数理解析研究所講究録
第771巻 1991年 1-76

二階算術の諸公理 AC, DC, CA, BI の関係——Cut－Elimination の初等的応用として

広大・総合科・数理情報　新井　敏康　(Toshiyasu Arai)

§1. 準備

L_1：一階算術の言語。constants は $=$，$<$ と primitive rec. functions (の定義)に対応する function constants 全部。first order variables は $x, y, z, \cdots, n, m, k$ で表わす。これらは number variables とも言う。

L_2：二階算術の言語。$L_2 = L_1 + \{X_i : i \in \omega\}$. 各 X_i は unary set variable。この原稿のほとんどすべてのところで二階算術の二階の variables は set (predicate) variables のみ, i.e., function variables は含まないとしてあるが、ときどき（WLK や BI がからむとき）function variables を入っていることになることがある。

記法　$n \in X \Leftrightarrow X(n)$　;　$n \notin X \Leftrightarrow \neg X(n)$.

L_2 の formulae の集合 $\mathcal{F}$ について次の schemata を考える：

$A \in \mathcal{F}$ について．

$\mathcal{F}$-CA: $\exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$

$\mathcal{F}$-AC: $\forall n \exists X A(n, X) \to \exists Y \forall n A(n, (Y)_n)$ 但し、

$(Y)_n = \{m : Y(\pi(n,m))\}$, πはある pairing function w/ inverses π_0, π_1.

$\mathcal{F}$-DC: $\forall X \exists Y A(X, Y) \to \forall U \exists Z [(Z)_0 = U \ \& \ \forall n A((Z)_n, (Z)_{n+1})]$

$\mathcal{F}$-GDC: $\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y) \to \forall U \exists Z \forall n [(Z)_0 = U \ \& \ A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})]$

$\mathcal{F}$-IA: $A(0) \ \& \ \forall n (A(n) \to A(n+1)) \to \forall n A(n)$

また、$\mathcal{F} = \Delta^0_1, \Delta^1_1, \Delta^1_2, \cdots$ について、

$\mathcal{F}$-CA: $\forall n (A(n) \leftrightarrow \neg B(n)) \to \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow A(n))$

$A, B \in \Sigma^0_1, \Sigma^1_1, \Sigma^1_2, \cdots$.

Formulae の集合はふつうに定義される。例えば、

1. $\Sigma^0_0 = \Pi^0_0 = \Delta^0_0 =$ the set of bounded formulae in L_2
2. Σ^0_1 は $\exists n B$ w/ $B \in \Pi^0_0$ なる形の formulae の集合。
3. Σ^1_1 は $\exists X A$ w/ $A \in \Pi^0_\infty = \Pi^1_0 = \Sigma^1_0$ (自 second order の quantifier なし) の形の formulae の集合。

NB. これらの formulae の集合の元には二階の parameter は occur してよい。

Rem. $\mathcal{F} = \Sigma^1_1$ などのように、$\mathcal{F}$が次で閉じていれば、$\mathcal{F}$-GDC の最初の集合 U は指定しなくてよい:

$A \in \mathcal{F} \Rightarrow (n = 0 \ \& \ Y = U) \vee (n \neq 0 \ \& \ A(n, X, Y)) \in \mathcal{F}$.

これは、$\mathcal{F}$に set parameter (X, Y以外の!) を許したからである。Σ^1_1-や Σ^1_1-DC でも U を指定しなくてよいかは不明。

Formulaeの集合$\mathcal{F}$について、

1. $\mathcal{F}^{-} \equiv \{A \in \mathcal{F} : A$に二階のparameterなし$\}$

2. $\mathcal{F}^{=} \equiv \{A \in \mathcal{F}^{-} : A$に一階のparameterなし$\}$.

以下で考える二階算術の理論は、とくに断わらない限り、次の理論Σ^0_0-CA_0をbase theoryとして含む：Σ^0_0-CA_0の公理は、

1. L_1のconstantsについての公理。

2. Σ^0_0-CA

3. IA : $\forall X [0 \in X \ \& \ \forall n (n \in X \to n+1 \in X) \to \forall n (n \in X)]$.

そして、公理（図式）Sについて、理論Σ^0_0-$CA_0 + S$（Sの公理をΣ^0_0-CA_0に加えた理論）そのものをS_0と書き、また、理論Σ^0_0-$CA_0 + S + \Pi^1_\infty$-IA = Σ^0_0-$CA + S$のことをSと書く。S_0とSの違いは、Induction Axiomが、一つのΠ^1_1-sentence IAではいっているか（S_0）、すべてのL_2のformulae（$=\Pi^1_\infty$）に、IAを適用してよいか（S）の差。

$S = \mathcal{F}$-AC, $\mathcal{F}$-DC, $\mathcal{F}$-GDC, Δ^1_i-CAについて、SR_0, SRは、公理Sを対応するruleでおきかえてS_0, Sから得られる理論を表わす：Sの公理は$A \to B$（のuniversal closure）という形をしている。SRは、A / Bというrule、つまり、$SR \vdash A \Rightarrow SR \vdash B$ということ。但し、$\Delta^1_i$-$CAR$等は慣習に従って、$\Delta^1_i$-$CR$と書く。

次に、Π^1_n-$CA^{<\alpha}$ の定義。$\prec$ を、ある primitive rec. well-ordering w/ the least element 0 とし、primitive rec. な predicates, function Suc, Lim, pd で、 $Suc(\beta) \Leftrightarrow \beta$ is a successer ordinal wrt $\prec$;

$Lim(\beta) \Leftrightarrow \beta$ is a limit ordinal wrt $\prec$;

$$pd(\beta) = \begin{cases} \beta \text{ の } \prec \text{ についての predecessor} & \text{if } Suc(\beta) \\ \beta & \text{o.w.} \end{cases}$$

となるものがあるとする。(具体的に考えるのは、ε_0 や Γ_0 の standard well-ordering だけ。) 各 $n \geq 0$ について formula $Hier^n_\alpha(X,Y)$ を次のように定義する;

$$Hier^n_\alpha(X,Y) \Leftrightarrow (Y)_0 = X \ \& \ \forall\beta \prec \alpha [(Suc(\beta) \to (Y)_\beta = P_n((Y)_{pd(\beta)})) \ \&$$
$$\& \ (Lim(\beta) \to (Y)_\beta = \sum_{\gamma \prec \beta}(Y)_\gamma)]$$

但し、1. $X = Y \Leftrightarrow \forall n(n \in X \leftrightarrow n \in Y)$

2. $\sum_{\gamma \prec \beta}(Y)_\gamma = \{(\gamma, n) : \gamma \prec \beta \ \& \ n \in (Y)_\gamma\}$

3. $P_n(X, x)$ は Π^1_n-complete predicate.

3.0 $P_0(X) \triangleq X' \triangleq X$ の jump $\triangleq \{n : \{n\}^X(n)\downarrow\}$

$= \{n : \exists m \, T^X(n, n, m)\} = \{n : \exists m \, T(n, n, \bar{X}(m), m)\}$

T: Kleene の T-predicate, $\bar{X}(m) = \langle x_0, \cdots, x_{m-1}\rangle$ s.t.

$x_i = 0 \Leftrightarrow i \in X \quad \forall i < m.$

(ここでは Π^1_0 を Π^0_1 としている)

3.1 $P_1(X) \triangleq X$ の hyper-jump $\triangleq \mathcal{O}^X$ etc.

3.2. $n \geq 2$ については $P_n(X)$ は Π^1_n-predicate in X を enumerate してつくる。

各'ordinal' α について、theories $\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha_0$, $\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha$ を、

$$\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha_0 \triangleq \Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \forall X \exists Y\, Hier^n_\alpha(X,Y)$$

$$\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha \triangleq \Sigma^0_0\text{-}CA + \forall X \exists Y\, Hier^n_\alpha(X,Y)$$

また、

$$\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha}_0 \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^1_n\text{-}CA^\beta_0 = \Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \{\forall X \exists Y\, Hier^n_\beta(X,Y) : \beta<\alpha\}$$

$$\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha} \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} \Pi^1_n\text{-}CA^\beta$$

とする。(ふつうは、αを下に書いて、$\Pi^1_n\text{-}CA_\alpha$とするが、こうすると、IAを制限していることを表わす添字の0を書く場所がなくなってしまう。S. Feferman流なら、$\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha_0$を$(\Pi^1_n\text{-}CA)_\alpha\restriction$と書く。)

明らかに、$\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha_0 \vdash \forall X \exists Y\, Hier^n_\beta(X,Y)$ for each $\beta<\alpha\cdot\omega$
より、$\Pi^1_n\text{-}CA^\alpha_0 = \Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha\cdot\omega}_0$。従って、$\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha}_0$, $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\alpha}$では、$\alpha$がadditive principalのとき、i.e., $\alpha=\omega^\beta$の形のときだけ扱えばよい。これはabsolute hierarchy $\Pi^{1-}_n\text{-}CA^\alpha_0$, $\Pi^{1-}_n\text{-}CA^\alpha$ではうまくいかない:

$$\Pi^{1-}_n\text{-}CA^\alpha_0 \triangleq \Pi^1_{n-1}\text{-}CA_0 + \exists Y\, Hier^n_\alpha(\phi, Y) \qquad (X=\phi,\ \text{空集合})$$

但し、$\Pi^1_{-1}\text{-}CA \triangleq \Sigma^0_0\text{-}CA$, $\Pi^1_0\text{-}CA \triangleq \Pi^0_1\text{-}CA$。($\Pi^1_{-1}\text{-}CA = \Delta^0_1\text{-}CA$のほうがいいかもしれぬ)

Lemma 0.1

1) $S = AC, DC, GDC$について、

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}\tilde{S} = \Pi^1_n\text{-}\tilde{S}$ 　但し、$\Pi^1_0 \triangleq \Pi^0_2$ (ここでは) で、

$\tilde{S} \in \{S, S_0, SR, SR_0\}$.

2) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}AC$

3) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR$

4) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \omega^\omega$

5) $\Delta^1_{n+1}\text{-}CR + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \omega^\omega$

6) $\Delta^1_{n+1}\text{-}CA + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \forall X \exists Y\, \mathrm{Hier}^n_\alpha(X,Y)$ for each $\alpha < \varepsilon_0$.

従って、

7) $$\begin{array}{ccccccc} & & & \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-}CA_0 & & & \\ \Pi^1_n\text{-}CA_0 & \subseteq & \Delta^1_{n+1}\text{-}CR_0 & & \subseteq & \Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0 \\ & & & \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR_0 & & & \end{array}$$

8) $\Pi^1_n\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}GDC_0$

9) $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-}CR + \Sigma^1_n\text{-}AC \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR + \Sigma^1_n\text{-}AC$
$\subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}GDCR$

10) $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\varepsilon_0} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-}CA + \Sigma^1_n\text{-}AC \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}AC \subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}DC$
$\subseteq \Sigma^1_{n+1}\text{-}GDC.$

但し 5), 6), 9), 10) で、$n=0$ のときは $+\Sigma^1_0\text{-}AC$ は除く。また、$n=1$ のときは $\Delta^1_2\text{-}CR \vdash \Sigma^1_1\text{-}AC$ より除く。しかし $n>1$ のときは、$\Delta^1_{n+1}\text{-}CR$ or $\Delta^1_{n+1}\text{-}CA$ or $\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR \vdash \Sigma^1_n\text{-}AC$ 及び $\Pi^1_n\text{-}CA^{<\omega^\omega} \subseteq \Delta^1_{n+1}\text{-}CR$ 等は不明。

Proof. 1) $n \neq 0$ は明らか。各 $A \in \Pi^0_\infty$ について ある $B \in \Pi^0_2$ があって

$ACA_0 = \Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash A \leftrightarrow \exists X B$ (Skolem する)

よって $\Pi^0_2\text{-}SR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$ で十分。明らかに、

$\Pi^0_2\text{-}ACR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$ ($\because \vdash \forall n \exists X(n \in X \leftrightarrow A(n))$)

次に、$A \in \Pi^0_2$ について、$\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \forall n \exists X A(n,X)$ とする。

$B \in \Pi^0_2$ を、

$B(X,Y) \Leftrightarrow (X)_0 \neq \phi \to \forall n($ n is the least element of $(X)_0 \to$

$\to A(n,(Y)_1)$ & $n+1$ is the least element of $(Y)_0)$

とおく。仮定より $\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \forall X \exists Y B(X,Y)$. よって、$\exists Y$ s.t.

$(Y)_0 = \{\pi(0,0)\}$ and $\forall m[(Y)_{m,0} \neq \phi \to \forall n($ n is the least element of $(Y)_{m,0} \to A(n,(Y)_{m+1,1})$ & $n+1$ is the least element of $(Y)_{m+1,0}]$

但し. $(Y)_{m,i} = ((Y)_m)_i$。 ind. on m で $\forall m$; m is the least element of $(Y)_{m,0})$ よって $\forall m A(m,(Y)_{m+1,1})$. Put

$Z \equiv \{\pi(m,n) : n \in (Y)_{m+1,1}\}$ Then $\forall m A(m,(Z)_m)$。つまり.

$\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \forall n \exists X A(n,X) \Rightarrow \Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \exists Z \forall n A(n,(Z)_n)$, i.e.,

$\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^0_2\text{-}ACR$。 上のことより $\Pi^0_2\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$。

2) 1) より $i \leq n$ についての ind. で $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \vdash \Pi^1_i\text{-}AC$ を言えばよい。$i=0$ は 1) と同じ。$i>0$ のとき、i.e., $A \in \Pi^1_i$ のとき.

1) でつくった B が $B \in \Pi^1_i$ を示すには. IH(= Induction Hyp.) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DC_0 \vdash \Sigma^1_{i-1}\text{-}AC$ を使えばよい。

3) $A \in \Pi^1_n$ について. 1) の B が $B \in \Pi^1_n$ を示すには. 2) より.

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}DC$ で十分。 $A \in \Sigma^1_n$ なら

$B(X,Y) \Leftrightarrow \forall X \exists Y A(X,Y) \to A(X,Y) \in \Sigma^1_{n+1}$

より O.K.

4) k についての metainduction で $\forall X \exists Y \, Hier^n_{\omega^k}(X, Y)$ を示す。

$(k=0)$ $\Pi^0_2\text{-}ACR_0 \vdash \Pi^0_1\text{-}CA$ と同様にして、$\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR_0 \vdash \Pi^1_n\text{-}CA$

3) より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Pi^1_n\text{-}CA$.

(Induction Step) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \forall X \exists Y \, Hier^n_{\omega^k}(X, Y)$ とする。

$\forall X \exists Y \, Hier^n_{\omega^k}((X)_{\omega^k}, Y)$ である。2) と $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}DC$, 3)

より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Sigma^1_n\text{-}AC$ 。よって $Hier^n_\alpha(X,Y) \in \Delta^1_{n+1}$ in

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0$ $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR$ より、与えられた X について Y を、

$Hier^n_{\omega^k}(X, (Y)_0) \;\&\; \forall m \, Hier^n_{\omega^k}((Y)_{m,\omega^k}, (Y)_{m+1})$ ととり, Z を

$$\begin{cases} (Z)_{\omega^k \cdot m + r} = (Y)_{m,r} & m < \omega \;\&\; r < \omega^k \\ (Z)_{\omega^{k+1}} = \Sigma_{\alpha < \omega^{k+1}} (Z)_\alpha = \{(\omega^k \cdot m + r, x) : x \in (Y)_{m,r}\} \end{cases}$$

とおくと. ind on m で $\forall m < \omega \, Hier^n_{\omega^k \cdot (m+1)}(X, Z)$ よって

$Hier^n_{\omega^{k+1}}(X, Z)$ (induction してよいのは $Hier^n_\alpha(X,Y) \in \Delta^1_{n+1}$

in $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0$ で 3), 7) より $\Sigma^1_{n+1}\text{-}DCR_0 \vdash \Delta^1_{n+1}\text{-}CR$ だから).

5), 6) $\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$, $\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$ を、$A \in \Sigma^1_{n+1}$ について、

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$: $\forall n \exists! X \, A(n, X) \to \exists Y \forall n \, A(n, (Y)_n)$,

$\Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$ を対応する rule とすると、

(☆) $\Delta^1_{n+1}\text{-}CA + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}AC!$

$\Delta^1_{n+1}\text{-}CR + \Sigma^1_n\text{-}AC \vdash \Sigma^1_{n+1}\text{-}ACR!$

∵) $A \in \Sigma^1_{n+1}$ について $B \in \Sigma^1_{n+1}$ を、

$B(n, m, k) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} \exists X [A(n, X) \;\&\; ((m \in X \;\&\; k = 0) \vee (m \notin X \;\&\; k = 1))]$

$\forall n \exists ! X A(n, X) \rightarrow \forall n \forall m \exists ! k\ B(n, m, k)$,

$\forall n \forall m \exists ! k\ B(n, m, k) \rightarrow \forall n \forall m \forall k\ [B(n, m, k) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow \forall u (B(n, m, u) \rightarrow k = u)]$.

となるから Δ^1_{n+1}-CA $+ \Sigma^1_n$-AC より $\exists Y$ s.t.

$\forall n, m, k (\ (n, m, k) \in Y \leftrightarrow B(n, m, k))$

$Z \overset{\mathrm{d}}{=} \{(n, m) : (n, m, 0) \in Y\}$ とおくと、$\forall n \exists ! X A(n, X)$ より $\forall n A(n, (Z)_n)$.

いま $H(\alpha)$ を、

$H(\alpha) \overset{\mathrm{d}}{\Leftrightarrow} \forall X \exists ! Y\, Hier^n_\alpha(X, Y)\ \&\ \alpha < \varepsilon_0$

Δ^1_{1+n}-CA $+ \Sigma^1_n$-AC $\vdash \forall \beta < \alpha H(\beta) \rightarrow H(\alpha)$

Δ^1_{n+1}-CR $+ \Sigma^1_n$-AC $\vdash \forall \beta < \alpha H(\beta) \Rightarrow \Delta^1_{n+1}$-CR $+ \Sigma^1_n$-AC $\vdash H(\alpha)$

∵) $Lim(\alpha)$ のとき、与えられた X について、仮定より

$\forall \beta < \alpha \exists ! Y\ Hier^n_\beta(X, Y)$. Σ^1_n-AC より $Hier^n_\beta(X, Y) \in \Sigma^1_{n+1}$.

Σ^1_{n+1}-AC! より $\exists Y \forall \beta < \alpha Hier^n_\beta(X, (Y)_\beta)$.

$Z \overset{\mathrm{d}}{=} \cup_{\beta < \alpha} (Y)_\beta = \{x : \exists \beta < \alpha (x \in (Y)_\beta)\}$ とおくと $\forall \beta < \alpha Hier^n_\beta(X, Z)$

$W \overset{\mathrm{d}}{=} Z \cup \{\alpha\} \times Z$ として $Hier^n_\alpha(X, W)$ となる。uniqueness は明らか。

よって、full induction $= \Pi^1_\infty$-IA があれば、各 $\alpha < \varepsilon_0$ までの

超限帰納法がすべての formula について証明できることより、6)

は O.K. 一方、Δ^1_{n+1}-CR $+ \Sigma^1_n$-AC $\vdash H(\alpha)$ for each $\alpha < \omega^\omega$ は、

Δ^1_{n+1} CR $+ \Sigma^1_n$-AC $\vdash H(\omega^k)$ を k についての metainduction.

$\vdash H(\omega^k)$ とする。Π^1_∞-IA より $\vdash \forall n H(\omega^k \cdot (n+1))$ よって

$\forall \beta < \omega^{k+1} H(\beta)$. Σ^1_{n+1}-ACR! より OK, $H(\omega^{k+1})$. //

以下の証明論的議論をするのに都合のよい logic calculus を定義する。

Def. 1. L_2（でなくてもよいが）の formula は、以下すべて negation normal form に書かれているとする。すなわち、formula は、atomic formulae とその否定 $s=t$, $s\neq t$, $s<t$, $s\not< t$, $t\in X$, $t\notin X$, etc. から logical operator $\wedge, \vee, \forall, \exists$ をほどこして得られるものに限る。formula A について、$\neg A$ は（A: atomic 以外では）記号列 A の左に記号 $\neg$ を書いた記号列を表わすのではなく、de Morgan の法則 $\neg(A\wedge B)=\neg A\vee\neg B$ 等と二重否定の除去 $\neg\neg A=A$ によってつくられる formula (in negation normal form!) を表わす。$A\to B$ は $\neg A\vee B$ のこと等。

2. formulae の有限集合を <u>sequent</u> とよび、$\Gamma, \Delta, \Lambda, \cdots$ で表わす。$\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$ のとき、Γ の意味は $A_1\vee\cdots\vee A_n$ のこと。$n=0$ のときは偽、矛盾を表わす。

3. sequents Γ, Λ と formula A について、

$\Gamma, \Lambda \triangleq \Gamma\cup\Lambda$ （$\Gamma=\{A_1,\cdots,A_n\}$, $\Lambda=\{A_{n+1},\cdots,A_m\}$ なら $\Gamma,\Lambda=\{A_1,\cdots,A_m\}$）

$\Gamma, A \triangleq \Gamma\cup\{A\}$。

以下、基本となる純粋に論理的な logic calculus L_2K を定義する。L_2K の公理（始式ともいう）と推論（図）は以下のとおり：

(Ax)　$\neg A, A, \Gamma$　　A : atomic（Γ は 任意の sequent，以下同じ）

$$(\wedge)\ \frac{\Gamma, A_0 \qquad \Gamma, A_1}{\Gamma, A_0 \wedge A_1} \qquad (\vee)\ \frac{\Gamma, A_i}{\Gamma, A_0 \vee A_1}\ (i = 0\ 1)$$

$$(\forall^1)\ \frac{\Gamma, A(x)}{\Gamma, \forall x A(x)} \qquad (\exists^1)\ \frac{\Gamma, A(t)}{\Gamma, \exists x A(x)}$$

但し，variable x は 下式 $\Gamma, \forall x A(x)$

に free には occur しない。

$$(b\forall)\ \frac{\Gamma, x \nless t, A(x)}{\Gamma, \forall x < t\, A(x)} \qquad (b\exists)\ \frac{\Gamma, t_1 < t \qquad \Gamma, A(t_1)}{\Gamma, \exists x < t\, A(x)}$$

但し、variable x は 下式 $\Gamma, \forall x < t\, A(x)$

に free には occur しない。

$$(\forall^2)\ \frac{\Gamma, A(X)}{\Gamma, \forall X A(X)} \qquad (\exists^2)\ \frac{\Gamma, A(X)}{\Gamma, \exists X A(X)}$$

但し，variable X は 下式 $\Gamma, \forall X A(X)$

に free には occur しない。

$$(\text{cut})\ \frac{\Gamma, \neg A \qquad A, \Lambda}{\Gamma, \Lambda}$$

ここに，formula A（又は $\neg A$）を，この (cut) の <u>cut formula</u> と

よぶ。

次に，余計な rules（公理 or 推論）の入った場合を考える。

Def. 1. <u>rule</u> とは、次の4条件をみたす triple $\langle \langle \Gamma_i \rangle_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$ のこと: i) $\langle \Gamma_i \rangle_{i\leq n}$ は sequents の有限列 $(n \geq 0)$

ii) $\bar{a}, \bar{b}$ は (free) variables $a_0, \cdots, a_{m-1}$ と $b_0, \cdots, b_{k-1}$ の列で、

$\# \{a_0, \cdots, a_{m-1}, b_0, \cdots, b_{k-1}\} = m+k$ (つまり $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$, $a_i \neq b_j$) $(m, k \geq 0)$

iii) $\Gamma_0, \cdots, \Gamma_n$ に occur する free variables は $\bar{a} \cup \bar{b}$ に限る ($\bar{a} \cup \bar{b}$ が全部、実際に occur していなくてもよい)

iv) a_i $(i < m)$ は Γ_n に occur しない。

◎ 但し、$\bar{a}, \bar{b}$ はいずれの sort の variables でもよい。つまり、例えば、$\bar{a} = a_0, \cdots, a_{m-1}$ は、$a_0 = x_0, \cdots, a_i = x_i$, $a_{i+1} = X_{i+1}, \cdots, a_{m-1} = X_{m-1}$ で、$x_0, \cdots x_i$ は first order variables、$X_{i+1}, \cdots, X_{m-1}$ は second order variables、$-1 \leq i \leq m-1$, etc.

2. rules の集合 $\mathcal{R}$ が <u>adequate</u> とは、$\mathcal{R}$ に入っている rule $\langle \langle \Gamma_i \rangle_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$ の $\bar{a}$ を、上の ii), iv) をみたす範囲で他の variables $\bar{a}' = a_0', \cdots, a_{m-1}'$ (勿論、sort がそろっていないといけない) に書きかえた rule $\langle \langle \Gamma_i' \rangle_{i\leq n} : \bar{a}' : \bar{b} \rangle$ がまた、$\mathcal{R}$ に属すこと。ii) は $a_i' \neq a_j'$, $a_i' \neq b_j$、iv) は a_i' は Γ_n に occur しない、Γ_i' は Γ_i の中の variables $\bar{a}$ を同時に $\bar{a}'$ でおきかえて得られる sequent。

3. rule $\langle \langle \Gamma_i \rangle_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$ の <u>instance</u> とは、次の形の図形:

$$\frac{\Gamma_0(\bar{a} : \bar{t}), \Lambda \quad \cdots \quad \Gamma_{n-1}(\bar{a} : \bar{t}), \Lambda}{\Gamma_n(\bar{a} : \bar{t}), \Lambda} \qquad (\Gamma_n(\bar{a} : \bar{t}) = \Gamma_n(\bar{t}))$$

ここに、

i) Λ は、variables $\bar{a}$ が occur しない勝手な sequent。

ii) $\bar{t}$ は、terms の有限列 $t_0, \cdots, t_{k-1}$ で、$\bar{a}$ の中の variables は $\bar{t}$ に occur しないようなもの。($\bar{b} = b_0, \cdots, b_{k-1}$)

◎ 勿論、term t_i の sort は、variable b_i の sort とそろっていないといけない。つまり、b_i が first order の variable なら、t_i はふつうの意味での、L_2 での term、b_i が second order なら、t_i は、second order の variable, i.e., second order の term は variable のみ。

・$\Gamma_i(\bar{a}:\bar{t})$ は、Γ_i の中の variables $\bar{b}$ に terms $\bar{t}$ を同時に代入して得られる sequent を表わす。

・$\Gamma_n(\bar{t})$ の元となる formula を、この instance の <u>principal formula</u> とよぶ

4. adequate set R of rules について、L_2K_R とは、R の中の rules の instances を含んでもよいように証明図の概念を拡げた体系。L_2K_R の証明図を <u>R-proof</u> とよぶ。つまり、R-proof とは、(Ax) から出発して、L_2K の推論と、R の rules を適用して得られる、有限の木の形をした図形のこと。ある R-proof の一番下にある sequent を、その R-proof の <u>endsequent</u>(終式)とよぶ。

Rem. 1. rule $\{\langle\Gamma_i\rangle_{i\leq n} : \bar{a} : \bar{b}\}$ は、

$\forall\bar{v}[\forall\bar{u}\ \Gamma_0(\bar{u}:\bar{v}) \wedge \cdots \wedge \forall\bar{u}\ \Gamma_{n-1}(\bar{u}:\bar{v}) \rightarrow \Gamma_n(\bar{v})]$

という公理を入れることと等価である。(話は逆。上の形の公理をruleに書きかえる。)

2. $n=0$ のときのrule $\{(\Gamma_i)_{i<n} : \bar{a} : b\}$ は、extra initial sequent $\Gamma_0(\bar{a}), \Lambda$ を入れることにあたる。

Def. R-proof P が <u>quasi normal</u> とは、P の中のcut formulaがすべて、あるrule $\in R$ のあるinstanceのprincipal formula (と、formulaとして同じ [= formulaのoccurrences in P を区別しない]) になっているか、atomic formulaになっていること。

Theorem (partial cut elimination thm for L_2K_R) 0.2

与えられた R-proof P について、endsequentが P と同じでquasi normalな R-proof P^{cf} が存在する。

証明はふつうにできる、e.g. H. SchwichtenbergのHandbook article [10] を見よ。勿論、R がprimitive rec. な限り、$P \mapsto P^{cf}$ はprimitive rec. に (しかもPRA = Primitive Recursive Arithmeticでdemonstrablyに) とれる。

NB. quasi normalの定義で、cut formulaとしてatomicなものを許したのは、$(b\forall)$, $(b\exists)$ の $s<t$ をcut formulaとする(cut)があ

るから。

Corollary 0.3 sequent Γ が L_2K_R で証明できるなら、Γ に至る L_2K_R の R-proof P で、P の中の任意の formula が $\Gamma \cup \bigcup R \cup$ Atm の中のある formula の subformula になっているものが存在する。

但し 1. $\bigcup R \triangleq \bigcup \{ \Gamma_i(\bar{a}:\bar{t}) : \langle \{\Gamma_i\}_{i\le n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle \in R,\ i \le n,\ \bar{t}$ は terms の列$\}$

2. Atm $\triangleq$ the set of atomic and negated atomic formulae
（実際には、$s<t$, $s \not< t$ の形のみで十分）

3. formula の subformula は Gentzen 風のそれ, e.g., $\forall u A(u)$ の subformula として、$A(t)$（t は u と同じ sort の勝手な term）も許す。

つまり、P の中の formula は、Γ の中の formula の subformula か、ある rule $\in R$（の instance）に occur している formula の subformula か、$s<t$, $s \not< t$ の形に限るということ。

Rem. rule $\langle \{\Gamma_i\}_{i\le n} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$, $\Gamma_n = \{A_0, \cdots, A_{\ell-1}\}$ のかわりに、rule $\langle \{\Gamma_i'\}_{i\le n+\ell} : \bar{a} : \bar{b} \rangle$,
$$\Gamma_i' = \begin{cases} \Gamma_i & , i<n \\ \neg A_j & , i=n+j,\ j<\ell \\ \phi & , i=n+\ell \end{cases}$$
を入れても等価である。よって、すべての rule $\in R$ がこのような

もの，i.e. $\langle\langle\Gamma_i\rangle_{i\le n}:\bar{a}:\bar{b}\rangle\in\mathcal{R}\Rightarrow\Gamma_n=\phi$ とすれば．Theorem は，cut formula として，$s<t$ の形のみ残る proof がとれる，となる。（Corollary はこうしても同じ）

§2. AC, DC の iterated CA に対する conservation results.

ここでは，次の定理の A. Cantini [3] による証明を紹介する：formulae の集合 C_n, D_n を，

$$C_n \triangleq \begin{cases} \Pi^1_2 \ (\text{formulae}) & ,n=0 \\ \Pi^1_3 & ,n=1 \\ \Pi^1_4 & ,n\ge 2 \end{cases} \qquad D_n \triangleq \begin{cases} \Sigma^{1-}_1 \ (\text{formulae w/o set parameters}) & ,n=0 \\ \Sigma^{1-}_2 & ,n=1 \\ \Sigma^{1-}_3 & ,n\ge 2 \end{cases}$$

として．

Theorem 1.1.

1. Σ^1_{n+1}-AC_0 is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-CA_0 [$\Pi^{1,-}_n$-CA_0].
2. Σ^1_{n+1}-GDC_0 is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\omega^\omega}$]
3. Σ^1_{n+1}-$GDCR$ is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\omega^\omega}$].
4. Σ^1_{n+1}-GDC is C_n [D_n] conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ [$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\varepsilon_0}$].

ここに、例えば 1. は、$A \in C_n$ [$A \in D_n$] について、

$$\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0 \vdash A \quad \Rightarrow \Pi^1_n\text{-}CA_0 \vdash A \;\; [\Pi^{1-}_n\text{-}CA_0 \vdash A]$$

ということ。cf. Lemma 0.1

以下、この定理の証明をするが、n がいくつでも証明は同じなので、$n=0$ の場合の証明を述べ、$n>0$ の場合に必要な変更については最後で述べることにする。また absolute hierarchy に対するほうも、ほぼ同様なので、relativized のほうだけ扱う。

$\Pi^0_1\text{-}CA^{<\alpha}_0$ ($\alpha=\omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で次の定義をする。$\beta<\alpha$ について H^X_β を X の β-th jump、つまり $Hier^0_\beta(X,Y)$ なる Y の $(Y)_\beta$ のこととし (β は formal な variable) $Rc(H^X_\beta)$ と $Rc'(H^X_\beta)$ を、

$$Rc(H^X_\beta) \doteq \{Y \subseteq \omega : Y \text{ is rec. in } H^X_\beta\}$$

$$Rc'(H^X_\beta) \doteq \{e \in \omega : \forall x\,(\{e\}^{H^X_\beta}(x)\downarrow)\} = \text{the set of codes of sets in } Rc(H^X_\beta)$$

とする。formula $F(Y)$ について、$\forall Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y)$ を、

$\forall Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y) \;\; \Leftrightarrow \;\; \forall e \in Rc'(H^X_\beta) F(e)$、但し、$F(e)$ は、$F(Y)$ の中のすべての、$t \in Y$ の形の (semi) formula を、$\{e\}^{H^X_\beta}(t) \simeq 0$ i.e., $\exists x\,[T^{H^X_\beta}(e,t,x)\ \&\ U(x)=0]$ (U: result extracting function) でおきかえて得られる formula のこと。$\exists Y \in Rc(H^X_\beta) F(Y)$ も同様に定義される。

1. はじめに、$\Sigma^1_1\text{-}AC_0$ について、

ess-Σ^1_n, ess-Π^1_n formulae を定義する。

Def. 1. ess-Π^1_0 = ess-Σ^1_0 = Π^0_∞, the set of arithmetical formulae

2. ess-Π^1_n $\subseteq$ ess-Σ^1_{n+1} ; ess-Σ^1_n $\subseteq$ ess-Π^1_{n+1}

3. ess-Σ^1_n, ess-Π^1_n はともに、$\wedge, \vee, \forall n, \exists n, \forall n<t, \exists n<t$ (1st order quantifiers) について閉じている。

4. $A \in$ ess-Σ^1_n [ess-Π^1_n] $\Rightarrow$ $\exists X A \in$ ess-Σ^1_n [$\forall X A \in$ ess-Π^1_n].
$(n \neq 0)$

ここでは Σ^1_1-AC_0 は、L_2K に次の extra な公理 (= premisses なしの rule) と rule を加えて得られる L_2K_R のこととする。公理は次の3種：

1. Γ, A 　, A は =, prim. rec. function に関する公理を quantifier-free に書いたもの. e.g., $s+1 \neq 0$ や、$t \neq s, t \notin X, s \in X$ (s, t: 任意の terms) 等.

Rem. ここの証明では、上の公理を quantifier-free にしておかなくてもよい。例えば $\forall x(x+1 \neq 0)$ でも可。§3 ではこうしておいたほうがよい, i.e., Σ^0_1 formulae だけからなる proof を扱いたいとき。

2. Induction Axiom は.

$$\Gamma,\ 0 \notin X,\ \exists n(n \in X \wedge n+1 \notin X),\ \forall m(m \in X)$$

3. Σ^0_0-CA は.

$$\Gamma,\ \exists X \forall n(n \in X \leftrightarrow A(n)) \qquad A \text{ は } \Sigma^0_0 \text{ formula.}$$

rule は次の1種：

$$\Pi^0_2\text{-}AC \quad \frac{\Gamma,\ \forall x \exists X A(x, X)}{\Gamma,\ \exists Y \forall x A(x, (Y)_x)} \qquad A: \Pi^0_2 \text{ formula}$$

Theorem 0.2, Corollary 0.3 より次がわかる：Γ が ess-Σ^1_1 $\cup$ ess-Π^1_1 formulae だけからなる sequent で Σ^1_1-AC_0 で証明できるとする。このとき、Γ に至る Σ^1_1-AC_0 での quasi-normal proof P があって、P の中の cut formulae はすべて Σ^1_1（Π^0_∞ を含む）で、かつ P の中の formulae はすべて ess-Σ^1_1 か ess-Π^1_1 である。

Def. $A \in$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 と A に occur しない set parameter V について、formula $A^V_{n,m}$ $(n, m < \omega)$ は、A の中のすべての $\forall Y$ を $\forall Y \in Rc^0(H^V_n)$ で、すべての $\exists Y$ を $\exists Y \in Rc(H^V_m)$ でおきかえて得られる formula を表わす。$A^V_{n,m}$（ここの n, m は numerals で formal な variables でない［としてよい］）には、free variable V がふえている（正確には $Hier^0_{n+m}(V, Y)$ なる Y も occur していて、$Hier^0_{n+m}(V, Y) \to A^V_{n,m}$ である。）。sequent $\Gamma = \{A, B, \cdots\} \subseteq$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 については、

$$\Gamma^V_{n,m} \triangleq \{A^V_{n,m}, B^V_{n,m}, \cdots\}$$

明らかに、次の（persistency）が成立する：

(persistency) $n \le n' \le m' \le m \Rightarrow \Pi^0_i\text{-}CA_0 \vdash A^V_{n',m'} \to A^V_{n,m}$

Def. Proofs の長さ。

P を proof，Γ をその endsequent，$k < \omega$ について $P \overset{k}{\vdash} \Gamma$ を．

1. P が公理＝始式だけからなるとき：$P \overset{k}{\vdash} \Gamma$ holds for all $k < \omega$

2. $P_0 \overset{k'}{\vdash} \Gamma_0$, $P_1 \overset{k'}{\vdash} \Gamma_1$, $k' < k$ で，P の最後が

$$P = \cfrac{\begin{matrix}\vdots P_0 & \vdots P_1 \\ \Gamma_0 & \Gamma_1\end{matrix}}{\Gamma}$$

(P の immediate subproofs が P_0, P_1) のとき、$P \vdash^{k} \Gamma$.

つまり、$P \vdash^{k} \Gamma$ は 木としての P の depth $\leq k$ ということ。

Theorem 1.2 P を Σ^1_1-AC_0 の quasi normal proof, $P \vdash^{k} \Gamma$, $\Gamma \subseteq$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 とする。V を P に occur しない set parameter, X を Γ に occur する set parameters すべてを含む列 $X_0, \cdots, X_q$ とし、$X \notin Rc(H^V_n)$ を formulae の集合 $\{X_0 \notin Rc(H^V_n), \cdots, X_q \in Rc(H^V_n)\}$ のこととする。$g_k(n) \doteq n + 2^k$ とおいて、任意の $n < \omega$ について、

$$\Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash X \notin Rc(H^V_n),\ \Gamma^V_{n, g_k(n)}$$

Thm. 1.1.1 の証明。Σ^1_1-$AC_0 \vdash \forall X \exists Y A(X, Y)$, $A \in \Pi^0_\infty$ とする。Thm 1.2 より $n = 0$ とおいて、Π^0_1-$CA_0 \vdash X \notin Rc(H^V_0), \exists Y \in Rc(H^V_m) A$ for some $m < \omega$. V として X (と A に occur する set parameters の rec. join) をとって、Π^0_1-$CA_0 \vdash \forall X \exists Y \in Rc(H^X_m) A$。各 $Y \in Rc(H^X_m)$ は Π^0_1-CA_0 で set として存在するから Π^0_1-$CA_0 \vdash \forall X \exists Y A$. //

Thm. 1.2 の証明。P の構成に関する induction。

1) P が
$$\frac{\Gamma,\ \forall x \exists Y A(x, Y)}{\Gamma,\ \exists Z \forall x A(x, (Z)_x)}$$
$A \in \Pi^0_2$ で終っているとき。

IH より $\exists k_0 < k$ について、Π^0_1-CA_0 で

$$X \notin Rc(H^V_n),\ \Gamma^V_{n, m_0},\ \forall x \exists Y \in Rc(H^V_{m_0}) A(x, Y)$$

$m_0 = n + 2^{k_0}$.

Case 1. Γ^v_{n,m_0} のとき： $m_0 < m = n+2^k$ と (persistency) よりOK.

Case 2. Γ^v_{n,m_0} でないとき： $\forall x \exists Y \in Rc(H^v_{m_0}) A(x, Y)$ は、書き直すと、

$\forall x \exists y \in Rc'(H^v_{m_0}) A(x, y)$ で、$y \in Rc'(H^v_{m_0})$ は Π^0_2 in $H^v_{m_0}$,

$A(x, y)$ は $t \in Y$ を $\exists v [T^{H^v_{m_0}}(y, t, v) \ \&\ U(v) = 0]$ に、$t \notin Y$ を

$\exists v [T^{H^v_{m_0}}(y, t, v) \ \&\ U(v) \neq 0]$ に書きかえることにより、$B(x, y) \Leftrightarrow$

$y \in Rc'(H^v_{m_0}) \ \&\ A(x, y)$ は Π^0_2 in $H^v_{m_0}$ と思ってよい。Z を

$u \in (Z)_x \Leftrightarrow \exists y (y = \mu y B(x, y) \ \&\ \{y\}^{H^v_{m_0}}(u) \simeq 0)$

$\Leftrightarrow \forall y (y = \mu y\, B(x, y) \rightarrow \{y\}^{H^v_{m_0}}(u) \simeq 0)$

として、Z は Δ^0_3 in $H^v_{m_0}$。仮定より、$m_0 + 2 \leq m$ だから (persistency)

より $\exists Z \in Rc(H^v_m) \forall x A(x, (Z)_x)$。

2) P が (cut) で終っているとき。P の最後を

$$\frac{\Gamma, A \qquad \neg A, \Lambda}{\Gamma, \Lambda}$$

$A \in \Sigma^1_1$ とすると IH より $\exists k_0 < k$ について

$\forall n \in \omega$ について

$X \notin Rc(H^v_n), \Gamma^v_{n,m_0}, A^v_{n,m_0}$ ... (1) $\qquad m_0 = n + 2^{k_0}$

$X \notin Rc(H^v_n), \Lambda^v_{n,m_0}, (\neg A)^v_{n,m_0}$ ... (2)

(2) で n は任意だったから、n として m_0 をとって

$X \notin Rc(H^v_{m_0}), \Lambda^v_{m_0,\ell}, (\neg A)^v_{m_0,\ell}$ ... (3) $\qquad \ell = m_0 + 2^{k_0}$

A は Σ^1_1 だから、$\neg(A^v_{n,m_0})$ と $(\neg A)^v_{m_0,\ell}$ は同じ formula。よって (1)

(3) で cut して

$X \notin Rc(H^v_n), X \notin Rc(H^v_{m_0}), \Gamma^v_{n,m_0}, \Lambda^v_{m_0,\ell}$

(persistency) より、

$X \notin Rc(H^v_n),\ X \in Rc(H^v_{m_0})$; $\Gamma^v_{n,l}, \neg\Gamma^v_{n,m_0}$; $\Lambda^v_{n,l}, \neg\Lambda^v_{m_0,l}$

$(n \leq m_0 \lneq l)$ 従って、$X \notin Rc(H^v_n),\ \Gamma^v_{n,l},\ \Lambda^v_{n,l}$.

$l = n + 2^{k_0} + 2^{k_0} \leq n + 2^k$ より再び (persistency) で O.K.

-/-

Rem. 上の Thm 1.2 の証明より、Π^0_1-CA_0 は Σ^1_1-ACR について閉じている。Σ^1_1-ACR は Π^0_1-CA_0 で derived rule,

$\Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash \forall x \exists Y A(x,Y)$ w/ $A \in \Sigma^1_1 \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA_0 \vdash \exists Z \forall x A(x,(Z)_x)$

もわかる。

2. Σ^1_1-GDC_0 と Π^0_1-$CA_0^{<\omega^\omega}$.

Σ^1_1-GDC_0 は、上の Σ^1_1-AC_0 での Π^0_2-AC を次の Π^0_2-GDC におきかえて得られる：

$$\Pi^0_2\text{-GDC}\quad \frac{\Gamma,\ \forall n \exists Y A(n,X,Y)}{\Gamma,\ \exists Z \forall n A(n,(Z)_n,(Z)_{n+1})} \qquad A \in \Pi^0_2$$

ここに、X は下式 $\Gamma, \exists Z \forall n A(n,(Z)_n,(Z)_{n+1})$ に occur しない。

Σ^1_1-GDC_0 の proofs の長さや $A^v_{\alpha,\beta}$ の定義は前と同様にして（但しここでは α,β は $<\omega^\omega$ なる formal な variables）.

Theorem 1.3 P を Σ^1_1-GDC_0 の quasi normal proof, $P \overset{K}{\vdash} \Gamma$, $\Gamma \subseteq ess\text{-}\Sigma^1_1 \cup ess\text{-}\Pi^1_1$, U を P に occur しない set parameter とする。Q を P の sub-proof, Δ を Q の endsequent とする。各 $k \leq K$ について、$g_k : \omega^{K+1} \to \omega^{K+1}$ を、$g_k(\alpha) = \alpha + \omega^k$ で定義する。

X を Δ に occur するすべての set parameters を含む列 とすると.

$Q \vdash^{k} \Delta$ & $k \leq K$ $\Rightarrow$ $\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \alpha \prec \omega^{K+1}, X \notin Rc(H^\nu_\alpha), \Delta^\nu_{\alpha, g_k(\alpha)}$

Proof. Q の構成に関する induction. ここでの (persistency) は.

(persistency) 各 $K < \omega$ について.

$\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \forall \alpha, \alpha', \beta', \beta \prec \omega^{K+1} (\alpha \preceq \alpha' \preceq \beta' \preceq \beta \ \& \ A^\nu_{\alpha', \beta'} \rightarrow A^\nu_{\alpha, \beta})$

1) Q が Π^0_2-GDC で終っているときに Q の最後を.

$$\frac{\Delta, \forall n \exists Y A(n, X, Y)}{\Delta, \exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})}$$

とする. IH より $\exists k_0 < k$ について

$\alpha \prec \omega^{K+1}, X \notin Rc(H^\nu_\alpha), \Delta^\nu_{\alpha, \alpha+\omega^{k_0}}, \forall n \exists Y \in Rc(H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0}}) A(n, X, Y)$.

(但し. X 以外の parameter は略) $\alpha \prec \omega^{K+1}$ を fix.

Case 1. $\exists n \ (\Delta^\nu_{\alpha+\omega^{k_0} n, \alpha+\omega^{k_0}(n+1)})$ のときに (persistency) より

$\Delta^\nu_{\alpha, \alpha+\omega^k}$ となり O.K.

Case 2. O.W. により $\forall n \forall x \in Rc'(H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0} n}) \exists y \in Rc'(H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0}(n+1)})$ s.t.

$A(n, x, y)$

空集合 ϕ の code, index x_0 を fix して. $B(w, n)$ を次の formula とする:

'w は長さ $n+1$ の列' & $(w)_0 = x_0$ & $\forall m < n [(w)_m \in Rc'(H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0} m})$

& $(w)_{m+1} = \mu y. (y \in Rc'(H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0}(m+1)})$ & $A(m, (w)_m, y))]$

ind. on n で $\forall n \exists ! w B(w, n)$ がわかる. W を.

$u \in (W)_n \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \exists w (B(w, n) \ \& \ u \in' (w)_n)$

$\leftrightarrow \forall w (B(w, n) \rightarrow u \in' (w)_n)$

$u \in' (w)_n \overset{\triangle}{\Leftrightarrow} \{(w)_n\}^{H^\nu_{\alpha+\omega^{k_0} n}}(u) \simeq 0$.

とおると、$W \in R_c(H^{\nu}_{\alpha+\omega^{k_0+1}}) \subseteq R_c(H^{\nu}_{\alpha+\omega^k})$ かつ、

$\forall n\, A(n, (W)_n, (W)_{n+1})$ となる。

⁄⁄.

Rem. 上の証明から容易に次がわかる：いま Σ^1_1-RDC_0 を Σ^0_0-CA_0 に次の公理 Σ^1_1-RDC を加えた理論とおる。

$$\Sigma^1_1\text{-}RDC: \forall n \forall X[F(n,X) \to \exists Y(F(n+1,Y) \,\&\, A(n,X,Y))] \to$$
$$\to \forall X[F(0,X) \to \exists Y \forall n[(Y)_0 = X \,\&\, F(n,(Y)_n) \,\&\, A(n,(Y)_n, (Y)_{n+1})]]$$

for $F, A \in \Sigma^1_1$.

このとき、Σ^1_1-RDC_0 is Π^1_2 conservative over Π^0_1-$CA_0^{<\omega^\omega}$.

4. Σ^1_1-GDC と Π^0_1-$CA_0^{<\varepsilon_0}$.

Σ^1_1-GDC^* を、2. のように Σ^1_1-GDC_0 を書き、ω-rule を入れて、(b$\forall$), ($\forall$) を除いた semi-formal system とおる：

$$\omega\text{-rule} \quad \left.\frac{\cdots \quad \overset{\vdots\, P_n}{\Gamma, A(n)} \quad \cdots \qquad \forall n<\omega}{\Gamma, \forall x A(x)}\right\} P$$

Σ^1_1-GDC^* の proofs の長さは前と同様に定義する。とくに、上の ω-rule で、

$$P_n \overset{\alpha_n}{\vdash} \Gamma, A(n) \,\&\, \alpha_n < \alpha \text{ for } \forall n<\omega \Rightarrow P \overset{\alpha}{\vdash} \Gamma, \forall x A(x).$$

Σ^1_1-GDC^* の proof が quasi-normal とは、その中の cut formulae がすべて Σ^1_1 のこと。[10] と同様にして、次がわかる：(cf. §6)

1). Γ を sentences の集合として.

Σ_1^1-GDC $\vdash \Gamma \Rightarrow \exists\ \Sigma_1^1$-GDC$^+$ の proof P s.t.

$$P \vdash^{<\omega+\omega} \Gamma$$

2) $\forall\ \Sigma_1^1$-GDC$^+$ の proof P $\exists\ \Sigma_1^1$-GDC$^+$ の quasi normal proof P' s.t.

$[\ P \vdash^{<\omega+\omega} \Gamma \quad \Rightarrow \quad P' \vdash^{<\varepsilon_0} \Gamma\ ]$

$(\ P \vdash^{<\alpha} \Gamma \quad \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} \quad P \vdash^{\beta} \Gamma \quad \text{for } \exists \beta < \alpha\ )$

Thm 1.3 と同様にして.

Theorem 1.4. 各 $\alpha_0 < \varepsilon_0$ について次が成立。P を Σ_1^1-GDC$^+$ の quasi-normal proof で $P \vdash^{\alpha_0} \Gamma$ とする。$\Gamma \subseteq$ ess-$\Sigma_1^1 \cup$ ess-Π_1^1. U を P に occur しない set parameter. Q を P の subproof で $Q \vdash \Delta$ とする。各 $\beta \leq \alpha_0$ について $g_\beta : \omega^{\alpha_0+1} \to \omega^{\alpha_0+1}$ を $g_\beta(\alpha) = \alpha + \omega^\beta$ とする。X を Δ に occur するすべての set parameters すべてを含む列として.

$$Q \vdash^{\beta} \Delta \ \ \& \ \ \beta \leq \alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_1^0\text{-}CA^{<\omega^{\alpha_0+1},*} \vdash \alpha \nprec \omega^{\alpha_0+1}, X \notin Rc(H_\alpha^U), \Delta^U_{\alpha, g_\beta(\alpha)}.$$

ここに Π_1^0-$CA^{<\omega^{\alpha_0+1},*}$ は Π_1^0-$CA^{<\omega^{\alpha_0+1}}$ に対応する semi-formal system w/ ω-rule.

ここまでの議論を算術化・形式化して partial truth definition for Π_∞^0 formulae を経て. Π_2^1 sentence A について.

$$\Sigma_1^1\text{-GDC} \vdash A \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha_0 < \varepsilon_0 \ (\ \Pi_1^0\text{-}CA_0^{<\varepsilon_0} \vdash A^U_{\alpha, \alpha+\omega^{\alpha_0}}, \alpha \nprec \omega^{\alpha_0+1})$$

$\alpha = 0$ とおけばよい。

3. Σ_1^1-GDCR と Π_1^0-$CA_0^{<\omega^\omega}$.

Σ_1^1-GDCR は、公理として full induction

$\Gamma,\ A(0)\ \&\ \forall n(A(n) \to A(n+1)) \to \forall n A(n)$

があり、'rule' として次の Σ_1^1-GDCR がある：

$$\Sigma_1^1\text{-GDCR}\quad \frac{\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y)}{\exists Z \forall n\ A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})} \qquad A \in \Pi_\infty^0$$

Σ_1^1-GDCR の proof の中で使われている 'rule' Σ_1^1-GDCR の回数を数える： P を Σ_1^1-GDCR の proof s.t. $P \vdash \Gamma$ とする。

1) P が公理だけからなるとき、$P \overset{k}{\vdash} \Gamma$ holds for $^\forall k < \omega$.

2) P の最後が Σ_1^1-GDCR 以外で P の immediate sub-proof(s) P_0 [P_1] について、$P_0 \overset{k}{\vdash} \Gamma_0$ [$P_1 \overset{k}{\vdash} \Gamma_1$] なら、

$P \overset{k}{\vdash} \Gamma$

3) P の最後が Σ_1^1-GDCR で、P の immediate sub-proof P_0 について $P_0 \overset{k_0}{\vdash} \Gamma_0$ for $^\exists k_0 < k$ なら $P \overset{k}{\vdash} \Gamma$。

各 $k < \omega$, $\alpha < \omega^\omega$ と variable U について、

$R_{k,\alpha}^U \doteqdot \bigcup_{\beta<\alpha} Rc(H_{\omega^k \cdot \beta}^U)$ とする。

set parameter U が occur しない formula A について、(A は $\notin$ less-$\Sigma_1^1 \cup$ less-Π_1^1 でもよい) $A^{R_{k,\alpha}^U}$ を、A の中の $\forall Y$, $\exists Y$ を一様に $\forall Y \in R_{k,\alpha}^U$, $\exists Y \in R_{k,\alpha}^U$ でおきかえた formula とする。 このとき、

Theorem 1.5. P を Σ^1_1-GDCR の proof で $P \vdash \Gamma$ とする。
(P は quasi normal でなくてよい。 $\Gamma \not\subseteq$ ess-$\Sigma^1_1 \cup$ ess-Π^1_1 でよい)
U を P に occur しない set parameter, X を Γ に occur する
すべての set parameters すべてを含む列 として. $k < \omega$ と
$\alpha < \omega^\omega$, α: limit ordinal について.

$$P \vdash^{k} \Gamma \Rightarrow \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash X \notin R^U_{k,\alpha},\ \Gamma^{R^U_{k,\alpha}}$$

Proof. P の長さについての induction. P の最後が Σ^1_1-GDCR
のとき.
$$\frac{\forall n \forall X \exists Y A(n, X, Y)}{\exists Z \forall n A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})}$$
$k = k_0 + 1$ とおくと IH より.

$\forall$ limit $\alpha < \omega^\omega$ $\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\omega^\omega} \vdash \forall n \forall X \in R^U_{k_0,\alpha} \exists Y \in R^U_{k_0,\alpha} A(n, X, Y)$
(parameters は略) --- (1)

与えられた limit $\alpha < \omega^\omega$ について. $X_0 \in R^U_{k,\alpha}$ とすると.
$X_0 \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\beta})$ for $\exists \beta < \alpha$. よって $X_0 \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\delta_0})$, $k_0 = k+1$
$\delta_0 = \omega\beta$. $\gamma \triangleq \omega\beta + \omega$ として. (1) の α を γ と思えば $(Z)_n$
と δ_n を recursive に, $(Z)_0 = X_0$; $\delta_0 = \omega\beta$,
$(Z)_{n+1} \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\delta_{n+1}})$ s.t. $A(n, (Z)_n, (Z)_{n+1})$ & $\delta_{n+1} < \gamma$
ととっていけて. $Z \in Rc(H^U_{\omega^{k_0}\cdot\gamma})$. $\omega^{k_0}\gamma = \omega^k(\beta+1)$ &
$\beta + 1 < \alpha$: limit より $Z \in R^U_{k,\alpha}$ となる

//.

ここまでの証明で parameter U を suppress すれば 対応する結果が absolute hierarchy についても得られる.

以下、$n>0$ の場合について述べる。$\Pi_n^1\text{-}CA_0^{<\alpha_0}$ ($\alpha_0 = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$) の中で、$\beta<\alpha_0$ について $H_\beta^X(n)$ を、$Hier_\beta^n(X,Y)$ なる Y の $(Y)_\beta$ のこととし、

$Rc(H_\beta^X(n)) \triangleq \{Y\subseteq\omega.\ Y \text{ is rec. in } H_\beta^X(n)\}$

$Rc'(H_\beta^X(n)) \triangleq$ the set of codes of sets in $Rc(H_\beta^X(n))$

と定義する。Formula $F(Y)$ について、$\forall Y\in Rc(H_\beta^X(n))F(Y)$, $\exists Y\in Rc(H_\beta^X(n))F(Y)$ は前と同様に定義される。

Def. $A\in ess\text{-}\Sigma_{n+1}^1 \cup ess\text{-}\Pi_{n+1}^1$ と A に occur しない set parameter V について formula $A_{\alpha,\beta}^V$ ($\alpha,\beta<\alpha_0$) を帰納的に定義する:

1. $A\in ess\text{-}\Sigma_n^1 \cup ess\text{-}\Pi_n^1 \Rightarrow A_{\alpha,\beta}^V \triangleq A$

2. operation $A\mapsto A_{\alpha,\beta}^V$ は second order quantifiers 以外の logical operator と commute, e.g., $(B\circ C)_{\alpha,\beta}^V \triangleq B_{\alpha,\beta}^V \circ C_{\alpha,\beta}^V$, $\circ\in\{\wedge,\vee\}$.

3. $(\forall Y B(Y))_{\alpha,\beta}^V \triangleq \forall Y\in Rc(H_\alpha^V(n))\ B(Y)_{\alpha,\beta}^V$ if $\forall Y B(Y)\notin ess\text{-}\Sigma_n^1 \cup ess\text{-}\Pi_n^1$

$(\exists Y B(Y))_{\alpha,\beta}^V \triangleq \exists Y\in Rc(H_\beta^V(n))\ B(Y)_{\alpha,\beta}^V$ if $\exists Y B(Y)\notin ess\text{-}\Sigma_n^1 \cup ess\text{-}\Pi_n^1$

Rem. $A = \forall Y B(Y)$ $[= \exists Y B(Y)] \in ess\text{-}\Sigma_{n+1}^1 \cup ess\text{-}\Pi_{n+1}^1$ のとき、$A_{\alpha,\beta}^V$ は β には [α には] 依存しない。

sequent Γ について、sequent $\Gamma_{\alpha,\beta}^V$ は前と同様に定義される。

Def. 1. $(V=L)_r$ を、Σ_4^1-sentence で、relativized constructibility hypothesis $\exists Z\subseteq\omega\ \forall X\subseteq\omega\ \exists W\subseteq\omega$ ["W is a well ordering" & $X\in Rc(H_\alpha^Z)$ for some α in the field of the well ordering W] を表わすとする。

2. theory T_n を、 $T_n \triangleq \begin{cases} \Pi_n^1\text{-}CA_0 & , n=1,2 \\ \Pi_n^1\text{-}CA_0 + (V=L)_r & , n\geq 3 \end{cases}$ とおく。

このとき、次が成立する。

Lemma cf. [3]

a) $T_n \vdash \Sigma^1_n - AC$

b) $T_n \vdash \forall Y \in H^X_1(n) F(Y) \rightarrow \forall Y F(Y)$ for $A \in ess\text{-}\Pi^1_n$.

c) $(n \geq 3)$ T_n is Π^1_4-conservative over $\Pi^1_n\text{-}CA_0$.

1. $\Sigma^1_{n+1}\text{-}AC_0$ と $\Pi^1_n\text{-}CA_0$。

Lemma a), b) を使えば、$n=0$ のときと同様にして、Π^1_{n+2} formula $\forall X \exists Y A(X,Y)$ w/o set parameters に対して、

$$\Sigma^1_{n+1}-AC_0 \vdash \forall X \exists Y A \Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y \in Rc(H^X_k(n)) A(X,Y)$$

for some $k < \omega$

$$\Rightarrow T_n \vdash \forall X \exists Y A(X,Y)$$

となり、Lemma c) より O.K.。

2. $\Sigma^1_{n+1}-GDC_0$ と $\Pi^1_n - CA_0^{<\omega^\omega}$.

theory S_n を、
$$S_n \doteq \begin{cases} \Pi^1_n - CA_0^{<\omega^\omega} & , n = 1, 2 \\ \Pi^1_n - CA_0^{<\omega^\omega} + (V=L)_r & , n \geq 3 \end{cases}$$

と、Lemma c) に対応する Lemma: S_n is Π^1_4-conservative over $\Pi^1_n-CA_0^{<\omega^\omega}$

より、$n=0$ と同様にして OK

4. $\Sigma^1_{n+1} - GDC$ と $\Pi^1_n - CA_0^{<\varepsilon_0}$.

2. と同様にして、$n=0$ の場合と同じようにできる。但し、ω-rule の入った $\Pi^1_n - CA^{<\alpha,*}$ or $\Pi^1_n - CA^{<\alpha,*} + (V=L)_r$ $(\alpha < \varepsilon_0)$ で、

$\beta<\varepsilon_0$ なる長さの proof で証明される formula $A^x_{\gamma,\delta}$ ($\gamma,\delta<\varepsilon_0$. A は Σ^1_{n+1}) を partial truth def. によって '外へ出す', Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ or Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}+(V=L)_r$ で証明するときには、restricted ind. しかないから、β までの超限帰納法は Π^1_n-$CA_0^{<\varepsilon_0}$ の中で set として存在する formula に対してしか適用できないから少し注意を要する。

3. Σ^1_{n+1}-GDCR と Π^1_n-$CA_0^{<\omega^\omega}$。

各 $k<\omega$, $\alpha<\omega^\omega$ と variable U について、

$R^U_{k,\alpha}(n) \triangleq \bigcup_{\beta<\alpha} Rc(H^U_{\omega^k\cdot\beta}(n))$

として、U が occur しない formula A について、$A^{R^U_{k,\alpha}(n)}$ を、A の中のすべての set quantifiers を一様に $R^U_{k,\alpha}(n)$ に相対化・制限して得られる formula とする。Lemma a), b), c) の S_n (2. で定義された) に対する analogue を使って、$n=0$ と同様にして O.K.

$n>0$ のときの absolute hierarchy Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ に対する定理は、上の証明で、parameter U を suppress して、かつ、次が成立すれば O.K.: Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}+V=L$ is Σ^1_3-conservative over Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ ($\alpha=\omega,\omega^\omega,\varepsilon_0$)。但し、$V=L$ は Π^1_3 sentence で書いた constructibility hypothesis ($(V=L)_r$ in P.28 の Z を $Z=\phi$ としたもの) を表わす。(筆者はこの Lemma が成立するかどうか知らない。ついでに言うと、Lemma c) の証明も知らない。ので)

または次のようにしてもよい。相対化された Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ に対する結果を使えばよい。つまり、次を示せば十分:

Lemma. Π^1_n-$CA_0^{<\alpha}$ is $\Sigma^{1,-}_{n+1}$-conservative over $\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\alpha}$ for (at least) $\alpha = \omega, \omega^\omega, \varepsilon_0$.

このLemmaは、各 $\beta, \gamma < \alpha$ についてある $\delta < \alpha$ が実際にとれて($\delta = \gamma + \beta$ 程度に)、

$\Pi^{1,-}_n$-$CA_0^{<\alpha} \vdash \forall X \in Rc(H_\gamma(n))\, \exists Y \in Rc(H_\delta(n))\, Hier^n_\beta(X, Y)$

となることからわかる。但し、$H_\gamma(n)$ は $Hier^n_\gamma(\phi, Y)$ なる Y の $(Y)_\gamma$ のこと。

<u>付記</u>. Theorem 1.1 の証明論を使った証明としては、上記の A. Cantini によるものの他かに、S. Feferman & W. Sieg による Skolem operator theory を使った証明が [1] の II, §2 にある。

§3 WKL_0 と PRA

この§では次の定理を証明する:

Theorem 2.1 WKL_0 is Π^0_2-conservative over Σ^0_0-CA_0.

証明は、1) $WKL + \Delta^0_1$-CA をそれと同値な Σ^0_1-Sep におきかえて、Σ^0_1-Sep_0 is Π^0_2-conservative over Σ^0_0-CA_0 を示すのと、2) 直接、WKL_0 を扱って示すのの2通り与える。

Def. 1. (WKL = Weak König Lemma). function variable (unary) f (は、L_2 に入っていると思ってもいいし、又は、$\forall x \exists! y\, (x, y) \in X$ なる X

と思ってもいい）に対して、

$c \in T_f \ \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow}\ f(c) = 1$

$BT(T_f) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall c \forall d\, [(c * d \in T_f \to c \in T_f) \ \&\ (c \in T_f \Rightarrow c \in {}^{<\omega}2)]$

但し、${}^{<\omega}2 \stackrel{\triangle}{=}$ 0－1の有限列全体の集合；$d,c \in {}^{<\omega}2$ に対して、

$c * d$ は c と d の concatenation，$lh(c) \stackrel{\triangle}{=} c$ の長さ、を表わす。

また、function variable g について、$\bar{g}x \stackrel{\triangle}{=} \langle g(0), g(1), \cdots, g(x \dot{-} 1) \rangle$。

このとき、WKLとは、次の公理を表わす：

$$WKL: \forall f \in {}^{\omega}2\, [BT(T_f) \ \&\ \forall g \in {}^{\omega}2\, \exists x (\bar{g}x \notin T_f) \to \exists x \forall c \in {}^{<\omega}2 (lh(c) = x \to c \notin T_f)]$$

但し、$f \in {}^{\omega}2 \ \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow}\ \forall x\, (f(x) \leq 1)$

2．理論 WKL_0 は、$\Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Delta^0_1\text{-}CA + WKL$ のこと。

3．（Σ^0_1-Sep = Σ^0_1-Sepation Axiom）．Σ^0_1-Sep は次の公理(図式)：

$$\Sigma^0_1\text{-}Sep: \ \forall n \neg (An \ \&\ Bn) \to \exists X \forall n [(An \to n \in X) \ \&\ (n \in X \to \neg Bn)]$$

A, B は Σ^0_1-formulae.

4．理論 $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ は、$\Sigma^0_0\text{-}CA_0 + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Sigma^0_1\text{-}Sep$ のこと。

次の事実が知られている：

Proposition（cf. [13]） $WKL_0 = \Sigma^0_1\text{-}Sep_0$，i.e.，$\Sigma^0_1\text{-}IA_0$ 上で $WKL + \Delta^0_1\text{-}CA \Leftrightarrow \Sigma^0_1\text{-}Sep$.

1) Theorem 2.1 の第1証明，上の Prop. より $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ is Π^0_2-conservative

over Σ^0_0-CA_0 を示せばよい。初めに、証明論が使い易いように Σ^0_1-Sep_0 を L_2K を使って書き直す。公理は L_1 の constants に関する公理を quantifier-free の形で書いたもの cf. P.18. 推論は L_2K のそれに次の2つを加える：

1) Σ^0_1-Sep :

$$\frac{\Gamma, \neg A_0(m,n) \vee \neg B_0(k,n) \qquad \exists m \exists n \exists k [(A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B_0(k,n))], \Gamma}{\Gamma}$$

ここに、イ) $A_0, B_0 \in \Sigma^0_0$　ロ) 左上式の m, n, k は eigenvariables. i.e., Γ に free に occur しない（$\neg A_0(0,0) \vee \neg B_0(0,0)$ にも！）

2) Σ^0_1-IA :

$$\frac{\Gamma, \exists m B(m,0) \qquad \Gamma, b \not< t, \neg B(c,b), \exists m B(m,b') \qquad \neg B(c,t), \Gamma}{\Gamma}$$

ここに イ) $B \in \Sigma^0_0$　ロ) b, c は eigenvariables　ハ) t は term
ニ) b' は $b+1$ のこと。

明らかにこう書いた Σ^0_1-Sep_0 は元のそれと同値である。（Σ^0_0-CA に相当する公理・推論は入れていない。何故なら、Σ^0_1-Sep から、それは出てくるから。）さらに、Σ^0_1-IA_0（くわしくは、Σ^0_1-IA_0 マイナス Σ^0_0-CA と呼ぶべき、次の Σ^0_0-IA_0 も同様）と Σ^0_0-IA_0 を、Σ^0_1-IA_0 は上のように書いた Σ^0_1-Sep_0 から推論 Σ^0_1-Sep を除いて得られる体系として、また、Σ^0_0-IA_0 は、Σ^0_1-IA_0 から推論 Σ^0_1-IA を除き、Σ^0_0-formulae についての induction axiom を入れた

体系として定義する。(Σ_0^0-IA_0 のほうは、Gentzen流に書かなくてよいが) このとき次のLemmaが成立する。

Lemma 1. $\Gamma \cup \{A_1, \cdots, A_n\} \subseteq \Sigma_1^0$ $(n \geq 0)$ について、

Σ_1^0-$IA_0 \vdash \Gamma, \exists m A_1(m), \cdots, \exists m A_n(m) \quad \Longrightarrow$

Σ_0^0-$IA_0 \vdash \Gamma, \exists m < t_1 A_1, \cdots, \exists m < t_n A_n$ for some terms $t_1, \cdots, t_n$ s.t. $t_1, \cdots, t_n$ に occur する variables (1st order!) は Γ, $\exists m A_1(m), \cdots, \exists m A_n(m)$ に occur するもののみ, i.e. 各 $t_i \equiv t_i(\bar{a})$ はある $\bar{a}$ に関する primitive rec. function $f_i(\bar{a})$ に対応している。

このLemmaから次が出る:

Lemma 2. $\Gamma \subseteq \Sigma_1^0$ & X does not occur in Γ として、

Σ_1^0-$IA_0 \vdash \exists m \exists n \exists k [(A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B_0(k,n))], \Gamma$

$\Rightarrow \Sigma_0^0$-$IA_0 \vdash \exists n (A(n) \,\&\, B(n)), \Gamma$

但し、$A_0, B_0 \in \Sigma_0^0$ でかつ、$A(n) \overset{\text{def}}{=} \exists m A_0(m,n)$, $B(n) \overset{\text{def}}{=} \exists k B_0(k,n)$.

Lemma 2 の証明。Lemma 1 よりある term t について、

Σ_0^0-$IA_0 \vdash \exists n [(\exists m < t A_0(m,n) \,\&\, n \notin X) \vee (n \in X \,\&\, B(n))], \Gamma$

しかもこの Σ_0^0-IA_0 での proof には $(\exists^2)$ は使われていないと思ってよいから (cf. Thm 0.2)、Σ_0^0 formula に Σ_0^0 formula (abstract) を代入しても Σ_0^0 formula なので、X の proof の $n \in X$ に $\exists m < t A_0(m,n)$ を代入してもなお Σ_0^0-IA_0 での proof であり、$\exists m < t A_0(m,n) \to A(n)$ より、O.K.

Theorem 2.1 の証明。Σ_1^0 formula が Σ_1^0-Sep_0 で証明できる

となる。Thm 0.2, Corr. 0.3 よりその proof を quasi normal に書きかえれば、初めから proof には Σ^0_1 formulae しか occur していないとしてよい。Lemma 2 を使って（Lemma 1 も）、上から順に推論 Σ^0_1-Sep（と Σ^0_1-IA）を消していけるから、その Σ^0_1 formula は Σ^0_0-IA_0 で証明できることがわかる。

Rem. 勿論、Σ^0_0-IA_0 は PRA（L_1 の quantifier-free formulae に関する induction axiom を持った 1st order arithmetic）の conservative extension である。

Lemma 1 の証明。Σ^0_1-formulae に至る、Σ^0_1-IA_0 での quasi normal proof の長さに関する induction。

1) ($\exists'$) $\dfrac{At, \exists mA, \Gamma}{\exists mA, \Gamma}$ （で終っているとき）。IH より $\exists$ p.r. function f

$At, \exists m < f\bar{a} Am, \Gamma$ 　g を、

$g\bar{a} \triangleq \max(f\bar{a}, t+1)$ とおけば、$\exists m < g\bar{a} Am, \Gamma$ となる。

2) ($b\forall$) $\dfrac{\exists m Am, b \not< t, Bb, \Gamma}{\exists m Am, \forall x < t Bx, \Gamma}$ のとき。IH より $\exists f$ s.t.

$\exists m < f\bar{a}b Am, b \not< t, Bb, \Gamma$

($B \in \Sigma^0_0$) 　$b < t \equiv t\bar{a} \Rightarrow f\bar{a}b \leq g\bar{a} \triangleq \max(f\bar{a}b\,;\, b < t\bar{a})$

より $\exists m < g\bar{a} Am, \forall x < t Bx, \Gamma$.

3) (Σ^0_1-IA)

$\Gamma, \exists m B(m, 0), \exists n A \cdots (1)$ 　$\Gamma, b \not< t, \neg B(c, b), \exists m B(m, b'), \exists n A \cdots (2)$

$\neg B(c, t), \Gamma, \exists n A \cdots (3)$ として、$\dfrac{(1) \quad (2) \quad (3)}{\Gamma, \exists n An}$ のとき。

IH より $\exists f_0, g_0, h, f_1, f_2$ s.t.

(1′) $\Gamma, \exists m < g_0 \bar{a} B m 0, \exists n < f_0 \bar{a} A n$

(2′) $\Gamma, b \nless t, \neg B c b, \exists m < h \bar{a} b c B m b', \exists n < f_1 \bar{a} b c A n$

(3′) $\neg B c t, \Gamma, \exists n < f_2 \bar{a} c A n$.

g を $\begin{cases} g\bar{a}0 = g_0\bar{a} \\ g\bar{a}b' = \max(h\bar{a}bc : c < g\bar{a}b) \end{cases}$ と primitive recursion で定義すれば、(1′), (2′) より.

(1″) $\Gamma, \exists m < g\bar{a}0 B m 0, \exists n < f_0 \bar{a} A n$

(2″) $\Gamma, b \nless t, \neg \exists m < g\bar{a}b B m b, \exists m < g\bar{a}b' B m b', \exists n < f_3 \bar{a} A n$

但し. $f_3 \bar{a} \doteq \max(f_1 \bar{a} b c : b < t\bar{a}, c < g\bar{a}b)$

よって Σ^0_0-IA より. $k\bar{a} \doteq g\bar{a}(t\bar{a})$ として.

(4) $\Gamma, \exists m < k\bar{a} B m t, \exists n < f_0 \bar{a} A n, \exists n < f_3 \bar{a} A n$

$f\bar{a} \doteq \max(f_0\bar{a}, f_3\bar{a}, f_2\bar{a}c : c < k\bar{a})$ として, (3′), (4) より

$\Gamma, \exists n < f\bar{a} A n$ となる。 //.

2) Theorem 2.1 の第2証明 (=W. Sieg [10] による証明)

再び WKL_0 を書き直す。言語は L_2、つまり function variables なし。ここでの WKL_0 は、1) での Σ^0_1-Sep_0 に次の推論 WKL を加える:

WKL: $$\frac{\Gamma, \neg A_0(\bar{a}) \qquad \exists m(\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma}{\Gamma}$$

ここに、イ) Y と $\bar{a}$ は eigenvariables ロ) $\bar{Y}m \doteq \langle K_Y(0), \cdots, K_Y(m-1)\rangle$ (K_Y は Y の characteristic function), つまり, $\bar{Y}m \notin T_X$ ≜

$\exists c \in {}^{<\omega}2\,(lh(c) = m \,\&\, \forall i < lh(c)\,(c(i) = 0 \leftrightarrow Y(i))\,\&\, c \notin T_X)$

但し、$c \in T_X \Leftrightarrow c \in X$，つまり $T_X = X$.

ハ) $\forall \bar{x}\, \neg A_0(\bar{x})$ $(A_0 \in \Sigma^0_0)$ は、$BT(T_X) \,\&\, \forall x \exists c\,(lh(c) = x \,\&\, c \in T_X)$ の

Π^0_1-form。 $BT(T_X) \Leftrightarrow \forall c \forall d\,[(c * d \in T_X \to c \in T_X) \,\&\, (c \in T_X \to c \in {}^{<\omega}2)]$

$(\exists c\,(lh(c) = x \cdots)$ は $\exists c < 2^{x+1}\,(lh(c) = x \cdots)$ と思ってよい)

Rem. 勿論 Σ^0_1-Sep は Δ^0_1-CA でよい。

このとき、

Lemma 3 $\Gamma \subseteq \Sigma^0_1$ & Y does not occur in Γ として、

$\Sigma^0_1\text{-}IA_0 \vdash \exists m\,(\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma \Rightarrow \Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash \exists \bar{x} A_0(\bar{x}), \Gamma$, i.e.,

$\Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash \neg[BT(T_X) \,\&\, \forall x \exists c\,(lh(c) = x \,\&\, c \in T_X)], \Gamma$

Lemma 3 の証明. Lemma 1 より ある term t について、

$\Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash \exists m < t\,(\bar{Y}m \notin T_X), \Gamma$. 以下, $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ 内 での 話し。

$BT(T_X) \,\&\, \forall x \exists c\,(lh(c) = x \,\&\, c \in T_X)$ を仮定して Γ を導く。仮定よ

り c を、$lh(c) = t \,\&\, c \in T_X$ となるようにとる。$BT(T_X)$ より

$\bar{Y}t \notin T_X$，Γ (，は'又は'と読む) Y は任意だったから $i \in Y$ に formula

(abstract) $c(i) = 0$ を代入しても，$c(i) = 0 \in \Sigma^0_0$ より $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ の proof に

なり) (わかり易く言うと、Y を $\bar{Y}t = c$ なる Y をとってということ) $c \notin T_X$，Γ

よって Γ を得る。 //

この Lemma 3 より 1) における と同様にして Σ^0_1 formula に至る WKL_0

での quasi normal proof から、WKL, Σ^0_1-Sep, Σ^0_1-IA を取り除く

ことができて、Theorem 2.1 が $WKL_0 \vdash A \Rightarrow \Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash A$

~~A~~ , w/ $A \in \Pi^0_2$ の形で証明される。

付記. 1. W. Sieg [11] のもともとの証明では、WKL_0 は function variables $f, g, \dots \in {}^\omega\omega$ を持った言語で、公理は $WKL + \Sigma^0_1\text{-}IA + \Sigma^0_1\text{-}AC_0$ となっている。ここに $\Sigma^0_1\text{-}AC_0$ は、

$\Sigma^0_1\text{-}AC_0$: $\forall x \exists y A(x, y) \to \exists f \forall x A(x, f(x))$, $A \in \Sigma^0_1$

(添字の0は restricted induction であることを示すのではなく、AC の type が 0, つまり, $\omega = \mathbb{N}$ の type ということ)。こうしたとき、Lemma 1 は、$\Gamma \cup \{A\} \subseteq \Sigma^0_1$ について、

$\Sigma^0_1\text{-}IA_0 \vdash \exists n A_n, \Gamma \Rightarrow \exists$ primitive rec. functional F s.t.

$\Sigma^0_0\text{-}IA_0 \vdash \exists n < F(\bar{a}, \bar{f}) A_n, \Gamma$

となる。但し、ここに、$\Sigma^0_i\text{-}IA_0$ $(i = 0, 1)$ には、(lowest type の) primitive rec. functionals が入っているとする。この設定で、Lemma 3 の analogue を示すには、W. Howard による、prim. rec. functional を hereditarily に majorize する prim. rec. functional を使うことになる。しかしながら WKL に関係する関数は $\in {}^\omega 2$ と思ってよく (これを正に、Lemma 3 の analogue の証明で使う)、かつ、$\Sigma^0_1\text{-}AC_0 \leftrightarrow \Delta^0_1\text{-}CA$ over $\Sigma^0_1\text{-}IA_0$ であるから、function variables のない上で与えた WKL_0 を扱えば十分である。なお、prim. rec. functionals of lowest type の入った $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ が入っていない $\Sigma^0_0\text{-}IA_0$ の conservative extension になる

ことを見るには、そのような functional は連続でかつその modulus of continuity が prim. rec. function でとれることに注意されればよい。くわしくは [14] を参照。

2. W. Sieg は Logic Colloquium 85, Paris の abstract において次の結果を announce している: $\forall n \geq 1$ について、

$WKL_0 + \Sigma^0_n\text{-}IA$ is Π^1_1-conservative over $\Sigma^0_n\text{-}IA_0$

これは、L. Harrington の結果を含んでおり興味深いが、筆者はその証明を知らない。

次に、function symbols を変えて(減らして)かつ、induction を $\Sigma^0_0\text{-}IA$ に制限したときの WKL_0, $\Sigma^0_1\text{-}Sep_0$ について述べる。

$\mathcal{E}$ を primitive rec. functions からなる集合とする。$L_2(\mathcal{E})$ とは、L_2 (L_1) での function constants を、$\mathcal{E}$ に属するものに制限した言語とする。(正確には、各 $f \in \mathcal{E}$ の定義 (p.r. index) ごとに function constant をそれに対応して一つずつ入れる。さらに、その定義に使われた functions に対応する constants も入れる。例えば、掛け算 $\cdot \in \mathcal{E}$、ふつうに定義されていたとして、なら、$+$ (足し算) という記号も入れる。) このとき、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ とは、言語 $L_2(\mathcal{E})$ での理論で、公理は $\mathcal{E}$ に属する関数の defining equations と $L_2(\mathcal{E})$ での bounded formulae $= \Sigma^0_0(\mathcal{E})$ に適用した induction axiom, から成る。 $\Sigma^0_1(\mathcal{E})\text{-}Sep_0$ は、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})\text{-}IA_0$ に、公理として $\Sigma^0_1(\mathcal{E})\text{-}Sep$ を加えた理論 ($\Sigma^0_1(\mathcal{E})$ は $\exists \vec{x} B$, w/ $B \in \Sigma^0_0(\mathcal{E})$ なるもの)。

また、$WKL(\mathcal{E})_0$ とは、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0$ に公理として、$\Delta^0_1(\mathcal{E})-CA$ と WKL を加えた理論。但し、WKL を書くには、少なくとも 0-1 の有限列に関する lh, $*$, $c(i)$ ($c=\langle c_0, c_1, \cdots, c_n\rangle$, $i\leq n$ のとき $c(i)=c_i$) が $\mathcal{E}$ に入っているか、または $\Delta^0_0(\mathcal{E})=\Sigma^0_0(\mathcal{E})$ formulae で定義されていて、かつ、それらの簡単な性質が証明できないと話にならないので、$WKL(\mathcal{E})_0$ は、$\mathcal{E}$ に足し算 $+$, 掛け算 $\cdot$ (と $0, 1$) が入っているときにのみ定義する。($0, 1, +, \cdot$ で十分であるのは、Wilkie & Paris [15] にある。) これだけの仮定のもとで、まず、

Proposition. $WKL(\mathcal{E})_0 = \Sigma^0_1(\mathcal{E})-Sep_0$

証明は、[13] にあるものを注意して読めば、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA$ で十分であることがわかる。

$\mathcal{E}$ に関して次の仮定をする:

<u>仮定</u>: ある $\mathcal{E}_M \subseteq \mathcal{E}$ があって、次が成立する。

a) $\forall f \in \mathcal{E}\ \exists g \in \mathcal{E}_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow f(\bar{a}) \leq g(\bar{b})]$

$(\bar{a} = a_0, \cdots, a_{n-1};\ \bar{b} = b_0, \cdots, b_{n-1},\ \bar{a} \leq \bar{b} \Leftrightarrow \bigwedge_{i<n} a_i \leq b_i$

b) $\forall g \in \mathcal{E}_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow g(\bar{a}) \leq g(\bar{b})]$.

a) は各 $f \in \mathcal{E}$ について f を majorize する $g \in \mathcal{E}_M$ があるということ。) が $\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0$
b) は各 $g \in \mathcal{E}_M$ は (weakly) monotonic, non-decreasing ということ。で provable.

正確には、必要なのは次の形。$Tm(\mathcal{E})$ を $L_1(\mathcal{E})$ 上の terms 全体の集合とすると、ある $Tm(\mathcal{E})_M$ があって、

a′) $\forall t \in Tm(\mathcal{E})\ \exists s \in Tm(\mathcal{E})_M\ [\Sigma^0_0(\mathcal{E})-IA_0 \vdash \bar{a} \leq \bar{b} \rightarrow t(\bar{a}) \leq s(\bar{b})]$.

b′) $\forall s\in Tm(\mathcal{E})_M\ [\,\Sigma_0^0(\mathcal{E})\text{-}IA_0\vdash \bar a\le\bar b\to s(\bar a)\le s(\bar b)\,]$.

各 term $t\equiv t(\bar a)\in Tm(\mathcal{E})$ について、ある $f\in\mathcal{E}$ があって、$\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-IA_0 で $t(\bar a)=f(\bar a)$ ということを仮定していないのだから、本当は a′), b′) を仮定している。この仮定のもとで、

Theorem 2.2. $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$-Sep_0 is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$-conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-IA_0

よって、$+,\cdot\in\mathcal{E}$ なら

Theorem 2.3 $WKL(\mathcal{E})_0$ is $\Pi_2^0(\mathcal{E})$-conservative over $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-IA_0

となる。Theorem 2.2 の証明には Lemma 1 に対応して次で十分。

Lemma 4. $\Gamma\cup\{A_1,\dots,A_n\}\subseteq\Sigma_1^0(\mathcal{E})$ について、

$\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-$IA_0\vdash\Gamma,\exists mA_1,\dots,\exists mA_n \Rightarrow \Sigma_0^0(\mathcal{E})$-$IA_0\vdash\Gamma,\exists m\le t_1A_1,\dots,\exists m\le t_nA_n$

for some terms $t_1,\dots,t_n$ in $L_1(\mathcal{E})$.

これは Parikh (-type) の定理として知られている。Lemma 4 の証明のアウトラインは次のとおり。簡単のため、$\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-$IA_0\vdash\exists mA$ $(A\in\Sigma_0^0(\mathcal{E}))$ $\Rightarrow$ $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-$IA_0\vdash\exists m\le tA$ for some term t を示す。$\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-IA_0 を前のように Gentzen 流に書いて cut を取り除いて quasi normal にしかつ余計な free variables を除いてみると、$\exists mA$ に至る proof P には $\Sigma_0^0(\mathcal{E})$-formulae か、$\exists mA$ の形の $\Sigma_1^0(\mathcal{E})$-formulae しか occur していないことになる。P に occur する eigenvariables (つまり $\exists mA$ に occur する variables 以外。$\exists mA$ に occur する free variables を $\bar a$ とする) の走る変域は、$g(\bar a)$, ${}^\exists g\in\mathcal{E}_M$ で抑えることができる。それを見るには、P の中で、下のほうに occur する eigenvariable から順に $g\in\mathcal{E}_M$ を決めていけばよ

い。(ここで仮定を使う。) よって P の中で $(\exists^1)$ で $A(t(b,\bar{a}))$ から $\exists mA$ が導かれていたら、$b \leq g(\bar{a}) \to t(b,\bar{a}) \leq h(g(\bar{a}),\bar{a})$ for $^\exists h \in \mathcal{E}_{M1}$, より $k \in \mathcal{E}_{M1}$ を $k(\bar{a}) = h(g(\bar{a}),\bar{a})$ として、$\exists m \leq k(\bar{a})A$ となる。この証明は S. Buss [2] による、のでくわしくはそれを参照。

Prop. と Thm 2.2 より Thm 2.3 が出てくる。Lemma 4 から直接、前のように Thm 2.3 を示すこともできる。但し、その際、$exp \in \mathcal{E}$ を仮定していなかったから、$\cancel{\forall x}\exists c\,(lh(c) = x \,\&\, c \in T_x)$ は $\Sigma^0_1(\mathcal{E})$ になってしまう。つまり、P.36 の $\neg A_0 \in \Sigma^0_1(\mathcal{E})$。しかしこれでも Lemma 4 と Lemma 3 の analogue が使えることは明らかだから OK である。

例 1. $\mathcal{E} = \langle 0, 1, +, \cdot, exp \rangle$ $(exp(a) = 2^a)$ としたのが $WKL_0^+ = WKL(\mathcal{E})_0$ である。$\Sigma^0_0(\mathcal{E})$-IA_0 を EFA とも書く。Thm 2.3 より、$A \in \Sigma^0_0(\mathcal{E})$ について、

$$WKL_0^+ \vdash \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow EFA \vdash \forall x \exists y < 2_n(x) A(x,y) \text{ for some } n$$

$2_0(a) = a$, $2_n(a) = 2^{2_{n-1}(a)}$ となる。

2. $\mathcal{E} = \langle 0, 1, +, \cdot \rangle$ のときは、$\Sigma^0_0(\mathcal{E})$-IA_0 を $I\Delta_0$ と書く。すると、$A \in \Sigma^0_1(\mathcal{E})$,

$$WKL(\mathcal{E})_0 \vdash \forall x \exists y A(x,y) \Rightarrow I\Delta_0 \vdash \forall x \exists y < p(x) A(x,y) \text{ for some}$$

polynominal p, となる。

付記. 上の証明は、Π^0_2 [$\Pi^0_2(\mathcal{E})$] sentence A の WKL_0 [$WKL(\mathcal{E})_0$] での proof P に、Σ^0_0-IA_0 [$\Sigma^0_0(\mathcal{E})$-IA_0] での A の proof P' を対応させている。'実際に' P から P' をつくっている。しかも、明らかに、その証明は、$\Sigma^0_0(Tower)$-IA_0 ($Tower(n) = 2_n(0)$) で形式化でき、かつ、P' の'長さ' (= Gödel 数, symbols の数, 推論の数 等) は P の'長さ'の Tower でお

さえることができる。従って、この定理は $Tower \in \mathcal{E}$ のときにはバランスがとれていると言える。($Tower$ が出てくるのは、L_2K での cut-elimination をしているから)しかしながら上の2つの例ではそうではない—少なくとも上の証明では。つまり、上の定理が EFA や $I\Delta_0$ で証明できるのかという問題。又は、次のような Σ^0_1 $A_0, A_1, \cdots$ があるか? 各 A_n は、WKL_0 では短かく証明でき、(例えば n の polynomial で長さがおさえられる)しかしながら、Σ^0_0-$I\Delta_0$ での A_n の証明は、$Tower(n)$ 以上も長くなってしまう。(A_n は Σ^0_1 sentence で true 故、証明はできる)このどちらの問題の解答も筆者には open である。

§4. BI

この§では言語 L_2 に、${}^\omega\omega$ を走る function variables $f, g, h, \cdots$ が入っているとする。

Def. $\mathcal{F}$ を L_2 でのある formulae の集合とする。

1. $BI(\mathcal{F})$ とは次のような公理図式: $P \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$Hyp1 \ \& \ Hyp2 \ \& \ Hyp3 \rightarrow Q\langle\rangle$　　($\langle\rangle$ は空列)

$Hyp1$: $\forall f \exists x P(\bar{f}x)$　　($\bar{f}x = \langle f0, \cdots, f(x \dot{-} 1)\rangle$)

$Hyp2$: $\forall c \in {}^{<\omega}\omega (Pc \rightarrow Qc)$

$Hyp3$: $\forall c \in {}^{<\omega}\omega [\forall x Q(c * \langle x\rangle) \rightarrow Qc]$

2. $TI(\mathcal{F})$, $TI'(\mathcal{F})$ は次の公理図式: $\prec \in \mathcal{F}$ と任意の Q について、

$TI(\mathcal{J})$: $WF(\prec) \to I(\prec, Q)$

$TI'(\mathcal{J})$: $\forall X I(\prec, X) \to I(\prec, Q)$

但し. $WF(\prec) \Leftrightarrow \forall f \exists x (f x' \not\prec f x)$; $I(\prec, Q) \Leftrightarrow Prg[\prec, Q] \to \forall x Q x$

$Prg[\prec, Q] \Leftrightarrow \forall x (\forall y \prec x Q y \to Q x)$

3. $BI \doteq BI(\Sigma^0_0)$, $BI^- \doteq BI(\Sigma^{0,-}_0)$ (Σ^0_0 は L_2 で bndd formulae のクラス,

$TI \doteq TI(\Sigma^0_0)$, $TI^- \doteq TI(\Sigma^{0,-}_0)$ $\Sigma^{0,-}_0$ は second order parameters

$TI' \doteq TI(\Sigma^0_0)$, $TI'^- \doteq TI'(\Sigma^{0,-}_0)$ なしということ)

4. $\forall E(\Pi^1_0)$ とは次の公理図式:

$\forall E(\Pi^1_0)$: $\forall X A(X) \to A(V)$, $A \in \Pi^1_0$ で V は任意の abstract $\lambda x)(F(x))$.

(つまり. $A(V)$ とは. A の中の $t \in X$ を $F(t)$ でおきかえた formula)

5. $\forall E(\Pi^{1,-}_0)$ とは. 上の $\forall E(\Pi^1_0)$ で. $A(X)$ に occur する set parameter

(function parameter も) は X のみとした公理図式, i.e., $\forall X A(X) \in \Pi^{1,-}_1$。

以下でこれらが同値であることを示す。base theory として.

Σ^0_0-CA_0 をとる。これは §1 で定義された Σ^0_0-CA_0 に function variables に関する equality axiom と次の Gp (= Graph principle) を加えたもの:

Gp : $\forall x \exists ! y ((x, y) \in X) \to \exists f \forall x ((x, fx) \in X)$

Rem. 1. BI_M を. $P \in \Sigma^0_0$ と任意の Q について.

BI_M : $Hyp1 - Hyp3$ & $HypM \to Q\langle\rangle$

$HypM$: $\forall c \in {}^{<\omega}\omega \forall x (Pc \to P(c * \langle x\rangle))$

なる公理図式として、 $BI_M \vdash BI$ (つまり. Σ^0_0-$CA_0 \vdash BI_M \to BI$)

となる ([7], Theorem 4 A)。与えられた $P \in \Sigma^0_0$ と Q について、

$P_1 \in \Sigma^0_0$, Q_1 を、 ($d \subsetneq c \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists d' \neq \langle\rangle (d * d' = c)$)

$P_1 c \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists d \subsetneq c\, Pd$ ($\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ P *is past secured*)

$Q_1 c \overset{\circ}{\Leftrightarrow} P_1 c \vee Qc$ とおくと明らかに P_1, Q_1 は $Hyp\,1$, $Hyp\,2$, $Hyp\,M$ をみたす。$Hyp\,3$ がOKなら BI_M より $Q_1\langle\rangle$ となり $Q\langle\rangle$ を得る。$\forall x Q_1(c * \langle x\rangle)$ とする。*Case* 1. c *is past secured*: $P_1 c \to Q_1 c$. *Case* 2 c *is immediately secured*, *i.e.* $Pc \,\&\, \neg P_1 c$: $Pc \to Qc$. *Case* 3 c *is unsecured*, *i.e.*, $\forall d \subseteq c\, \neg Pd$: $\forall x \neg P_1(c * \langle x\rangle)$ と仮定より $\forall x Q(c * \langle x\rangle)$。よって Qc。

2. BI_M の結論は $\forall c Qc$ とできる([ ] Remark 4)。与えられた P, Q, c について, i) c *is past secured* なら $Hyp\,M$ より Pc よって Qc。ii) c *is not past secured* なら、$P_c(d) \overset{\circ}{=} P(c * d)$, $Q_c(d) \overset{\circ}{=} Q(c * d)$ とおいて BI_M の仮定($Hyp\,1$)がみたされ $Q_c\langle\rangle$ を得る。BI では結論を $\forall c Qc$ としたものは偽である。

Def. Ng (=Neighborhood) は次の公理のこと:

Ng: $\forall f \forall x \exists c (lh(c) = x \,\&\, f \in c) \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall f \forall x \exists c (c = \bar{f} x)$

$\overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall f \forall x \exists c \forall i < x = lh(c) \,(c(i) = f(i))$.

Proposition 1. $Ng + BI \vdash TI$, $Ng + BI^- \vdash TI^-$ ([7], Theorem 5A)

Proof

与えられた $\prec \in \Sigma^0_0 [\in \Sigma^{0,-}_0]$ と F について, $WF(\prec)$ と $Prg[\prec, F]$ を仮定する。$\forall x Fx$ を示したい。$P \in \Sigma^0_0 [\in \Sigma^{0,-}_0]$ と Q を,

$Pc \overset{\circ}{\Leftrightarrow} 2 \leq lh(c) \,\&\, \exists n < lh(c) \dot{-} 1 \,(c(n+1) \not\prec c(n))$

$Qc \overset{\circ}{\Leftrightarrow} [c = \langle\rangle \,\&\, \forall x Fx] \vee [c \neq \langle\rangle \,\&\, (Pc \vee \forall y \prec tl(c)\, Fy)]$ とおく。

但し、$tl(c) \overset{\circ}{=} c(lh(c) \dot{-} 1)$。$Hyp\,1$ は Ng より, $Hyp\,2$ は明らかにOK。

Hyp 3. $\forall x\, Q(c*\langle x\rangle)$ とする。 i) $c=\langle\,\rangle$: 仮定と $\mathrm{tl}(\langle x\rangle)=x$ より、$\forall y\prec x\, Fy$. $\mathrm{Prg}[\prec,F]$ より Fx. ii) $c=\langle x\rangle$: Qc には $\forall y\prec x\, Fy$ でよい。 $y\prec x$ とする。 $\neg P(\langle x,y\rangle)$ であるから $Q(\langle x,y\rangle)$ より $\forall z\prec y\, Fz$. Prg で OK. iii) $\mathrm{lh}(c)\geq 2$: $d\equiv\mathrm{tl}(c)$ とおく。 $\neg Pc$ とする, i.e., $\forall n<\mathrm{lh}(c)-1\,(c(n+1)\prec c(n))$. $\forall y\prec d\, Fy$ を示したいので $y\prec d$ をとる。よって $\neg P(c*\langle y\rangle)$ であり, $Q(c*\langle y\rangle)$ より $\forall z\prec y\, Fz$. 再び Prg で OK. //.

Proposition 2. $TI\vdash BI$, $TI^-\vdash BI^-$ ([7], Theorem 5C)

Proof. 与えられた $P\in\Sigma^0_0\,[\in\Sigma^{0-}_0]$ と Q について Hyp 1−3 とする。

$Rc \Leftrightarrow \exists d\subsetneq c\, Pd$ (c is past secured)

$d\prec c \Leftrightarrow c\subsetneq d\ \&\ \neg Rd$, $\prec\in\Sigma^0_0\,[\in\Sigma^{0-}_0]$ とおく。

i) $\forall f\exists n\,(f(n+1)\not\prec f(n))$: Case 1. $\forall n\,(f(n)\subsetneq f(n'))$: Define $g=\cup f(n)$, i.e., $gn\equiv(f(n+1))(n)$. Hyp 1 より $\exists x\, P(\bar{g}x)$. $n\equiv x+1$ として $R(\bar{g}n)$. $\bar{g}n\subseteq fn$ より $R(fn)$ ∴ $fn\not\prec f(n-1)$. Case 2. $\exists n\,\neg(f(n)\subsetneq f(n+1))$: $f(n+1)\not\prec f(n)$.

ii) $Q_1c \Leftrightarrow \neg Rc\to Qc$ とおく。 $\mathrm{Prg}[\prec,Q_1]$ なら、TI (or TI^-) より、$\forall c\, Q_1c$, とくに $Q_1\langle\,\rangle$. $\langle\,\rangle$ is not past secured より $Q\langle\,\rangle$ となって OK. $\forall d\prec c\, Q_1d$ と仮定する。さらに $\neg Rc$ として Qc を示したい。$\prec$ の def. より $\forall d\prec c\, Qd$ (*) である。 Case 1. Pc: Hyp 2 より Qc. Case 2. $\neg Pc$: $\forall y\, \neg R(c*\langle y\rangle)$ となり (*) より $\forall y\, Q(c*\langle y\rangle)$. Hyp 3 で OK.

Proposition 3. $TI'\vdash TI$, $TI'^-\vdash TI^-$.

Proof. $\prec\in\Sigma^0_0\,[\in\Sigma^{0-}_0]$ について、Σ^0_0-CA_0 で $WF(\prec)\vdash\forall X\, I(\prec,X)$

を言えばよい。$\forall m(m \notin X \to \exists n \prec m\,(n \notin X)) \to \exists f \forall m(m \notin X \to fm \prec m \,\&\, m \notin X)$ による。 ⁄.

Proposition 4. $\forall E(\Pi^1_0) \vdash BI$, $\forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash BI^-$

Proof. Prop 3 と同様にして、$P \in \Sigma^0_0$ [$\in \Sigma^{0,-}_0$] と set variable X に適用した BI : Hyp 1-3 $\to X\langle\rangle$ が言え、$\forall E(\Pi^1_0)$ [$\forall E(\Pi^{1,-}_0)$] での $A(X)$ としてこれをとればよい。 ⁄.

Proposition 5. $TI'^- \vdash Ng$ かつ $\forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash Ng$

Proof. $TI'^- \vee \forall E(\Pi^{1,-}_0) \vdash \Pi^1_\infty\text{-}IA$ ⁄.

Proposition 6. $Ng + BI^- \vdash \Pi^1_\infty\text{-}IA$

Proof. $A0 \,\&\, \forall n(An \to An')$ とする。Aa を示したい。$P \in \Sigma^{0,-}_0$ と Q を、$Pc \Leftrightarrow a \leq lh(c)$; $Qc \Leftrightarrow A(a \dot{-} lh(c))$ とおくと Ng より Hyp 1。ほかは明らかだから BI^- より $Q\langle\rangle$, i.e., Aa. ⁄.

Def. 1. formula $A(\vec{f})$ ($\vec{f} = f_0, \cdots, f_n$) が $\underline{\vec{f}\text{-normal}}$ とは、A の中に f_i, $i \leq n$ が occur すれば、それはある variables y, z について $f_i(y) = z$ の形のみのときにいう。

2. quantifier-free (abb. by qf) formula $R(\vec{f})$ の $\underline{\vec{f}\text{-normal form}}$ とは、いくつかの new variables $\vec{x}$ について $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ の形で、R_0 が qf かつ $\vec{f}$-normal であるもの。$\vec{f}$-normal form $\exists \vec{x} R_0(\vec{x}, \vec{f})$ は $R(\vec{f})$ から ある canonical な方法でつくられる、とする。

3. qf formula $R(f)$ と binary abstract $F \equiv \{x, y\} F(x, y)$ について、"R の中の f に F を代入して得られる formula" $R(F)$ とは、$R(f)$ の

f-normal form $\exists\vec{x}R_0(\vec{x},f)$ について、$\exists\vec{x}R_0(\vec{x},F)$ のこと。但し、$R_0(\vec{x},F)$ は、R_0 の中の $f(x)=y$ をすべて $F(x,y)$ でおきかえた formula を表わす。

Proposition 7. $Ng+BI^- \vdash NG$. 但し、NGは、任意のFについて、

$NG:\ Fnc(F)\to\forall x\exists c(c=\bar{F}x)$,

$Fnc(F)\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}\forall x\exists!y F(x,y)$; $c=\bar{F}x\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}\forall i<x=lh(c)F(i,c(i))$.

Proof. Prop. 6 より OK. %

Proposition 8. 各 εf かつ f-normal な $R(x,f)$ について、次をみたす $P\in\Sigma^0_0$ がとれる:

1) P に occur する free variables は、x, f 以外の R に occur する variables か、又は、a new free variable c.

2) 任意の binary abstract F について、

$NG\vdash Fnc(F)\to[\exists xR(x,F)\leftrightarrow\exists c(F\in c\ \&\ Pc)]$

但し、$F\in c\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}c=\bar{F}(lh(c))$.

Proof. R の中の $f(y)=z$, $f(y)\neq z$ の形の formula (R: in negation normal form) をそれぞれ、$c(y)=z\ \&\ y<lh(c)$, $c(y)\neq z\ \&\ y<lh(c)$ でおきかえた formula を P_0c として、$Pc\overset{\triangle}{\Leftrightarrow}\exists x<lh(c)P_0c$ とおく。$Fnc(F)$ のもとで $\exists xR(x,F)\to\exists c(F\in c\ \&\ Pc)$ に NG を使う。%

Proposition 9. εf かつ f-normal な $R(x,f)$ について、

$Ng+BI\vdash Fnc(F)\ \&\ \forall f\exists xR(x,f)\to\exists xR(x,F)$, F: binary abstract.

又、R に f 以外の 2^{nd} order parameter がなければ、これは $Ng+BI^-$ で OK.

Proof. $Fnc(F)$ & $\forall f \exists x R(x,f)$ とする。Prop. 8 でつくられた P をとる。Hyp 1 は OK。Q を $Qc \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} F \in c \to \exists d(F \in c*d \;\&\; P(c*d))$ とすると、明らかに、Hyp 2, Hyp 3 もみたされ ($F(lh(c),x) \;\&\; Q(c*\langle x\rangle) \to Qc$)。BI より $Q\langle\rangle$。よって $\exists d(F \in d \;\&\; Pd)$。Prop. 8 で OK。 //

Proposition 10. 各 qf formula $R(x,f)$ と任意の F について、

$$Ng + BI \vdash Fnc(F) \;\&\; \forall f \exists x R(x,f) \to \exists x R(x,F).$$

R に f 以外の 2nd order parameter がなければ $Ng + BI^-$ で OK.

Proof. Prop. 9 と、$\exists x R(x,F)$ の定義による。 //

Proposition 11. formula A について abstract F を、

$$F \equiv F(X) \doteq \{x,y\}(y \simeq \mu y.\neg A(x,y,X))$$ 但し、

$y \simeq \mu y.\neg A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists y \neg A$ なら y はそのような最小、しからざれば $y=0$、

という formula とする。任意の abstract V について、

$$Ng + BI^- \vdash Fnc(F(V))$$ かつ、

$$Ng + BI^- \vdash \forall x \exists y \neg A(x,y,V) \to \forall x \forall y [F(V)(x,y) \to \neg A(x,y,V)]$$

つまり、$\exists x A(x, F(V)(x), V) \to \exists x \forall y A(x,y,V)$.

Proof. Prop. 6. //

Proposition 12. $Ng + BI \vdash \forall E(\Pi^1_0)$, $Ng + BI^- \vdash \forall E(\Pi^{1,-}_0)$.

Proof. $\forall X A(X) \to A(V)$ を $A \in \Pi^1_0$ $[\in \Pi^{1,-}_0]$ と任意の V について示したい。

第一段。A を $\exists$ が先頭にくる prenex normal form に書きかえる。例えば、$A \leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0$ (A_0 : qf) とする。prenex へのかきか

式には logical なことしか使わないから、任意の V について

$A(V) \leftrightarrow \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$ も logical に言える。よって初めから

A は prenex normal form, 例えば上の形としてよい。

<u>第二段</u> Herbrand する。A に対し、new function variables f_0, f_1

をとって、A_H を、$A_H \equiv A_0(x_0, f_0(x_0), x_1, f_1(x_0, x_1))$ とおく。

logical に、$\exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0 \to \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$。abstracts

F_0, F_1 を、$F_0 \doteq \{x_0, y_0\}(y_0 \simeq \mu y_0 . \neg \exists x_1 \forall y_1 A_0)$

$F_1 \doteq \{x_0, x_1, y_1\}(y_1 \simeq \mu y_1 . \exists y_0 (F_0(x_0, y_0) \& \neg A_0))$

とすれば Prop. 11 より任意の abstract V について、

$N_g + BI^- \vdash Fnc(F_0(V)) \& Fnc(F_1(V))$

$N_g + BI^- \vdash \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V) \to$

$\to \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V)$

よって $N_g + BI$ において、$\forall X A(X) \to \forall X \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H$,

$\forall X \forall f_0 \forall f_1 \exists x_0 \exists x_1 A_H \to \exists x_0 \exists x_1 A_0(x_0, F_0(V)(x_0), x_1, F_1(V)(x_0, x_1), V)$

(Prop. 10) $\to \exists x_0 \forall y_0 \exists x_1 \forall y_1 A_0(V) \equiv A(V)$. //

Prop. 1−12 と、TI', TI'^- はそれぞれ $\forall E(\Pi^1_0)$, $\forall E(\Pi^{1,-}_0)$ に含まれていることにより次を得る。

Theorem 3.1. Σ^0_0-CA_0 上、次の 2 つの同値な公理図式の系列がある:

a) $N_g + BI \leftrightarrow N_g + TI \leftrightarrow TI' \leftrightarrow \forall E(\Pi^1_0)$

b) $N_g + BI^- \leftrightarrow N_g + TI^- \leftrightarrow TI'^- \leftrightarrow \forall E(\Pi^{1,-}_0)$.

Rem. $\forall E(\Pi^1_1) \leftrightarrow \forall E(\Pi^1_0)$ (lightface も) だが、$\forall E(\Sigma^{1,-}_1)$ は強い。っ

まり、$\forall E(\Sigma_1^{1,-}) \leftrightarrow \Pi_\infty^1\text{-}CA$。$\forall Y \exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow n \in Y)$ を考えればよい。

しかし $BI(\Pi_n^1)$ は'弱い', cf. §5。

次に L_2K w/or w/o ω-rule と induction の同等性について。

Def. RFN とは、L_2K に対する (uniform) Reflection principle を表わす：

$$RFN : Pr_{L_2K}(\ulcorner A(X, f, \dot{n})\urcorner) \to A(X, f, n)$$

A は L_2 の任意の formula, $\dot{n}$ は自然数 n に対応する numeral $0'^{\cdots\prime}$ の Gödel 数みたいなもの, i.e., $\ulcorner A(\dot{n})\urcorner$ は 'formula' '$\ulcorner A(a)\urcorner$' の a に numeral $0'^{\cdots\prime}$ を代入した formula $\ulcorner A(0'^{\cdots\prime})\urcorner$ の Gödel 数。Pr_{L_2K} は L_2K の canonical な $\Sigma_1^{0,-}$ provability predicate。

Theorem 3.2. $\Sigma_0^0\text{-}CA_0 \vdash RFN \leftrightarrow \Pi_\infty^1\text{-}IA$.

Corollary. $ACA_0 \vdash RFN_{ACA_0} \leftrightarrow \Pi_\infty^1\text{-}IA$ (cf [12] Lemma 2.7)

ここに $ACA_0 \doteqdot \Pi_1^0\text{-}CA_0$, RFN_{ACA_0} は、'ACA_0 で証明できれば正しい' に対応する、ACA_0 に対する reflection scheme.

Corollary の Proof. ACA_0 は finitely axiomatizable だから。

Thm 3.2 の proof. 1) $\Pi_\infty^1 - IA \to RFN$ は Cut-elimination, Thm 0.2 (Σ_0^0-CA_0 で証明できる) と partial truth def. による。2) $RFN \to \Pi_\infty^1\text{-}IA$ は、$A(0) \& \forall x(A(x) \to A(x')) \to A(n)$ の L_2K で proof P_n が n について prim. rec. につくれるから。 //.

次に、ω-rule が入った L_2K と ω-branching tree (well-founded!) についての induction たる BI との同等性。簡単のため、言語 L_2 をかえる。

Def. 1. 1^{st} order language L_1' は、individual constant として 0 (zero) のみ, function constant として、$'$ (successor, $+1$) のみを持ち、predicate constants として、すべての prim. rec. relations に対応するものを持つ。とくに、L_1' の closed terms は numerals $0'^{\cdots}{}'$ のみである。

2. 2^{nd} order language L_2' は、L_1' に、各 n ごとに n-place の predicate variables $X_0^n, X_1^n, \cdots$ を加えて得られる。

3. $X_0 \subseteq \omega\times\omega$ を ω 上の binary relation (predicate variable) とする。このとき、$L_2K^\omega(X_0)$ は次のような公理と推論を持つ。

Rem. $L_2K^\omega(X_0)$ の定義は、X_0 の arity はいくつでもよく、また X_0 一つでなくてもよい, e.g., $L_2K^\omega(X_0, Y)$ 等も同様。

1) $L_2K^\omega(X_0)$ の sequents はすべて、1^{st} order free variable を持たない (2^{nd} order のはあってよい。)

2) 公理。 2.1. L_1' の constants に関する公理。その main formulae はすべて atomic か negated atomic よりなる。ふつうに &f で書いた公理の closed instances。 2.2 $\Gamma, X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ holds ($\bar{n} \doteq 0'^{\cdots}{}'$, n ケの $'$) 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\bar{n}, \bar{m})$ if $X_0(n, m)$ does not hold.

3) 推論は、L_2K のそれに次の変更を加える。

3.1 $(b\forall)$, $(b\exists)$ を取り除く (つまり bndd quantifiers を primitive な logical operators と思わない) 3.2 $(\forall)$ を次の ω-rule におきかえる:

$$(\omega)\quad \frac{\{\Gamma, A(\bar{n})\}_{n\in\omega}}{\Gamma, \forall x A(x)} \quad \text{つまり} \quad \frac{\Gamma, A(0)\quad \Gamma, A(\bar{1})\quad \cdots\quad \Gamma, A(\bar{n}), \cdots}{\Gamma, \forall x A(x)}$$

3.3 (∃) を次の形に制限する： $\dfrac{\Gamma,\ A(\bar{n})}{\Gamma,\ \exists x A(x)}$

4. $L_2K^\omega(X_0)$ の preproof とは、ω-branching な ~~labeled~~ tree で、その各 node に $L_2K^\omega(X_0)$ の sequent が label として貼ってあり、かつ、上の $L_2K^\omega(X_0)$ の公理・推論に関して locally correct になっていて、かつ、cut degree が finite なもの（⇔ cut formulae の長さ＝degree＝logical symbols の数（¬は数えなくてよい）に有限な bound がある）。

5. $L_2K^\omega(X_0)$ の proof とは、preproof で well-founded (naked tree が) なもの。(ω-proof とも言う)

6. preproof をもう少し formal に定義する。$f : {}^{<\omega}\omega \to (\omega\times\omega\times\omega)\cup\{X\}$
(X(バツ) $\notin \omega\times\omega\times\omega$) が preproof とは、

6.1 $T_f \triangleq \{c \in {}^{<\omega}\omega : fc \neq X\}$ として、イ) T_f は tree (non-empty)
ロ) $c*\langle n\rangle \in T_f$ & $m < n \Rightarrow c*\langle m\rangle \in T_f$ 　ハ) $c*\langle n\rangle \in T_f$ & $n \geq 2 \Rightarrow$ $c*\langle m\rangle \in T_f$

6.2. $c \in T_f$ について、fc は $\langle R, \ulcorner\Gamma\urcorner, d\rangle$ の形。6.21 R は公理か推論の名前 6.22 Γ は ($L_2K^\omega(X_0)$ の) sequent 6.23 d は、f_c ($f_c(c') \triangleq f(c*c')$, i.e., node c より上の subproof of f) の中で使われている cut の cut formulae の長さの upperbound 6.24 fc と $\{f(c*\langle n\rangle)\}_{n\in\omega}$ は、公理・推論に関して correct になっている。但し、$(fc)_0$ が公理なら $f(c*\langle n\rangle) = X$ for $\forall n \in \omega$.

明らかに、preproof は Π^0_1 in X_0, i.e., f is a preproof in $L_2K^\omega(X_2) \Leftrightarrow$

prepf(f, X_0) なる prepf $\in \Pi^0_1$ がある。

7. ω-RFN とは次のような公理図式：sequent Γ に至る $L_2K^\omega(X_0)$ での proof があれば Γ は真。

Theorem 3.3 Σ^0_0-$CA_0 \vdash \omega$-RFN $\leftrightarrow TI' \leftrightarrow N_g + BI$, etc.

Proof. 1) ω-RFN $\rightarrow \Pi^1_\infty$-IA より N_g は o.k. TI を示す。binary predicate variable $\prec$ について、$WF(\prec)$ を仮定して、$I(\prec, A) \doteq Prg[\prec, A] \rightarrow \forall x Ax$ を示せばよい。少し省略して書くと、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cdots\ \neg Prg[\prec, A],\ m \prec n \supset Am\ \cdots}{\neg Prg[\prec, A]\ \ \forall y \prec n Ay} \qquad \neg An, An}{\neg Prg[\prec, A],\ \neg(\forall y \prec n Ay \supset An), An}}{\cdots\ \neg Prg[\prec, A], An\ \cdots}}{\neg Prg[\prec, A],\ \forall x Ax}$$

というpreproof of $\neg Prg[\prec, A], \forall x Ax$ をつくると、左上の $\neg Prg[\prec, A],\ m \prec n \supset Am$ でもし $m \not\prec n$ ならば公理だから stop。しからざれば続けていくと $WF(\prec)$ より これは proof になる。より $I(\prec, A)$ に至る proof があるから ω-RFN より $I(\prec, A)$ を得る。

2) Thm 3.2 と同様、i.e., cut-elimination for $L_2K^\omega(X_0)$ と partial truth def. による。くわしくは [6] を参照。 //

Def. theory T について、ω-model-RFN$_T$ とは、任意の formula $A(X)$ について、次を主張する公理図式：

$A(X)$ is true $\Rightarrow$ $\exists$ countable ω-model $M = (M_n)_{n\in\omega}$ s.t. $M_0 = X$ &

$M \models A[X]$ & $M \models T$.

T が L_1' の L_2K での Π^0_1 公理だけから成るとき、単に ω-model-RFN と書く。

Proposition (Henkin-Orey の ω-completeness thm). ACA_0 で:

$A(X_0)$ の ω-proof in $L_2K^\omega(X_0)$ がある $\Leftrightarrow$ $A(X_0)$ はすべての countable ω-model M ($X_0 \in M$) で true.

Corollary $ACA_0 \vdash \omega\text{-RFN} \leftrightarrow \omega\text{-model-RFN}$ よって

$ACA_0 \vdash \omega\text{-model-RFN}_{ACA_0} \leftrightarrow TI'$ (cf. [12] §4)

parameter free の場合のスケッチ。L_2K^ω の preproof は、$L_2K^\omega(X_0)$ の preproof で 公理 2.2 $\Gamma, X_0(\bar{s}, \bar{t})$ 2.3 $\Gamma, \neg X_0(\bar{s}, \bar{t})$ in p.52 が使われていないもの。$\omega\text{-RFN}^-$ (for L_2K^ω) とは、各 formula A と、各 $f \in \Sigma^{0,-}_0$ ($\Leftrightarrow f(x)=y \in \Sigma^{0,-}_0$) について、

f が A に至る L_2K^ω の proof なら A は真

という公理図式。また、$\omega\text{-RFN}^-_{cf}$ とは、上の proof f を cut-free (但し、atomic formula についての cut は可) に制限したもの。このとき、

Theorem 3.4 $\Sigma^0_0\text{-}CA_0 \vdash \omega\text{-RFN}^-_{cf} \leftrightarrow TI'^-$

証明は前と同じ。また、[6] より、ある prim. rec. functional ν があって、各 $f \in \Sigma^{0,-}_0$ について、$\Sigma^0_0\text{-}CA_0 + TI'^-$ で、

f が A に至る L_2K^ω の proof $\Rightarrow$ $\nu(f)$ は f に至る L_2K^ω の cut-free proof

となる。(実際には、ν は、f の code に cut-free な $g=\nu(f)$ の code を対応させる function) ここで少し微妙なのは、f が proof である

こと，すなわち．WF(f) から．WF(ν(f)) を示すところだが：$f \in \Sigma^{0-}_0$ と，$TI'^- = \forall E(\Pi^{1-}_0) \to \Pi^{0-}_1$-CA より，[6] の議論が work することがわかる。よって

Theorem 3.5 Σ^0_0-$CA_0 \vdash \omega$-$RFN^- \leftrightarrow TI'^-$

付記．Def. formulae の集合 $\mathcal{F}$ について．$\mathcal{F}$-BI とは．BI の Q を $Q \in \mathcal{F}$ に制限したものとする。

Proposition. $Ng + \Pi^1_1$-BI $\vdash \Sigma^1_1$-GDC （[7], Theorem 7B, [12] Theorem 4.1)

Proof. 初めに．Thm 3.1 の proof より $Ng + \Pi^1_1$-BI $\vdash \Pi^0_1$-CA（Π^1_0-BI で十分）．よって．

$\forall i \forall f \exists g \forall n A(i, \bar{f}n, \bar{g}n) \to \exists h \forall i \forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))]$

を．$A \in \Pi^1_0$ について示せば十分。但し．ここに．$h_i(n) = h(\langle i, n\rangle)$ で．

pairing function $\langle\ ,\ \rangle$ は．$\langle 0,0\rangle = 0$，イ．$\langle n,n\rangle+1 = \langle 0, n+1\rangle$

ロ．$\langle i,n\rangle + 1 = \langle i+1, n\rangle$ if $i < n-1$　ニ．$\langle n-1, n\rangle + 1 = \langle n, 0\rangle$

ハ．$\langle i,n\rangle + 1 = \langle i, n+1\rangle$ if $n < i$　なるものとする。明らかに．

$\langle i,n\rangle < \langle i, n+1\rangle$ である。$P \in \Pi^1_0$ を．

$Pc \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \neg\forall i < lh(c)\, \forall n \le \min(lh_1(c_i), lh_1(c_{i+1}))\, A(i, \bar{c}_i(n), \bar{c}_{i+1}(n))$

但し．$lh_1(c_i) \stackrel{\circ}{=} 1 + \max\{n : \langle i, n\rangle < lh(c)\}$，$c_i(n) \stackrel{\circ}{=} c(\langle i,n\rangle)$

for $\langle i,n\rangle < lh(c)$．　もし．$\exists h \forall x \neg P\bar{h}x$ なら OK だから．$\forall h \exists x P\bar{h}x$

とする。$Q \in \Pi^1_1$ を．$Qc \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} Pc \vee \forall h \in c\, \neg\forall i < lh(c) \forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$

とすると，Hyp 3：$\forall x Q(c * \langle x\rangle) \to Qc$　となる。∵ $\forall x Q(c*\langle x\rangle)$ & $\neg Qc$

とする．$l = lh(c) = \langle i,n\rangle$ とおく。1) $i = n$：$h \in c$ で．$\forall i < lh(c) \forall n$

$A(i, \bar{h}_i(n), \bar{h}_{i+1}(n))$ となるようにとる。 $x = h_0(n+1)$ ととれば $\neg Q(c * \langle x \rangle)$.

ロ) $i < n-1$: $x = h_{i+1}(n)$ ハ) $n < i$: $x = h_i(n+1)$ ニ) $i = n-1$: 仮定より g を $\forall n A(i, \bar{h}_i(n), \bar{g}n)$ となるようにとり、$x = g0$ とし、h' を、

$h'_j = h_j$ for $j \leq i$, $h'_i = g$ となるようにすれば この x と h' について、$\neg Q(c * \langle x \rangle)$。 よって Π^1_1-BI より $Q\langle\rangle$。しかし明らかに $\neg Q\langle\rangle$。

§5. ID と iterated Π^1_1-CA.

この § では S. Feferman [4] の結果をまとめる。ID に関する証明論は [1] にくわしい。この § 以降、再び言語は function variables なしのもとの L_2 にもどる。order type ε_0+1 の standard な well-ordering on ω をひとつとって fix. ordinals $\alpha, \beta \leq \varepsilon_0$ と対応する自然数を同一視する。$\alpha < \beta$ と書いたら、自然数の上のふつうの大小ではなく、この順序での大小を表わすとする。

Def. 1. $L_1(X,Y)$ を、言語 L_1 に a unary predicate variable (constant) X と binary Y を加えて得られる一階の言語とする。$L_1(X,Y)$ での formula $\mathfrak{A}(X,Y; a,b)$ が <u>positive operator form</u> であるとは、1) $\mathfrak{A}$ の中に X は positive にしか occur しない (i.e., $t \notin X$ なし)、2) free variables は高々 a, b のみ、のときに言う。(Y は negative に occur してよい)

2. 一階の言語 L_{ID} は、L_1 に、各 pos. operator form $\mathfrak{A}$ ごとに binary predicate constant $P^{\mathfrak{A}}$ を付加して得られる:

$L_{ID} \equiv L_1 + \{P^{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A}$ is a pos operator form$\}$.

3 一階の理論 ID_α ($\alpha<\varepsilon_0$) は、その言語として L_{ID} をもつ。公理は、L_{ID} での PA (= Peano Arithmetic) の公理 (つまり、induction axiom は L_{ID} の任意のformulaに適用可) に、各 $P^{\mathfrak{A}}$ ごとに次の2つの公理を加えたもの:

$(P^{\mathfrak{A}}1)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha(\mathfrak{A}_\beta(P^{\mathfrak{A}}_\beta)\subseteq P^{\mathfrak{A}}_\beta)$

$(P^{\mathfrak{A}}2)_\alpha$ $\quad \forall\beta<\alpha[\mathfrak{A}_\beta(F)\subseteq F \to P^{\mathfrak{A}}_\beta\subseteq F]$, Fは L_{ID} の任意のformula.

但し、$x\in P^{\mathfrak{A}}_\beta \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} P^{\mathfrak{A}}(\beta,x)$, $x\in\mathfrak{A}_\beta(X) \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}(X,P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta,x)$

$(\gamma,y)\in P^{\mathfrak{A}}_{<\beta} \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \gamma<\beta \,\&\, y\in P^{\mathfrak{A}}_\gamma$

一般に、$\mathcal{C}l^{\mathfrak{A}}_{Y,\beta}(X) \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \mathfrak{A}(X,Y,\beta)\subseteq X \overset{\wedge}{\Leftrightarrow} \forall x(\mathfrak{A}(X,Y,\beta,x)\to x\in X)$ として、

$(P^{\mathfrak{A}}1)_\alpha$ $\forall\beta<\alpha\ \mathcal{C}l^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(P^{\mathfrak{A}}_\beta)$ $\quad (P^{\mathfrak{A}}2)_\alpha\ \forall\beta<\alpha[\mathcal{C}l^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(F)\to P^{\mathfrak{A}}_\beta\subseteq F]$

つまり、$P^{\mathfrak{A}}_\beta = \bigcap\{X : \mathcal{C}l^{\mathfrak{A}}_{P^{\mathfrak{A}}_{<\beta},\beta}(X)\}$ という気持ち。

4. limit $\lambda\le\varepsilon_0$ については $ID_{<\lambda} \overset{\wedge}{=} \bigcup_{\alpha<\lambda} ID_\alpha$

5. 言語 $L_{ID(W)} \overset{\wedge}{=} L_1 + \{W\}$, W : a binary predicate constant.

理論 $ID_\alpha(W)$ は言語として $L_{ID(W)}$ をもつ。公理は $L_{ID(W)}$ でのPAのそれに、次を加える:

$(W.1)_\alpha$ $\forall\beta<\alpha\ \forall e\in Tr^{<\beta}[\forall c(\{e\}^{W_{<\beta}}(c)\neq 0)\vee\forall x(e\ulcorner\langle x\rangle\in W_\beta)\to e\in W_\beta]$

$(W.2)_\alpha$ $\forall\beta<\alpha\ \forall e\in Tr^{<\beta}[(\forall c(\{e\}^{W_{<\beta}}(c)\neq 0)\vee\forall x(F(e\ulcorner\langle x\rangle))\to Fe]\to\forall e\in W_\beta\, Fe$

ここに、Fは $ID_\alpha(W)$ の言語 $L_{ID(W)}$ の任意のformula.

$e\in Tr^{<\beta} \overset{\wedge}{\Leftrightarrow}$ e is a code of a total rec. function in $W_{<\beta}$ ($\overset{\wedge}{=}\Sigma_{\gamma<\beta}W_\gamma$)

s.t. $Tr_e \overset{\wedge}{=} \{c\in\omega^{<\omega} : \{e\}^{W_{<\beta}}(c)=0\}$ is a tree.

$e\ulcorner\langle x\rangle$ は $\{e\ulcorner\langle x\rangle\}^{W_{<\beta}}(c)\simeq\{e\}^{W_{<\beta}}(\langle x\rangle * c)$ なるcode.

つまり W_β は the set of codes of well-founded and rec. in $W_{<\beta}$ trees.

明らかに $ID_\alpha(W) \subseteq ID_\alpha$

6. $ID_{<\lambda}(W) \stackrel{d}{=} \bigcup_{\alpha<\lambda} ID_\alpha(W)$ λ : limit $\leq \varepsilon_0$.

Rem. ID_α に α までの超限帰納法が公理として入っていないのは、$\alpha < \varepsilon_0$ 故証明できてしまうから。一般の $\alpha \geq \varepsilon_0$ については、ID_α は α までの超限帰納法を公理(図式)として入れる。

Def. 理論 S と T と、S, T の言語に共通な formulae の集合 $\mathcal{F}$ について、

1. $S \subseteq_{\mathcal{F}} T \Leftrightarrow S \vdash A \Rightarrow T \vdash A$ for any $A \in \mathcal{F}$

2. $S \equiv_{\mathcal{F}} T \Leftrightarrow S \subseteq_{\mathcal{F}} T$ & $T \subseteq_{\mathcal{F}} S$

Lemma. a) 1. $ID_1 \subseteq_{\Pi^1_0}$ - $(ACA_0+)\Pi^{1-}_1$-CA_0 2. $ID_1 \subseteq_{\Pi^1_0}$- $RCA_0 + BI^-$

b) $RCA + \Pi^{1-}_1$-$CA^* + BI^- \subseteq_{\Pi^1_0}$- $ID_1(W)$

但し、Π^{1-}_1-CA^* : $\exists X \forall n (n \in X \leftrightarrow \forall f \exists n R(\bar{f}n))$ つまり Π^{1-}_1-CA を、Π^1_1-normal form なものに制限した公理。

c) $ID_\alpha \subseteq_{\Pi^1_0}$- Π^{1-}_1-CA^α_0

d) $ID_{\omega^{\alpha+1}} \subseteq_{\Pi^1_0}$- Π^1_1-$CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI$

e) Π^1_1-$CA_0^{<\omega^\alpha} \subseteq_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\omega^\alpha}(W)$ $(0 < \alpha \leq \varepsilon_0)$

f) Π^1_1-$CA^\alpha_0 + BI \subseteq_{\Pi^1_0}$- $ID_{\alpha\cdot\omega}(W)$ $(0 < \alpha < \varepsilon_0)$

よって、

Theorem 4.1. a) Π^1_1-$CA_0^{<\omega^\alpha} \equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\omega^\alpha}$ $(0 < \alpha \leq \varepsilon_0)$

b) Π^1_1-$CA^{<\omega^{\alpha+1}} + BI \equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{\omega^{\alpha+1}}$ $(0 \leq \alpha < \varepsilon_0)$

c) Π^1_1-$CA_0^{<\omega^\lambda} \equiv_{\Pi^1_0}$- Π^1_1-$CA^{<\omega^\lambda} + BI \equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\omega^\lambda}$ (λ : limit $\leq \varepsilon_0$)

とくに、d) Π^1_1-$CA_0 \equiv_{\Pi^1_0}$- $ID_{<\omega}$ e) Π^1_1-$CA + BI \equiv_{\Pi^1_0}$- ID_ω

f) $\Sigma^1_2\text{-}GDCR \equiv_{\Pi^1_0} ID_{<\omega^\omega}$ g) $\Sigma^1_2\text{-}GDC \equiv_{\Pi^1_0} ID_{<\varepsilon_0}$.

Rem. λ: limit なら、$ID_{\omega^\lambda} \not\leq_{\Pi^0_1} \Pi^1_1\text{-}CA^{<\omega^\lambda}+BI$. $ID_{\omega^\lambda} \vdash Consis(ID_{<\omega^\lambda})$ より。

Lemma a), b), d) の証明のスケッチ。

a) 各 P^α を、$I^\alpha = \bigcap\{X : \mathit{Cl}^\alpha(X)\} : \Pi^{1-}_1$ で解釈する。1. $\Pi^1_1\text{-}CA$ よりこれは set として存在する。2. Thm 3.1 より $RCA_0+BI^- \vdash \forall E(\Pi^{1-}_0)$. これより $(P^\alpha 2)$ を解釈したものが OK となる。

d) 各 P^α の解釈 I^α を Δ^1_2 で与える。$F^\alpha_{Y,\beta} \doteq \bigcap\{X : \mathit{Cl}^\alpha_{Y,\beta}(X)\} : \Pi^1_1$

$C^\alpha(Y,\beta) \Leftrightarrow (Y)_\beta \subseteq F^\alpha_{Y<\beta,\beta}$ & $\mathit{Cl}^\alpha_{Y<\beta,\beta}((Y)_\beta)$ とおく。

1) $\forall\beta\forall Y\ \mathit{Cl}^\alpha_{Y,\beta}(F^\alpha_{Y,\beta})$ 2) $\exists Y C^\alpha(Y,0)$: $(Y)_0 = F^\alpha_{\phi,0}$ ととる。

3) $\exists Y\forall\beta\le\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta) \to \exists Y \forall \beta\le\omega^\alpha\cdot(n+1)\ C^\alpha(Y,\beta)$

∵ $\forall\beta\le\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta)$ とする。$\forall\beta\le\omega^\alpha\cdot(n+1)\ C^\alpha(Z,\beta)$ となる Z は、$(Z)_\beta \doteq (Y)_\beta$ for $\beta\le\omega^\alpha\cdot n$. $\Pi^1_1\text{-}CA^{\omega^\alpha}$ より、$(Z)_{\omega^\alpha+1+\gamma} = F^\alpha_{Z<\omega^\alpha+1+\gamma,\ \omega^\alpha+1+\gamma}$ for $\gamma<\omega^\alpha$ と~~伸~~延ばせる。

4) $\forall n\exists Y\forall\beta\le\omega^\alpha\cdot n\ C^\alpha(Y,\beta)$. 5) $\forall\gamma\forall YZ[\forall\beta<\gamma(C^\alpha(Y,\beta) \,\&\, C^\alpha(Z,\beta)) \to$

$\to Y_{<\gamma}=Z_{<\gamma}]$: by t.i. on $\gamma<\varepsilon_0$.

6) $x\in I^\alpha_\gamma \Leftrightarrow \exists Y[\forall\beta\le\gamma\ C^\alpha(Y,\beta) \,\&\, x\in(Y)_\gamma]$

$\Leftrightarrow \forall Y[\forall\beta\le\gamma\ C^\alpha(Y,\beta)\to x\in(Y)_\gamma]$: Δ^1_2

7) $\forall\gamma<\omega^{\alpha+1}\ \mathit{Cl}^\alpha_{I^\alpha_{<\gamma},\gamma}(I^\alpha_\gamma)$: 4) - 6) より（ここまでは $\Pi^1_1\text{-}CA^{\omega^\alpha}$ しか使ってない）

8) $\forall\gamma<\omega^{\alpha+1}(\mathit{Cl}^\alpha_{I^\alpha_{<\gamma},\gamma}(B)\to I^\alpha_\gamma\subseteq B)$ for any B. ∵ 4) より $\exists Y$ s.t.

$\forall\beta\le\gamma\ C^\alpha(Y,\beta)$. とくに、$(Y)_\gamma\subseteq F^\alpha_{Y<\gamma,\gamma}$. Thm 3.1 より $\forall E(\Pi^1_0)$ より、

$\mathit{Cl}^\alpha_{Y<\gamma,\gamma}(B)\to (Y)_\gamma\subseteq B$. 6) より $Y_{<\gamma+1} = I^\alpha_{<\gamma+1}$. //

b) $M \overset{\circ}{=} Rc'(W)$ として、QX ($Q = \forall, \exists$) を $Qx \in Rc'(W)$ で、$n \in X$ を $n \in' x \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \{x\}^W(n) \simeq 0$ でおきかえた formula A^M を、各 A in L_2 について つくって、$RCA + \Pi^1_1\text{-}CA^* + BI^- \vdash A \Rightarrow ID_1(W) \vdash A^M$ を示す。

イ) $ID_1(W) \vdash (\Pi^1_1\text{-}CA^*)^M \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \exists y \in M\, \forall n\, (n \in' y \leftrightarrow \forall f^M \exists x P(\bar{f}x, n))$

($\forall f^M$ は $\forall f \in' M$) $P(\bar{f}x, n)$ を $P_n(\bar{f}x)$ と書く。これは monotonic として よい：$P_n c$ & $c \subseteq d \rightarrow P_n d$。ある prim. rec. g_P について、$g_P(n) \in W \leftrightarrow \forall f^M \exists x P_n \bar{f}x$ を示せば十分。$e_{P_n} \overset{\circ}{=} g_P(n)$ を、

$c \in' e_{P_n} \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \neg P_n c$. monotonicity より e_{P_n} codes a tree $Tr_{e_{P_n}}$ $c \in Tr_{e_{P_n}} \overset{\circ}{\Leftrightarrow} c \in' e_{P_n} \Leftrightarrow c$ is unsecured. このとき、

$e_{P_n} \in W \leftrightarrow \forall f^M \exists x P_n \bar{f}x$ ∵ n は略。$c \in Sec_P$ (c is securable) $\overset{\circ}{\Leftrightarrow}$ $e_P \upharpoonright c \in W$ とおく。a) $Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Sec_P) \rightarrow c \in Sec_P$ は明らか。

b) $\forall c\, [Pc \vee \forall x (c * \langle x \rangle \in Q) \rightarrow Qc] \rightarrow Sec_P \subseteq Q$ for any Q：

$e \in Tr = Tr^\phi$ について、$F_c e \overset{\circ}{\Leftrightarrow} \forall d\, [Tr_e = Tr_{e_P \upharpoonright c * d} \rightarrow c * d \in Q]$ とおくと、

$W \subseteq F_c$ となる。例えば、$Tr_e = \phi \rightarrow F_c e$ には、$Tr_{e_P \upharpoonright c * d} = \phi \Rightarrow P(c * d)$ $\Rightarrow Q(c * d)$ となる。よって $c \in Sec_P \rightarrow e_P \upharpoonright c \in W \rightarrow F_c(e_P \upharpoonright c) \rightarrow c \in Q$。

c) $c \in Sec_P \rightarrow \forall f^M \exists x P(c * \bar{f}x)$：b) より。とくに、$\langle\rangle \in Sec_P \rightarrow \forall f^M \exists x P \bar{f}x$.

d) $\forall f^M \exists x P \bar{f}x \rightarrow \langle\rangle \in Sec_P$, i.e., $e_P \in W$. ∵ $\langle\rangle \notin Sec_P$ とする。

$h \in M = Rc(W)$ を $hc \simeq \mu x. (c \notin Sec_P \rightarrow c * \langle x \rangle \notin Sec_P)$。$h$ より $f \in M$ を a) によりつくって $\forall x \neg P \bar{f}x$ となる。

ロ) $ID_1(W) \vdash (BI^-_M)^M$: $\forall f^M \exists x P \bar{f}x$ & $\forall c \forall d (Pc \rightarrow P(c * d))$ & $\forall c (Pc \rightarrow Qc)$ & $\forall d (\forall x\, Q(c * \langle x \rangle) \rightarrow Qc) \rightarrow Q\langle\rangle$; b), d) より　　//.

Rem 1. Lemma の証明より、少なくとも、Π^1_n-CA + BI $\subseteq_{\Sigma^1_1}$ Π^{1-}_n-CA$^\omega_0$ (in ACA$_0$ + Π^{1-}_n-CA$^\omega$) となる, $n \geq 1$。($M \doteq \bigcup_{i\in\omega} Rec((Y)_i)$ w/ $Hier^n_\omega(\phi, Y)$))。 明らかに、BI(Π^1_n) $\cup$ BI(Σ^1_n) $\subseteq$ Π^1_n-CA + BI。

2. Σ^1_1-AC$_0$ + Π^{1-}_1-CA $\subseteq_{\Pi^1_0}$ ID$_1$(W) : 1) §2 の A. Cantini の証明より、Σ^1_1-AC$_0$ + Π^{1-}_1-CA $\subseteq_{\Sigma^1_1}$ Π^{0-}_1-CA$^{<\omega}_0$(W) + Π^{1-}_1-CA*(W) (sets は各nについて、W の n-th jump に rec. in なものに限る), 明らかに、これは ID$_1$(W) で modeling できる。

3. ID$_1$ $\not\subseteq_{\Pi^1_1}$ ACA + Π^{1-}_1-CA : ACA + Π^{1-}_1-CA $\vdash$ Howard ordinal までの超限帰納法。 より ACA + Π^{1-}_1-CA $\vdash$ Consis(ID$_1$)

4 BI = BI + Σ^1_1-GDC $\vdash$ A, A $\in \Pi^1_0$ なら ∃α < Howard ordinal s.t. PA + "αまでの超限帰納法" $\vdash$ A より ID$_1$ $\vdash$ A。 つまり、

BI = BI + Σ^1_1-GDC $\subseteq_{\Pi^1_0}$ ID$_1$

5. ID$_2$ $\subseteq_{\Pi^1_0}$ BI + Π^{1-}_1-CA : まず ID$_1$ の $P^{\mathfrak{A}}_0$ を Π^{1-}_1-CA で set としてつくり、ID$_2$ の $P^{\mathfrak{A}}_1$ は BI による。

6. BI + Π^{1-}_1-CA $\subseteq_{\Pi^1_0}$ ID$_2$: 4. と同様、証明論による。*)

付記. ID$^\wedge_1$ を、最小の fixed point $P^{\mathfrak{A}}$ (ID$_1$) がある、ではなく、単なる fixed point $P^{\mathfrak{A}}$, i.e., $P^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}(P^{\mathfrak{A}})$ for pos. $\mathfrak{A}(X^+, n)$, がある という理論 とすると、ID$^\wedge_1$ $\equiv_{\Pi^1_0}$ Σ^1_1-AC が知られている。[5]。 しかし、[5] での Σ^1_1-AC $\subseteq_{\Pi^1_0}$ ID$^\wedge_1$ の証明はかなり間接的である。直接、Π^0_1-CA$^{<\varepsilon_0}_0$ $\subseteq_{\Pi^1_0}$ ID$^\wedge_1$ は示せないか？

*) 先に Π^{1-}_1-CA の cut をとる。o.d. で言えば Π^{1-}_1-CA を C_0 で BI を C_1 で。

§6. iterated Π^0_1-CA の順序数。

Def. 1. $\Omega \triangleq \omega_1$ = the 1st uncountable ordinal として. $\varphi: \Omega \to \Omega$ が normal とは. strictly increasing ($\alpha < \beta < \Omega \Rightarrow \varphi(\alpha) < \varphi(\beta)$) で. かつ. continuous ($\varphi(\lambda) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi(\alpha)$ for limit $\lambda < \Omega$) なこと。

2. normal $\varphi: \Omega \to \Omega$ の derivative $\varphi': \Omega \to \Omega$ は次で定義される normal function: $\varphi'(\alpha)$ = the α-th fixed point of φ.

3 Veblen hierarchy $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$ は、次のようにしてつくられる normal functions の列: 3.1 $\varphi_0(\alpha) = 2^\alpha$ 3.2 $\varphi_{\alpha+1} = (\varphi_\alpha)'$

3.3 λ: limit $\Rightarrow rg\varphi_\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} rg\varphi_\alpha$ ($rg\varphi$ = the range of $\varphi = \varphi''\Omega$)

つまり. $\varphi_\lambda(\beta)$ = the β-th common fixed point of φ_α's w/ $\alpha < \lambda$.

Proposition 1. $\varphi_{\alpha+1}(0) = \sup_{n<\omega} \varphi^n_\alpha(0)$, 但し. $\varphi: \Omega \to \Omega$ について. φ^n は φ の n-th iterate. $\varphi^0(\alpha) = \alpha$; $\varphi^{n+1}(\alpha) = \varphi(\varphi^n(\alpha))$

2 $\varphi_{\alpha+1}(\beta+1) = \sup_{n<\omega} \varphi^n_\alpha(\varphi_{\alpha+1}(\beta)+1)$

3. limit λ について. $\varphi_\lambda(0) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha(0)$

$\varphi_\lambda(\beta+1) = \sup_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha(\varphi_\lambda(\beta)+1)$

4. $\varphi_\alpha(\beta) = \sup_{\gamma<\beta} \varphi_\alpha(\gamma)$ for limit $\beta < \Omega$.

5. $\varphi = \lambda\alpha.\varphi_\alpha(0): \Omega \to \Omega$ は normal.

Def. 順序数 $\Gamma_0 \triangleq$ the least α ($\alpha = \varphi_\alpha(0)$) $= \varphi'(0)$

= the least $\alpha > 0$ ($\forall \beta, \gamma < \alpha\ (\varphi_\beta(\gamma) < \alpha)$).

以下. order type Γ_0 の prim. rec. well-ordering on ω で standard なものをひとつとって fix (cf. [9]).

Theorem 5.1 1) Π^0_1-$CA_0^{<\omega^a}$ is Π^1_1-conservative over $ACA_0 + I(<\varphi_a(0))$ ($a \le \Gamma_0$)

2) Π^0_1-$CA^{<\omega^{a+1}}$ is Π^1_1-conservative over $ACA_0 + I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$

($a < \Gamma_0$)

但し. $I(<a) \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{\alpha<a} I(\alpha)$; $I(\alpha) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall X\, I(X,\alpha)$

$I(X,\alpha) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} Prg[<,X] \to \forall x<\alpha\, (x\in X)$ ($<$は Γ_0-ordering).

Lemma 1. 1) $\nu=\omega^a>1$ について. Π^0_1-$CA_0^{<\nu} \vdash I(<\varphi a 0)$ つまり

Π^0_1-$CA_0^{<\nu} \vdash I(\alpha)$ for each $\alpha<\varphi a 0 \equiv \varphi_a(0)$.

2) $\nu=\omega^{a+1}$ について. Π^0_1-$CA^{<\nu} \vdash I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$.

しばらくLemma 1の証明が続く。当分の間 Π^0_1-$CA_0^{<\nu}$ の中での証。

Uを a fixed set parameter とする。$\beta<\nu$ について.

$I^{<\beta}(\gamma) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} \forall X\in \bigcup_{\delta<\beta} Rc(H^U_\delta)\, I(X,\gamma)$ (H^U_δ は U の δ-th jump).

各 $\alpha<\nu$ について. $A_\alpha(a) \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} 0<a \to \forall\beta\,\forall\delta>0\,[\,I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)\ \&$

$\&\ \omega^a(\delta+1)\le\alpha \to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)\,]$

とおく。このとき.

Proposition 1. 各 $\alpha<\nu$ について. Π^0_1-$CA_0^{<\nu} \vdash Prg[A_\alpha]$

但し. $Prg[A_\alpha] \stackrel{\triangle}{\Leftrightarrow} Prg[<, A_\alpha]$ ($<$: Γ_0-ordering)

Proposition 2. Π^0_1-$CA_0^{<\nu} \vdash I(<\nu)$

Lemma 1 の証明。 1) Prop. 1, 2 より Π^0_1-$CA_0^{<\nu} \vdash \forall a<\alpha\, A_\alpha(a)$ for

each $\alpha<\nu$. i) $\nu=\omega^\lambda$, λ: limit のとき: 各 a w/ $0<a<\lambda$ について.

$I(\varphi a 0)$ を示せばよい。 $\alpha=\omega^a\cdot 2$ として. $A_\alpha(a)$ より $\beta=0, \delta=1$ とし

て、$I^{<\omega^a}(\varphi a 0)$。とくに、$I(\varphi a 0)$.　ロ) $\nu = \omega^{b+1}$ のとき：$b>0$ とおく.

各 $n<\omega$ について、$I(\varphi_b^n(0))$ で十分。$\alpha = \omega^b\cdot(n+1) < \omega^{b+1}$ として、$A_\alpha(b)$

より $\forall\beta\forall m\,[I^{<\omega^b(m+1)}(\beta)\ \&\ 0<m\le n \to I^{<\omega^b m}(\varphi b\beta)]$

$\beta = 0,\ \varphi_b(0),\ \varphi_b^2(0),\ \ldots,\ \varphi_b^{n-1}(0)$ ととっていって、$I^{<\omega^b}(\varphi_b^n(0))$.
$m = n,\ n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 1$ とくに、$I(\varphi_b^n(0))$.

2) $a=0$ のときは、$\Pi^0_1\text{-}CA^{<\omega} = ACA \vdash I(<\varphi_1(\varepsilon_0))$ ($\varphi_1(\varepsilon_0)=\varepsilon_{\varepsilon_0}$) は

だれでも知ってる。$a>0$ とおく。$A_{\omega^a\cdot n}(a)$ for each $n>0$ より.

$A_{\omega^a\cdot 2}(a)$, i.e., $\forall\beta[I^{<\omega^a\cdot 2}(\beta) \to I^{<\omega^a}(\varphi a\beta)]$。よって.

$\forall\beta[I(\beta)\to I(\varphi a\beta)]$. $\Pi^1_\infty\text{-}IA$ で $\forall n\forall\beta[I(\beta)\to I(\varphi_a^n(\beta))]$ ⋯(1).

$B(\beta) :\Leftrightarrow I(\varphi_{a+1}(\beta))$ として. $Prg[B]$ となる。☺ i) $B(0)$: $B(0) \Leftrightarrow$

$I(\varphi_{a+1}(0)) \Leftrightarrow \forall n<\omega\, I(\varphi_a^n(0))$。(1) で $\beta=0$. ii) $B(\beta)\to B(\beta+1)$：

つまり $I(\varphi_{a+1}(\beta)) \to I(\varphi_{a+1}(\beta+1)) \Leftrightarrow \forall n<\omega\, I(\varphi_a^n(\varphi_{a+1}(\beta)+1))$

(1) と $\Pi^1_\infty\text{-}IA$ で OK. iii) λ: limit & $\forall\beta<\lambda\, B(\beta) \to B(\lambda)$：明らか。

よって. $\Pi^1_\infty\text{-}IA$ より $I(B, <\varepsilon_0)$。∴ $I(<\varphi_{a+1}(\varepsilon_0))$　%.

Prop. 1 の証明。$\alpha<\nu$ を fix。$\forall b<a\, A_\alpha(b)$ を仮定して $A_\alpha(a)$ を示す。

($a=1$ のとき) $\forall\beta\forall\delta>0[I^{<\omega\delta+\omega}(\beta)\ \&\ \omega\delta+\omega\le\alpha \to I^{<\omega\delta}(\varphi 1\beta)]$

を示す。$\delta>0$, $\omega\delta+\omega\le\alpha$ とおく. $B(\beta) :\Leftrightarrow I^{<\omega\delta}(\varphi_1(\beta))$ として.

$B\in Rc(H^\nu_{\omega\delta+k})$ for some $k<\omega$ より $Prg[B]$ を示せばよい。$B(\beta)\to$

$B(\beta+1)$ には、$\omega\delta$: limit より. $I^{<\omega\delta}(\gamma)\to I^{<\omega\delta}(2^\gamma)$ で十分。

($a=b+1>0$ のとき) $A_\alpha(b)$, $\delta>0$, $I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)$, $\omega^a(\delta+1)\le\alpha$ として.

$I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta)$ を言えばよい。$B(\beta) :\Leftrightarrow I^{<\omega^a\delta}(\varphi a\beta) \in Rc(H^\nu_{\omega^a\delta+\omega})$ として.

$Prg[B]$ を言えばよい。 1) $B(0)$ 2) $B(\beta) \to B(\beta+1)$ 3) λ: limit & $\forall \beta < \lambda\, B(\beta) \to B(\lambda)$ 1) は 2) と同様。3) は明らか。2) $B(\beta)$, i.e., $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta)$ とする。$\varphi a(\beta+1) = \sup_{n<\omega} \varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta = \delta_0 + 1$ のとき: $\forall m, n < \omega$ について. $\omega^b(\omega\delta_0 + m + n) < \omega^b(\omega\delta_0 + \omega) = \omega^a\delta$ に注意して. $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta) \to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta + 1) \to$
$\to I^{<\omega^b(\omega\delta_0+m+n)}(\varphi a(\beta)+1)$ for $\forall m, n < \omega \to I^{<\omega^b(\omega\delta_0+m)}(\varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1))$ for $\forall m, n < \omega$ ($A_\delta(b)$ と ind on $n<\omega$) $\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$
$(\omega^a\delta = \sup_{m<\omega} \omega^b(\omega\delta_0 + m))$

2.2 δ: limit のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta) \to I^{<\omega^b(\omega\gamma+n)}(\varphi a(\beta)+1)$ for $\forall n < \omega$, $0 < \forall \gamma < \delta$ $\to I^{<\omega^a\gamma}(\varphi_b^n(\varphi a(\beta)+1))$ for $\forall n<\omega$, $0 < \forall \gamma < \delta$ ($A_\delta(b)$ と ind on $n<\omega$) $\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$
$(\omega^a\delta = \sup_{\gamma<\delta} \omega^a\gamma)$

(a: limit のとき) $\forall b < a\, A_\delta(b)$, $I^{<\omega^a(\delta+1)}(\beta)$, $\delta > 0$, $\omega^a(\delta+1) \leq \lambda$ を仮定する。$B(\beta) \Leftrightarrow I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta)$ とおいて $Prg[B]$ で十分。

2) $B(\beta) \to B(\beta+1)$: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta) \to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$
$\varphi a(\beta+1) = \sup_{b<a} \varphi b(\varphi a(\beta)+1)$.

2.1 $\delta = \delta_0 + 1$ のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta) \to I^{<\omega^a\delta_0 + \omega^a}(\varphi a(\beta)+1) \to$
$\to I^{<\omega^a\delta_0 + \omega^c + \omega^b}(\varphi a(\beta)+1)$ for $0 < \forall b \leq \forall c < a \to$ ($A_\delta(b)$ より)
$\to I^{<\omega^a\delta_0 + \omega^c}(\varphi b(\varphi a(\beta)+1))$ for $0 < \forall b \leq \forall c < a \to$
$\to I^{<\omega^a\delta}(\varphi a(\beta+1))$ $(\omega^a\delta = \omega^a\delta_0 + \sup_{b \leq c < a} \omega^c)$

2.2 δ: limit のとき: $I^{<\omega^a\delta}(\varphi a \beta) \to I^{<\omega^a\gamma + \omega^b}(\varphi a(\beta)+1)$ for

$0<^{\forall}\gamma<\delta,\ 0<^{\forall}b<a \to I^{<\omega^{a\gamma}}(\varphi_b(\varphi_a(\beta)+1))(A_\alpha(b)) \to$

$\to I^{<\omega^{a\delta}}(\varphi_a(\beta+1))$。 //.

Prop. 2の証明。$\alpha<\nu$ について、ordinals $\leq\alpha$ の有限集合 $S(\alpha)$ を、
0) $\alpha\in S(\alpha)$ 1) $\beta=\beta_1+\cdots+\beta_n,\ \beta_1>\cdots>\beta_n,\ \beta_1,\cdots,\beta_n\in rg\,\varphi_0$ として、$\beta\in S(\alpha) \Rightarrow \beta_1,\cdots,\beta_n\in S(\alpha)$ 2) $\varphi\gamma\delta\in S(\alpha)\ \&\ \gamma,\delta<\varphi\gamma\delta$ $\Rightarrow \gamma,\delta\in S(\alpha)$. と帰納的に定義する。$\forall\beta\in S(\alpha)\ \Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\nu}\vdash I(\beta)$ で十分。以下、$\Pi^0_1\text{-}CA_0^{<\nu}$ での証明。$I(\gamma)\ \&\ I(\delta)\to I(\varphi\gamma\delta)$、$\varphi\gamma\delta\in S(\alpha)$ を示せばよい。$\gamma=0$ なら $\varphi\gamma\delta=2^\delta$ より明らか。$\gamma>0$ とする。
$\omega^\gamma\cdot 2<\omega^{\varphi\gamma\delta}\cdot 2=\varphi\gamma\delta\cdot 2\leq\alpha\cdot 2<\nu$. Prop. 1より $Prg[A_{\alpha\cdot 2}]$.
$I(\gamma)$ より $A_{\alpha\cdot 2}(\gamma)$、とくに $\forall\beta[I^{<\omega^{\gamma\cdot 2}}(\beta)\to I^{<\omega^\gamma}(\varphi\gamma\beta)]$
$I(\delta)$ より $I^{<\omega^{\gamma\cdot 2}}(\delta)$。よって $I^{<\omega^\gamma}(\varphi\gamma\delta)$ $\therefore I(\varphi\gamma\delta)$ //.

次に conservative のほうの証明。初めに各 $\alpha<\Gamma_0$ について、1階の理論 $(H^X)_\alpha$ (X: a set parameter) を定義する。$(H^X)_\alpha$ の言語 $\equiv L_1+\{H^X, X, \in\}$. atomic formulae は L_1 のそれと、term t について $t\in X$, $t\in H^X$ の形のもの。$t\in H^X_s \Leftrightarrow \langle s,t\rangle\in H^X$ ($\langle\ ,\ \rangle$: pairing function)
$(H^X)_\alpha$ の公理は、PAの公理(induction axiom に H^X, X が occur してよい)と次の公理: $H^X_0=X\ \&\ \forall\beta\leq\alpha[(Suc(\beta)\to H^X_\beta\simeq(H^X_{Pd(\beta)})')\ \&$ $\&\ (Lim(\beta)\to H^X_\beta=\Sigma_{\gamma<\beta}H^X_\gamma)]$ (つまり、ほぼ $(H^X)_\alpha=\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha_0$)
明らかに、$A(X)$ を Π^1_0-formula で、その set parameter は X のみ、とすると、1) $\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha_0\vdash A(X)\Rightarrow(H^X)_{\alpha\cdot n}\vdash A(X)$ for $^\exists n<\omega$
2) $\Pi^0_1\text{-}CA^\alpha\vdash A(X)\Rightarrow(H^X)_{\alpha\cdot\omega}\vdash A(X)$.

Def. normal functions $\langle\theta_\alpha\rangle_{\alpha<\Omega}$ を． 0) $\theta_0(\beta)=\beta$ 1) $\theta_1(\beta)=2^\beta$

2) $\theta_{\alpha+1}(\beta)=\theta_\alpha(\theta_1(\beta))$, i.e., $\theta_{\alpha+1}=\theta_\alpha\circ\theta_1$.

3) $rg\,\theta_\lambda=\bigcap_{\alpha<\lambda} rg\,\theta_\alpha$, λ: limit と定義する。

Proposition 1. $\theta_{\alpha+\beta}=\theta_\alpha\circ\theta_\beta$ for $\alpha,\beta<\Omega$.

2. $\theta_{\omega\alpha}=\varphi_\alpha$, $\alpha<\Omega$

Lemma 2. $A(X)$ を．set parameter は X しか occur しない Π^0_∞-formulaとして． $(H^X)_\alpha\vdash A(X)\Rightarrow ACA_0+I(<\theta_\alpha(\varepsilon_0))\vdash A(X)$

($A(X)$ には H^X なし).

この Lemma と上の注意より．Thm 5.1 が従う。以下．Lemma 2 の証明。

$(H^X)_\alpha$ を $\overbrace{\text{semi-formal system}}^{(H^X)^*_\alpha}$ にうめ込む。 Ctm ≡ the set of closed terms in L_1 とする．$(H^X)^*_\alpha$ の formulae をつくる．

1) $s,t\in$ Ctm $\Rightarrow$ $s=t$, $s\neq t$, $t\in H^X_n$, $t\notin H^X_n$ $(n<\omega)$ は atomic formulae (つまり．H^X_n は．各 $n<\omega$ について unary predicate と思う)

2) Φ が formulae の countable set $\Rightarrow$ $\bigwedge\Phi$, $\bigvee\Phi$ も formulae。

$\Phi=\{A_0,A_1,\cdots\}$ のとき．$\bigwedge\Phi$, $\bigvee\Phi$ はそれぞれ $\bigwedge_n A_n$, $\bigvee_n A_n$ と書く。

Def. atomic formulae A, B が numeq. (= numequivalent) とは．Bの中のいくつかの (closed) terms をそれと同じ値をもつ termsでおきかえて A が得られるときに言う。

Def. $(H^X)^*_\alpha$ の derivations． Γ は formulae の有限集合。

(Ax) 1. $\Gamma, s=t$ if $\mathbb{N}\models s=t$ 2. $\Gamma, s\neq t$ if $\mathbb{N}\not\models s=t$

3. $\Gamma, A, \neg B$ A と B は numeq. な atomic formulae.

$(\wedge)\quad \dfrac{\cdots\ \Gamma, A_n\ \cdots}{\Gamma, \bigwedge_n A_n}$ for $\forall n<\omega$ $\quad(\vee)\quad \dfrac{\Gamma, A_n}{\Gamma, \bigvee_n A_n}$ for $\exists n<\omega$

$(\mathrm{cut})\quad \dfrac{\Gamma, A \qquad \neg A, \Delta}{\Gamma, \Delta}$ 各 limit $\lambda \leq \alpha$ について.

$(H^X_\lambda)\quad \dfrac{\Gamma,\ n\in H^X_\beta}{\Gamma,\ m\in H^X_\lambda}\quad (\neg H^X_\lambda)\quad \dfrac{\Gamma,\ n\notin H^X_\beta}{\Gamma,\ m\notin H^X_\lambda}$ ここに. $\beta<\lambda$ で $m=\langle\beta, n\rangle$.

(Ax') 各 n s.t. $n\nleq\alpha$ について. $\Gamma,\ t\notin H^X_n$.

$\beta+1\leq\alpha$ なる β についての $(H^X_{\beta+1})$ と $(\neg H^X_{\beta+1})$ を書くための準備。

$H^X_{\beta+1}$ は H^X_β の jump だから. $n\in H^X_{\beta+1} \iff \exists y\, T(n,n,\overline{H}^X_\beta(y),y)$

$\iff \exists y \exists z$ ['zは長さyの 0−1 列' & $T(n,n,z,y) \wedge \forall i<y\,((z)_i \triangleq$

$z(i)=0 \leftrightarrow i\in H^X_\beta)$]. 従って p.r. function f を.

$f(n,k,m)=0 \iff$ 'kは長さmの 0−1 列' & $T(n,n,k,m)$ と

とると. $n\in H^X_{\beta+1} \iff \bigvee_{m,k} [\, f(n,k,m)=0\ \&\ \bigwedge_{i<m} [\,(k(i)=0\ \&\ i\in H^X_\beta)$

$\vee\ (k(i)\neq 0\ \&\ i\notin H^X_\beta)\,]\,] \iff \bigvee_{m,k} [\, f(n,k,m)=0 \wedge \bigvee_{c\in {}^m 2} \bigwedge_{i<m}$

$[\,(k(i)=0)^{c(i)}\ \&\ (i\in H^X_\beta)^{c(i)}\,]$, 但し formula A について.

$$A^i \triangleq \begin{cases} A & , i=0 \\ \neg A & , i=1 \end{cases}$$

$n\notin H^X_{\beta+1} \iff \bigwedge_{m,k} [\, f(n,k,m)\neq 0 \vee \bigwedge_{c\in {}^m 2} \bigvee_{i<m} [\,(k(i)=0)^{1-c(i)} \vee$

$\vee\ (i\in H^X_\beta)^{1-c(i)}\,]$

$(H^X_{\beta+1})$, $(\neg H^X_{\beta+1})$ を次のようにする。

$(H^X_{\beta+1})$

$$\frac{\Gamma, f(n,k,m)=0 \quad \cdots, \Gamma, (k(i)=0)^{c(i)} \quad \Gamma, (i \in H^X_\beta)^{c(i)} \cdots}{\Gamma, n \in H^X_{\beta+1}}$$

for some $m, k < \omega$ and $c \in {}^m 2 = \{ c \in \omega : c : m \to 2 \}$.

上式は $(1+m)$ 個。

$(\neg H^X_{\beta+1})$ $$\frac{\cdots \quad \Gamma, A_{mkc} \quad \cdots}{\Gamma, n \notin H^X_{\beta+1}}$$ for all $m, k < \omega$ and $c \in {}^m 2$

但し A_{mkc} は $f(n,k,m) \neq 0$, $(k(i)=0)^{1-c(i)}$, $(i \in H^X_\beta)^{1-c(i)}$ $(i<m)$

という $(1+m \cdot 2)$ 個の formulae のいずれかを表わす。

Def. formula の長さ = rank.

1. $r(s=t) \triangleq r(s \neq t) = 0$

$$r(t \in H^X_n) = r(t \notin H^X_n) = \begin{cases} n, & n \leq \alpha \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

2. $r(\wedge \Phi) = r(\vee \Phi) = \sup\{ r(A)+1 : A \in \Phi \}$

Def. derivation の長さ = depth

1. $\mathcal{D}$ が axiom $(Ax),(Ax')$ だけのとき : $|\mathcal{D}| = 0$

2. $|\mathcal{D}| = \sup_{i<n} (|\mathcal{D}_i| + 1)$ $\{\mathcal{D}_i\}_{i<\omega}$ は $\mathcal{D}$ の imm. subderivations.

Rem. 無限の長さの formula, derivations の長さを上のように定義しないで、例えば $|\mathcal{D}| \leq \beta$ ($|\mathcal{D}| = \beta$ でなく) を定義すれば constructive-arithmetical にできる。

Def. $\vdash \Gamma\ [\gamma, \beta] \triangleq \exists$ derivation $\mathcal{D}$ s.t. $|\mathcal{D}| \leq \beta$ and $r(A) < \gamma$ for any cut formula A in $\mathcal{D}$.

これで setting が終った。あとはふつうどうりに (cf. [9])：

Elimination Lemma. $\vdash \Gamma, A\ [\gamma, \beta_0]$ & $\vdash \neg A, \Lambda\ [\gamma, \beta_1]$ & $r(A) \leq \gamma \Rightarrow\ \vdash \Gamma, \Lambda\ [\gamma, \beta_0 \# \beta_1]$

($\beta_0 \# \beta_1$ は natural (commutative, Hessenberg) sum)

Elimination Theorem. $\vdash \Gamma\ [\alpha+\beta, \gamma] \Rightarrow\ \vdash \Gamma\ [\alpha, \theta_\beta(\gamma)]$

とくに. $\vdash \Gamma\ [\alpha, \gamma] \Rightarrow\ \vdash \Gamma\ [0, \theta_\alpha(\gamma)]$

Embedding Lemma. $(H^X)_\alpha \vdash A(X) \Rightarrow\ \vdash A^+(H^X_0)\ [<\alpha+\omega, <\omega+\omega]$

i.e. $\vdash A^+(H^X_0)\ [\alpha+l, \omega+k]$ for some $l, k < \omega$.

但し $A^+(H^X_0)$ は. $A(X)$ の X に H^X_0 を代入し. $\forall n$, $\exists n$ を. $\bigwedge_n$, $\bigvee_n$ でおきかえた formula ($A(X)$ に H^X なし)

Lemma 2 の証明。$(H^X_\alpha) \vdash A(X) \Rightarrow\ \vdash A^+(H^X_0)\ [0, <\theta_\alpha(\varepsilon_0)]$ となる。($\theta_l(\omega+k) < \varepsilon_0$) これを算術化・形式化して. partial truth def. を経て. $ACA_0 + I(<\theta_\alpha(\varepsilon_0)) \vdash A(X)$。 //.

§7. 補遺

ここでは. M. Rathjen [8] から本稿に直接関係のある結果を拾う。

Def. 1. binary R について. R を順序のように考えるときには. $R(a,b)$ を aRb と書く。$WO(R)$ は 'R is a well ordering on ω' を Π^1_1 で書いた formula (以下. ACA_0 を仮定するから '無限下降列がない. $WF(R)$' と書いても. $\forall X\, I(R, X)$ と書いても同じ)。

2. $Y_{Ri} \stackrel{\circ}{=} \{ \langle j, x \rangle : jRi \ \& \ \langle j, x \rangle \in Y \}$

3. pos. operator form $\mathfrak{A}(X^+, Y, i, x)$ について.

$\mathcal{C}\ell^{\mathfrak{A}}_{Y,i}(X) \stackrel{\circ}{\Leftrightarrow} \mathcal{C}\ell^{\mathfrak{A}}(X, Y, i) \stackrel{\circ}{\Leftrightarrow} \forall x [\mathfrak{A}(X, Y, i, x) \to x \in X]$

$IT^{\mathfrak{A}}(R, Y) \stackrel{\circ}{\Leftrightarrow} \forall i [\mathcal{C}\ell^{\mathfrak{A}}((Y)_i, Y_{Ri}, i) \ \& \ \forall X (\mathcal{C}\ell^{\mathfrak{A}}(X, Y_{Ri}, i) \to (Y)_i \subseteq X)]$

(cf. P. 60)

4. $AUT\text{-}ID_0 \stackrel{\circ}{=} ACA_0 + (IT.1)$

$(IT.1)$ $\forall R [WO(R) \to \exists Z \, IT^{\mathfrak{A}}(R, Z)]$, 各 pos. operator form $\mathfrak{A}$.

5. $AUT\text{-}ID_2 \stackrel{\circ}{=} ACA + (IT.1) + (IT.2)$

$(IT.2)$ $\forall R \forall Y \forall i [WO(R) \ \& \ IT^{\mathfrak{A}}(R, Y) \ \& \ \mathcal{C}\ell^{\mathfrak{A}}(A, Y_{Ri}, i) \to (Y)_i \subseteq A]$

各 $\mathfrak{A}$ と、任意の formula A in L_2 について。

以下 $\mathcal{F}$ を L_2 での formulae の集合とする。

6. $\mathcal{F}\text{-}TR_0 \stackrel{\circ}{=} ACA_0 + (\mathcal{F}\text{-}TR)$

$(\mathcal{F}\text{-}TR)$ $\forall R [WO(R) \to \exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))]$

$B \in \mathcal{F}$.

7. $\mathcal{F}\text{-}TRDC_0 \stackrel{\circ}{=} ACA_0 + (\mathcal{F}\text{-}TRDC)$

$(\mathcal{F}\text{-}TRDC)$ $WO(R) \ \& \ \forall i \forall X \exists Y A(i, X, Y) \to \exists Z \forall i \, A(i, Z_{Ri}, Z_i)$

8. $\mathcal{F}\text{-}TI$: $\forall R [WO(R) \to I(R, A)]$, $A \in \mathcal{F}$

9. 但し、$\mathcal{F} = \Delta^1_n$ のときは、$\Delta^1_n\text{-}TR_0 \stackrel{\circ}{=} ACA_0 + (\Delta^1_n\text{-}TR)$

$(\Delta^1_n\text{-}TR)$ $WO(R) \ \& \ \forall X \forall i \forall y [B(X, i, y) \leftrightarrow A(X, i, y)] \to$

$\exists Z \forall i \forall y (y \in (Z)_i \leftrightarrow B(Z_{Ri}, i, y))$

, $B, \neg A \in \Sigma^1_n$.

Proposition. 1. Π^1_1-TR$_0$ = AUT-ID$_0$

2. Π^1_1-TR + BI = AUT-ID$_2$ = AUT-ID$_0$ + BI

3. Δ^1_2-TR$_0$ = Σ^1_2-TRDC$_0$ $\subseteq$ Δ^1_2-CA$_0$ + Σ^1_2-TI

Proof. 1. Π^1_1-TR$_0$ $\subseteq$ AUT-ID$_0$ には Π^1_1-normal form を考える。

2 cf §5 3 Δ^1_2-TR$_0$ $\vdash$ Σ^1_2-TRDC には Π^1_1-uniformization を使う。

Proposition 1. ATR$_0$ $\vdash$ BI(Δ^{0-}_1) $\rightarrow$ BI(Σ^{1-}_1)

2. ATR$_0$ $\vdash$ BI($\Delta^{0=}_1$) $\rightarrow$ BI($\Sigma^{1=}_1$)

但し、ATR$_0$ $\overset{\circ}{=}$ Π^1_0-TR$_0$, $\mathcal{F}^=$ は $A \in \mathcal{F}$ (formulae の集合) でかつ、A に一切 parameter なし, i.e., sentence.

Proof. ([ ] Satz 6.9). 2. Σ^1_1-boundedness による。つまり、$\prec \in \Sigma^{1=}_1$, WO($\prec$) として、$e \in \omega$ について、$m <_e n \triangleq \{e\}(\langle m, n\rangle) \simeq 0$,

LO($<_e$): $<_e$ is a linear order, $|<_e| \leq |\prec|$ を Σ^1_1 formula s.t. $\exists$ order preserving $f: <_e \rightarrow \prec$ として.

$\mathcal{B} \triangleq \{e \in \omega : \{e\}$ is total, LO($<_e$) & $|<_e| \leq |\prec|\}$: Σ^1_1 とすれば、

Kleene の $\mathcal{O}$ の Π^1_1-completeness より $\exists d \in \mathcal{O}$ ($d \notin \mathcal{B}$). ATR$_0$ で CWO (Comparability of Well Orderings) を使えるから、$\exists g$ s.t. g は $\prec$ から $<_d$ への order preserving map. これより $\prec$ についての超限帰納法は、$<_d$ についてのそれに帰する。 //

Proposition 1. ATR$_0$ + Σ^1_1-IA $\vdash$ Con(ATR$_0$)

2. RCA$_0$ + Σ^1_1-GDC $\vdash$ Σ^1_1-IA.

3 $ATRDC_0 \vdash Con(ATR_0)$

Proof 3. $ATRDC_0 \vdash \Sigma^1_1$-GDC より 1, 2 から.

1. [12] より $ATR_0 + \Sigma^1_1\text{-}IA = ATR_0 + \Pi^1_3\text{-}RFN_{ATR_0}$.

$\Pi^1_3\text{-}RFN_{ATR_0}$: $Pr_{ATR_0}(\ulcorner A(\dot{n}) \urcorner) \rightarrow A(n)$, $A \in \Pi^1_3$ %

Rem. [12] より, より強く, $ATR_0 \vdash \Sigma^1_1\text{-}GDC \leftrightarrow \Pi^1_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$

$\Pi^1_3\text{-}\omega\text{-}RFN_{ATR_0}$ は, $ATR_0 + \omega$-rule で証明できる Π^1_3 は true という公理。

謝辞. 本稿の主な部分, すなわち §§1,2,6 は, 1986年の暮れに, 河合文教研において行なわれた研究集会の際に筆者が用意したノートに基づいている。そこでの講演の機会をお与え下さり, また, 今回, §4 を書くための資料(筆者の手紙)を快くお貸し下さった倉田令二郎先生に感謝致します。

参考文献

[1] W. Buchholz, S. Feferman, W. Pohlers, W. Sieg, Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof-theoretical Studies, LNM 897, Springer (1981).

[2] S. Buss, Bounded Arithmetic, Bibliopolis (1986).

[3] A. Cantini, On the relation between choice and comprehension principles in second order arithmetic, JSL 51 (1986), 360-373.

[4] S. Feferman, Formal theories for transfinite iterations of generalized inductive definitions and some subsystems of analysis, in 'Intuitionism and Proof Theory' (1970), 303-325.

[5] S. Feferman, Iterated inductive fixed-point theories: Applications to Hancock's conjecture, Patras Logic Symposion, 171-196 (1982).

[6] J.-Y. Girard, Proof Theory and Logical Complexity, vol. I. Bibliopolis (1987)

[7] W. A. Howard & G. Kreisel, Transfinite induction and bar induction of type zero and one, and the role of continuity in intuitionistic analysis. JSL 31 (1966), 325-358.

[8] M. Rathjen, Untersuchungen zu Teilsystemen der Zahlentheorie zweiter Stufe und der Mengenlehre mit einer zwischen Δ^1_2-CA und Δ^1_2-CA+BI liegenden Beweisstärke, dissertation, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 1989

[9] K. Schütte, Proof Theory, Springer (1977).

[10] H. Schwichtenberg, Proof theory: some applications of cut-elimination, Handbook of Mathematical Logic, 867-895 (1977).

[11] W. Sieg, Fragments of arithmetic, Ann. Pure & Appl. Logic 28 (1985), 33-72.

[12] S. Simpson, Σ^1_1 and Π^1_1 transfinite induction, Logic Colloquium 80 (1982), 239 – 253.

[13] S. Simpson, Which set existence axioms are needed to prove the Cauchy/Peano theorem for ordinary differential equations? JSL 49 (1984), 783 – 802.

[14] W. W. Tait, Functionals defined by transfinite recursion. JSL 30 (1965), 155 – 174.

[15] A. Wilkie & J. Paris, On the scheme of induction for bounded arithmetic formulas, Ann. of Pure & Appl. Logic 35 (1987), 261 – 302