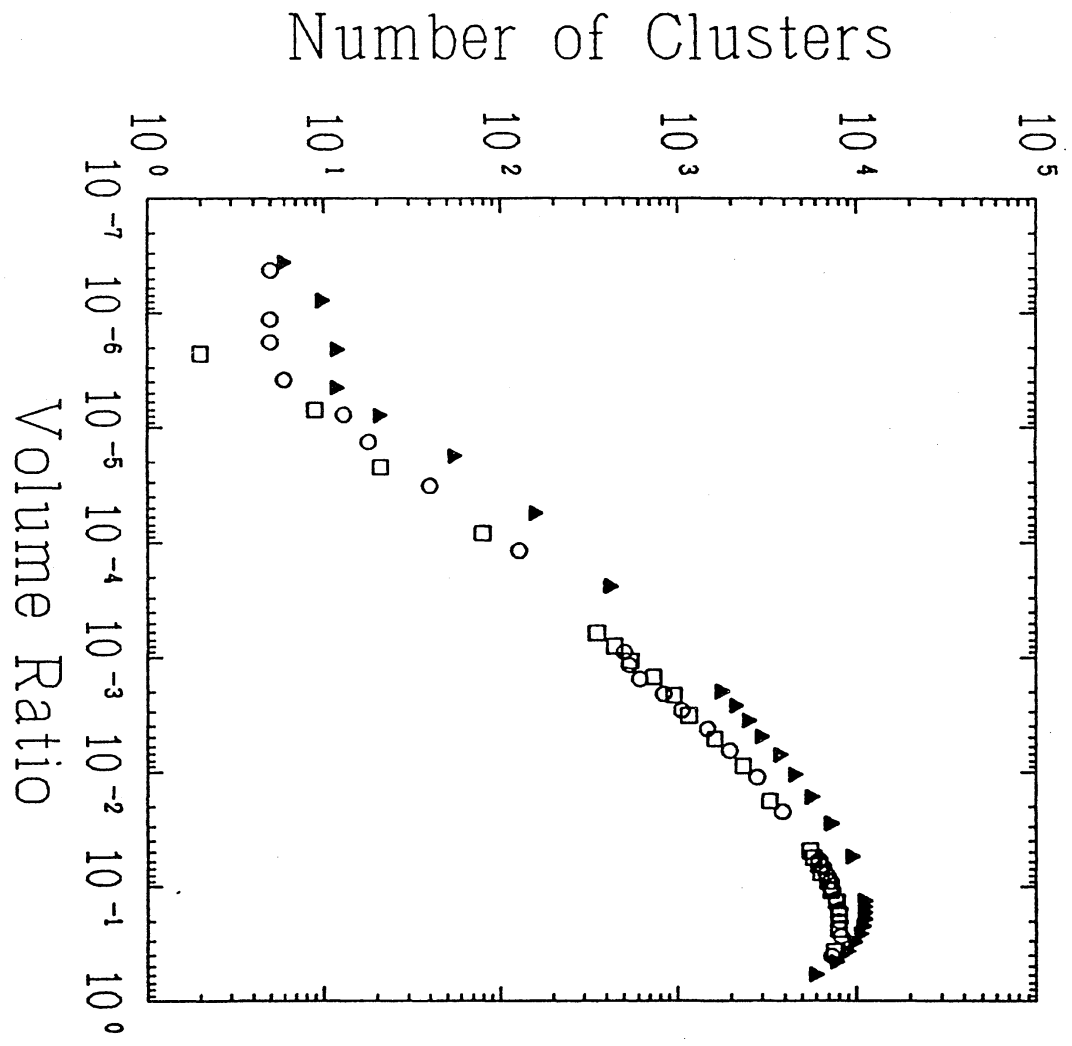


Figure 6