数理解析研究所講究録
第770巻 1991年 92-104

滲透媒質方程式のコーシー問題の時間逆方向の評価式

金沢大.理　林田和也

§1. 序

我々は次のコーシー問題を考える:

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u^m & \text{in } R^N \times (0, T_0) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{on } R^N \end{cases}$$

但し, $m > 1$, $0 < T_0 < \infty$, $u_0 \geqq 0$ そして $u \geqq 0$ とする。
u が次の条件をみたすとき, u は(1.1)の解であるという:

$$\int_0^{T_0} \int_{R^N} [u(x,t)^2 + |\nabla_x u^m(x,t)|^2]\, dx\, dt < \infty.$$

そして $R^N \times [0, T_0)$ に台をもつ任意の C^1 級の関数 $\phi(x,t)$ に対して

$$\int_0^{T_0} \int_{R^N} (u \partial_t \phi - \nabla_x u^m \cdot \nabla_x \phi)\, dx\, dt + \int_{R^N} u_0(x) \phi(x,0)\, dx = 0.$$

かかる解の存在と一意性は良く知られている(例えば[8]参照)。

この解について良く知られている Barenblatt の例をあげておく: $k = (m-1+\frac{2}{N})^{-1}$ で c は任意の正数, a は任意の実数とするとき

$$w(x,t;a,\tau) = (t+\tau)^{-k}\left\{\left[a^2 - \frac{k(m-1)}{2Nm}\frac{|x|^2}{(t+\tau)^{2k/N}}\right]_+\right\}^{\frac{1}{m-1}}$$

とおく。但し, 記号 $[\quad]_+$ の意味は $[f]_+ = \max(f, 0)$ である。

この例について直ちに分ることは, (i) w は有限伝播性をもつ。(ii) w は $R^N \times [0, T_0]$ で Hölder 連続。(iii) $m<3$ ならば, $\partial_t w$, $\partial_{x_i}\partial_{x_j} w^m \in L^2(R^N \times (0, T_0))$ $(i, j = 1, \cdots, N)$。(iv) 不等式 $t^{\frac{1}{m-1}} w(x,t) \leqq T^{\frac{1}{m-1}} w(x,T)$ $(0 < t \leqq T < T_0)$ がなりたつ。

上の性質 (ii) についていえば, (1.1) の解についての Hölder 連続性が Caffarelli and Friedman [3] によって示された。(iii) についていえば, (1.1) の解 u は Bénilan [1] によって

$$\partial_t u \in L^p([\delta, T_0] \times B_R)$$

が示されている。但し, $1 < p < 1 + \frac{1}{m}$, $0 < \delta < T_0$, $R > 0$ で $B_R = \{x \in R^N ; |x| < R\}$ である。

(iv) についていえば, Caffarelli and Friedman [2] によって (1.1) の解は

$$t\,\partial_t u \geqq -u/(m-1) \tag{1.2}$$

をみたす。故にこの微分不等式を解いて

$$t^{\frac{1}{m-1}} u(x,t) \leqq T^{\frac{1}{m-1}} u(x,T) \quad (0 < t \leqq T) \tag{1.2'}$$

がなりたつ。

この不等式を R^N の max. norm $\| \ \|_\infty$ を用いて書き改めれば，

(1.3) $\|u(\cdot,t)\|_\infty \leqq C\,t^{-\frac{1}{m-1}}\|u(\cdot,T)\|_\infty$.

この式はとりも直さず時間逆方向の評価式を意味している。

一般の線型熱方程式の時間逆方向の評価式について少しばかり述べる。Ω は R^N の有界領域で u は

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{in } \Omega\times(0,T_0) \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T_0) \end{cases}$$

の古典解であるとき，$J(t)=\int_\Omega u(x,t)^2\,dx$ とおけば簡単な計算によって，$(\log J(t))'' \geqq 0$ が分り，このことから直ちに

(1.4) $J(t) \leqq J(0)^{1-\frac{t}{T}}J(T)^{\frac{t}{T}} \quad (0 \leqq t \leqq T)$

が出る（例えば，[6] 参照）。これがとりも直さず線型熱方程式の時間逆方向の評価式である。一般の抽象的発展方程式に対しても，この様な評価式はある条件のもとでなりたつ（[11] 参照）。

この様な形の評価式は発展方程式に限らず種々の偏微分方程式に対しても導びかれて

来た。例えば，Hadamardの三円定理は単位円板で正則な関数 $f(z)$ について，$M(r)=\max_{|z|\leqq r}|f(z)|$ とおくとき，$0<r_1<r_2<r_3<1$ ならば，$\exists\theta$ ($0<\theta<1$)；

$$M(r_2)\leqq M(r_1)^{\theta}M(r_3)^{1-\theta}.$$

従って，もしも $f=0$ in $\{|z|<r_1\}$ ならば，$f\equiv 0$ となる。この事は正則関数の一致の定理を意味している。

再び発展方程式に戻れば，時間逆方向の評価式が得られるとき，逆方向の Cauchy 問題の一意性が得られることになるが，そのことについては，半線型熱方程式の場合に既に [9]，[10]，[12]，[13] で分っている。

(1.3) を (1.4) と同じ種類の不等式とみなすことにすれば，(1.3) は L^{∞}－ノルム，(1.4) は L^{2}－ノルムということで (1.3) の方が (1.4) より，より精密な形の評価式と考えることが出来る。線型の場合よりも準線型の場合の方がより精密であるというのは奇異かも知れないが，それは (1.1) の解の非負性に依るものと考えればさほど奇異でもない。

我々は (1.3) で L^{∞}－ノルムを Hölder－ノルムでおきかえることが出来ないかを考える。それについては (1.2) の様な微分不等式から導くことは

もはや不可能であろう。我々としては別の方法によらざるを得ない。何故ならば，(1.2) は最大値原理，比較原理によるからである。

我々は [4] において (1.1) の解の正則性を示すために導いた評価式を §2 で紹介し，§3 では §2 で得られた評価式に重み（の関数）を付けた別の評価式を出すという [5] における方法を紹介する。そして，(1.3) で L^∞−ノルムを出来る丈 Hölder −ノルムでおきかえるという方針に沿って (1.3) と類似な評価式を出す。これは [5] の結果である。方法は，まず重みを付けた L^2−評価式を，半線型熱方程式についての時間逆方向の Cauchy 問題の一意性を出すという Lions and Malgrange [10] の方法に従い，次に重み関数の係数を適当に操作し，楕円型方程式の解に対する Hadamard の三円定理タイプの不等式を導くという，John [7] の方法に従う。

なおここでは文献は最小範囲におさえた。滲透媒質方程式に関する完ぺきな文献については [8] を参照されたい。

§2. 正則性と評価式

前節で述べた様に Bénilan [1] によれば，(1.1) の解 u について

$$\partial_t u \in L^p([\delta, T_0] \times B_R)$$

がなりたつ。$p=2$ のとき，この事実はなりたつであろうか？すなわち，前節の Barenblatt の例の性質(iii) で述べたことはなりたつであろうか？それに対する一つの答は次の通りである：

<u>定理</u> 1 ([4]). $1 < m < 3N/(3N-2)$ を仮定する。u_0 は $C_0^1(R^N)$ に属し，$u_0 \geqq 0$ とする。そのとき，(1.1) の解 u について，$\partial_t u,\ \partial_{x_i}\partial_{x_j} u^m \in L^2(R^N \times (0, T_0))$ $(i, j = 1, \cdots, N)$ がなりたつ。

<u>定理 1 の証明の方針</u>

Caffarelli and Friedman [2], [3] にある様な近似解について考える。すなわち，$\eta > 0$ に対して $u^\eta(x,t)$ は次の解とする：

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u^\eta = \Delta (u^\eta)^m & \text{in } R^N \times (0, T_0) \\ u^\eta(x, 0) = u_0(x) + \eta & \text{on } R^N. \end{cases}$$

このとき，$\eta \leqq u^\eta \leqq \max u_0 + \eta$ であることが知られている。

$v^n=(u^n)^m$ とおけば, (2.1)は次の式になる:

$$(2.1')\quad \begin{cases} (v^n)^{-\alpha}\partial_t v^n = m\Delta v^n & \text{in } R^N\times(0,T_0) \\ v^n(x,0)=\psi^n(x) & \text{on } R^N. \end{cases}$$

但し, $\alpha = 1-\frac{1}{m}$ で $\psi^n=(u_0+n)^m$

$\zeta\in C_0^2(R^N)$, $\zeta\geqq 0$ in R^N とし, $1\leqq j\leqq N$ なる j について関数 $-\zeta\,\partial_{x_j}^2 v^n$ を (2.1′)の前の式の両辺に掛けて $R^N\times(0,T)$ で積分する。そのとき部分積分と(2.1′)をくり返し用い, 更に Cauchy の不等式などを用いれば次の式が得られる:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|\zeta^{1/2}\nabla_x\partial_{x_j}v^n\|^2\,dt \\
\leqq\ & \frac{1}{2m}\,(\zeta(\psi^n)^{-\alpha}, (\partial_{x_j}\psi^n))^2 + \frac{\alpha}{6}\int_0^T(\zeta(v^n)^{-2}, (\partial_{x_j}v^n)^4)\,dt \\
& -\frac{\alpha}{6}\int_0^T(\partial_{x_j}\zeta\cdot(v^n)^{-1}, (\partial_{x_j}v^n)^3)\,dt \\
& +\frac{\alpha}{2}\sum_{i\neq j}\int_0^T(\zeta(v^n)^{-1}\partial_{x_i}^2 v^n, (\partial_{x_j}v^n)^2)\,dt \\
& -\int_0^T(\Delta v^n, \partial_{x_j}\zeta\cdot\partial_{x_j}v^n)\,dt \\
& -\int_0^T(\partial_{x_j}\zeta\cdot\nabla_x v^n, \nabla_x\partial_{x_j}v^n)\,dt \\
& +\int_0^T(\nabla_x\zeta\cdot\nabla_x v^n, \partial_{x_j}^2 v^n)\,dt.
\end{aligned}$$

ここで右辺第2項を処理することが一番重要で

$$\begin{aligned}
(\zeta(v^n)^{-2}, (\partial_{x_j}v^n)^4) &\leqq \frac{9}{1-\varepsilon}(\zeta, (\partial_{x_j}^2 v^n)^2) \\
&\quad + C(\varepsilon)(\zeta^{-1}(\partial_{x_j}\zeta)^2, (\partial_{x_j}v^n)^2) \qquad (\varepsilon>0)
\end{aligned}$$

なる不等式を準備する。そして結局

$$\sum_j\int_0^T \|\zeta^{1/2}\nabla_x\partial_{x_j}v^n\|^2\,dt$$

$$\leqq C\,[\,(\varsigma(\psi^{\eta})^{-\alpha}, |\nabla\psi^{\eta}|^2)$$
$$+\int_0^T (\varsigma^{-1}|\nabla\varsigma|^2, |\nabla_x v^{\eta}|^2)\,dt$$

がなりたつ。

特にςとして，$\varsigma(x)=\xi_n(x)^2$なるものをとる。但し，$\xi_n(x)=1$ $(|x|\leqq n)$，0 $(|x|>2n)$である。そして$n\to\infty$とすれば，$\int_0^T\|\partial_{x_i}\partial_{x_j}v^{\eta}\|^2dt$が$\eta$に関係しない量で上から評価され，最后に$\eta\downarrow 0$とすれば定理1が得られる。

§3. 重みをつけた評価式

R^Nにおける関数のλ指数$(0<\lambda<1)$のHölderノルムを$|\ \ |_\lambda$で表すことにする。$u(x,t)$は(1.1)の解とし，u_0は定理1と同じ仮定をみたすものとし，$0\leqq u_0\leqq K$，$K\geqq 1$とする。又，$0<T_1<T\leqq T_0$で$\beta=(T_1/T)^2$とおく。

$\varepsilon^2=\int_{R^N}u(x,T)^2dx$，$M^2=\int_{R^N}u(x,0)^{\alpha m}|\nabla_x u(x,0)^m|^2dx$とおき，$0\leqq 2\varepsilon\leqq M$を仮定する。

我々の目的は次の定理である：

<u>定理</u> 2 ([5]). $N=1$又は2とする。$N=1$のときは$1<m<2$とし，$N=2$のときは$1<m<1.04$とする。そのとき，$0<\lambda<\frac{1}{2m-1}$ならば次の不等式がなりたつ：

(3.1) $$\int_{T_1}^{T}(|u(\cdot,t)|_\lambda)^{2(2m-1)}dt \leqq CK^{2m\alpha}\varepsilon^\beta M^{2-\beta}.$$

但し，C は m, λ, T_1, T に依存するが，ε, M に依存しない定数である。

定理２の証明の方針

もしも次の評価式が示されれば，Sobolev の補題によって (3.1) がなりたつ：

(3.2)
$$\begin{aligned}&\int_{T_1}^{T}\int_{R^N}u^{2m(1+\alpha)}dx\,dt\\ &+\sum_i\int_{T_1}^{T}\int_{R^N}(\partial_{x_i}u^{m(1+\alpha)})^2dx\,dt\\ &+\sum_{i,j}\int_{T_1}^{T}\int_{R^N}(\partial_{x_i}\partial_{x_j}u^{m(1+\alpha)})^2dx\,dt\\ &\leqq CK^{2m\alpha}\varepsilon^\beta M^{1-\beta}.\end{aligned}$$

定理１の証明と同じく (2.1′) の近似解 v^n について考える。$k>(2/T_0^2)\log 2$ とし，$w^n(x,t)=v^n(x,t)\exp(kt^2/2)$ とおく。そのとき

$$\partial_t w^n-(m\exp(-\alpha kt^2/2))\cdot(w^n)^\alpha\Delta w^n + ktw^n=0$$

がなりたっている。従って

$$\begin{aligned}0 \geqq &-2\partial_t w^n\cdot(m\exp(-\alpha kt^2/2)\cdot(w^n)^\alpha\Delta w^n\\ &+ktw^n)+m^2\exp(-\alpha kt^2)\cdot(w^n)^{2\alpha}(\Delta w^n)^2\\ &+k^2t^2(w^n)^2+(\partial_t w^n)^2\\ &+2kmt\exp(-\alpha kt^2/2)\cdot(w^n)^{1+\alpha}\Delta w^n.\end{aligned}$$

この式から出発して，定理1の証明と同じく部分積分，Cauchyの不等式をくり返し用い，(2.1′)を再び考りょすれば

$$
\begin{aligned}
(3.3)\quad & \int \zeta^2 (w^n)^{2\alpha-1} (\Delta w^n) |\nabla w^n|^2 dx \\
& + \frac{1}{(1+\kappa)(1+\alpha)} \int \zeta^2 (w^n)^{2\alpha} (\Delta w^n)^2 dx \\
& \geqq \left[\frac{1}{3}(1-2\alpha) - \frac{N+1}{2a}\frac{1+3\alpha}{1+\alpha} - \frac{\alpha(N-1)}{b(1+\alpha)} - \rho \right] \cdot \\
& \qquad \int \zeta^2 (w^n)^{2\alpha-2} \left(\sum_i (\partial_{x_i} w^n)^4 \right) dx \\
& + \left[\frac{1}{(1+\kappa)(1+\alpha)} - \frac{a(N-1)}{2}\frac{1+3\alpha}{1+\alpha} - \rho \right] \cdot \\
& \qquad \int \zeta^2 (w^n)^{2\alpha} \left(\sum_i (\partial^2_{x_i} w^n)^2 \right) dx \\
& + \left[\frac{1}{(1+\kappa)(1+\alpha)} - \frac{b\alpha}{1+\alpha} - \rho \right] \cdot \\
& \qquad \int \zeta^2 (w^n)^{2\alpha} \left(\sum_{i \neq j} (\partial_{x_i}\partial_{x_j} w^n)^2 \right) dx \\
& - C \Big(\int \zeta^{-2} |\nabla \zeta|^4 (w^n)^{2+2\alpha} dx \\
& \qquad + \int |\nabla \zeta|^2 (w^n)^{2\alpha} |\nabla w^n|^2 dx \Big).
\end{aligned}
$$

但し，$a, b > 0$ で ρ, κ はどんなに小さくてもよい正数。ここで括弧[　]内がすべて正である様に a, b を撰ぶことが出来るための条件は $N=1$ のとき $m < 2$ であり，$N=2$ のときは

$$
3\left(\frac{1}{2a}\frac{1+3\alpha}{1+\alpha} + \frac{\alpha}{b(1+\alpha)} \right) < 1 - 2\alpha
$$

$$
\frac{1+3\alpha}{2} < \frac{1}{a}, \quad \alpha < \frac{1}{b}
$$

となる。この条件は $42\alpha^2 + 22\alpha - 1 < 0$ と同等であり，$1 < m < 1.04$ ならばみたされる。

結局次の式が得られる：

$$
\begin{aligned}
(3.3)\text{の左辺} \geqq C_0 \Big[&\int \zeta^2 (w^\eta)^{2(\alpha-1)} \Big(\sum_i (\partial_{x_i} w^\eta)^4\Big) dx \\
&+ \int \zeta^2 (w^\eta)^{2\alpha} \Big(\sum_{i,j} (\partial_{x_i}\partial_{x_j} w^\eta)^2\Big) dx
\end{aligned}
$$

$$
- C \Big[\int \zeta^{-2} |\nabla \zeta|^2 (w^\eta)^{2+2\alpha} dx + \int |\nabla \zeta|^2 (w^\eta)^{2\alpha} |\nabla w^\eta|^2 dx \Big].
$$

但し，$C_0 > 0$.

ζ を前節の ξ_n にとり，$n \to \infty$，$\eta \downarrow 0$ とすれば

$$
\begin{aligned}
&k \int_0^T \int \exp(kt^2) \cdot t \, |\nabla u^{m(1+\frac{\alpha}{2})}|^2 \, dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int \exp(kt^2) \cdot \Big(\sum_{i,j} (\partial_{x_i}\partial_{x_j} u^{m(1+\alpha)})^2\Big) dx\,dt \\
&+ k \int_0^T \int \exp(kt^2) \cdot u^{2m} \, dx\,dt \\
&\leqq C \Big[\int u(x,0)^{\alpha m} |\nabla u(x,0)^m|^2 \, dx\,dt \\
&\qquad + kT \exp(kT^2) \cdot \int u(x,T)^{2m} dx \Big].
\end{aligned}
$$

ここで $k = (2/T^2)\log(M/\varepsilon)$ にとれば求める式(3.2)が得られる。

文　献

[1] P. Bénilan, A strong regularity L^p for solution of the porous media equation, Res. Notes in Math. 89, 39–58.

[2] A. Caffarelli and A. Friedman, Regularity of the free boundary for the one-dimensional flow of gas in a porous medium, Amer. J. Math. 101 (1979), 1193–1218.

[3] A. Caffarelli and A. Friedman, Regularity of the free boundary of a gas flow in an n-dimensional porous medium, Indiana Univ. Math. J., 29 (1980), 361–391.

[4] K. Hayasida, On the regularity properties for solutions of the Cauchy problem for the porous media equation, Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1989), 107–112.

[5] K. Hayasida, On a backward estimate of solutions of the porous media equation, to appear.

[6] 飯野理一, 堤正義, 偏微分方程式入門, サイエンス社 (1975).

[7] F. John, Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound, Comm. Pure Appl. Math., 13 (1960), 551–585.

[8] A. S. Kalashnikov, Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second order parabolic equations, Russian Math. Surveys 42 (1987), 169–222.

[9] M. Lees and M. H. Protter, Unique continuation for parabolic differential equations and inequalities, Duke Math. J., 28 (1961), 369–382

[10] J. L. Lions and B. Malgrange, Sur l'unicité rétrograde dans les problèmes mixte parabolique, Math. Scand. 8 (1960), 277–286.

[11] K. Miller, Logarithmic convexity results for holomolphic semigroups, Pacific J. Math., 58 (1975), 549-551.

[12] S. Mizohata, Le problème de Cauchy pour le passé pour quelque équations paraboliques, Proc. Japan Acad., 34 (1958), 693-696.

[13] H. Yamabe, A unique continuation theorem of a diffusion equation, Ann. of Math., 69 (1959), 462-466.