数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 1-9

THREE APPLICATIONS OF STATIONARY SETS IN TOPOLOGY

静岡大教育　大田春外
(Haruto OHTA)

Stationary 集合の位相空間論への応用については，Fleissner による survey [9] があるが，ここでは，別に，次の 3 つの応用例について述べる。

1. 積空間が正規でない，小さな正規空間を作る。
2. $\dim \beta X > \dim X$ である正規空間 X を作る。
3. 整数値連続関数の群 $C(X, \mathbb{Z})$ が反射的でない $\mathbb{Z}$-双対群であるような可分空間 X を作る。

以下，順序数の集合 A は，順序数 $\sup A$ 上の順序位相に関する相対位相をもつものとする。

1. 積空間の正規性．　一般に 2 つの正規空間の積空間は正規であるとは限らない。どんな場合に正規であるかという問題は，現在も位相空間論に豊富な話題を提供し続けてい

る（Przymusinski の survey [14] 及び Atsuji [1], Hoshina [10] を見よ）。ここでは「積が正規でない２つの“小さな”正規空間を見つける」ことを試みる。“小さな”の意味を“濃度 $\aleph_1$ の”と考えると，積 $(\omega_1+1)\times\omega_1$ がそのような例を与える。しかし“第１可算公理をみたす”という条件を付け加えると，多分，Todorcevic [17] の例が知られている唯一のものである。これは Aronszajn Tree T に path-Topology という位相を与えて得られる空間の部分空間 X, Y で，共に濃度 $\aleph_1$ の第１可算 Lindelöf 空間であるが，積 X × Y は正規でない（一般に，順序数や Tree から作られる空間は para-compact でないところから，強い covering property を期待する人達には無視される傾向がある。その実，path-Topology はとても面白いし，役に立つと思う）。さて，この部分空間 X, Y は Aronszajn Tree T の中で，それぞれ，高さが ω_1 の互いに素な stationary 集合 A, B に属する部分として選ばれる。しかし，実は，この stationary 集合 A, B 自身，積 A × B が正規でないという性質を持っている。即ち，次の結果が得られる。

<u>定理</u>（[11]）． $A, B \subseteq \omega_1$ について，次の条件 (a)−(f) は同値である。

(a) $A \times B$ は shrinking property を持つ.

(b) $A \times B$ は族正規である.

(c) $A \times B$ は正規である.

(d) $A \times B$ は expandable である.

(e) $A \times B$ は可算 paracompact である。

(f) A 又は B が stationary でないか, 又は $A \cap B$ が stationary である。

証明は [11] を見よ。従って ω_1 の互いに素な stationary 集合 A, B をとると, A, B は勿論, 濃度 $\aleph_1$ の才1可算正規空間であるが, 積 $A \times B$ は正規でない。(これは, この種の最も簡単な例だと思う。そして, 少なくとも Todorcevic のような人には知られていると思うが, 文献の中には見つけられない。) 定理に関連する問題を挙げる。

<u>問題</u> 1. 定理の条件 (a)-(e) は, "$A \times B$" を ω_1^2 の任意の部分空間に変えても同値か?

<u>問題</u> 2. 任意の $A, B \subseteq \omega_1$ に対し, $A \times B$ はいつでも可算 metacompact か?

<u>問題</u> 3. ω_1 の任意の stationary 集合 との積が正規である空間は どの様な空間か? (才1可算 paracompact 空間は, その様な空間の1つである, [13] を見よ。)

最後に"小さな"正規空間に関する問題を1つ挙げよう。2つの可算空間の積はつねに正規だから，考え得る最小濃度の組み合わせは，$|X|=\aleph_0$, $|Y|=\aleph_1$ の場合である。ここで，X を収束列（即ち，$X=\{1/n : n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}\subseteq\mathbb{R}$）とすると，$X\times Y$ が正規でないとき，Y は Dowker 空間と呼ばれる（Rudin [15] を参照せよ）。ところが，ZFC に於いて，"小さな" Dowker 空間が存在するか否かは知られていない。（$\diamondsuit$ を仮定すれば存在する，P. de Caux [2] による。しかも，彼の例は第1可算公理をみたす）。しかし，X が収束列以外の場合はどうか。

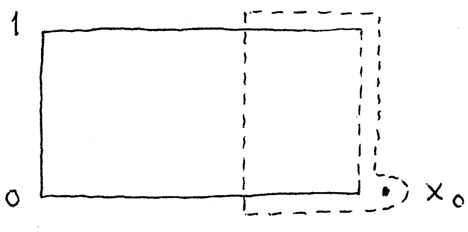
<u>問題</u> 4. 可算空間 X と正規空間 Y に対し，$X\times Y$ が正規でなければ，Y は Dowker 空間であるか？

なお，正規空間 Y が Dowker 空間であることは，Y が可算 paracompact でないことと同値である。

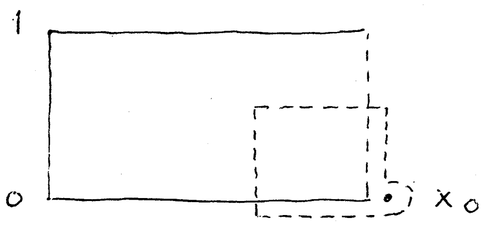
<u>2. k-空間化の被覆次元.</u> 位相空間 X の k-空間化（＝いわゆる k-leader，[8] を見よ）kX に関する Koyama [12] の問題「X と kX が正規で，$\dim X\neq\dim kX$ である空間 X は存在するか」について考える（彼は refinable 写像の下での次元の保存について研究した。ここで，恒等写像 $kX\to X$ は refinable である）。この問題に答えて，van

Douwen [3] と Tamano [16] は，それぞれ，$\dim kX = 0 < \dim X$ である正規空間 X を作った。ここでは，ω_1 の stationary co-stationary 集合を利用して，逆の不等号，$\dim kX > 0 = \dim X$ をみたす Lindelöf 空間 X の存在を示す。

半開区間 $(0, 1]$ を互いに素な dense 集合の族 $\{D_\alpha\}_{\alpha\in\omega_1}$ に分割する。これを，ω_1 の stationary co-stationary 集合 E で index を付け直して，$\{D_\alpha\}_{\alpha\in E}$ と書く。積空間 $\omega_1 \times [0, 1]$ の部分空間 $D = (\omega_1 \times \{0\}) \cup (\bigcup_{\alpha\in E}(([\alpha, \omega_1) \cap E) \times D_\alpha))$ 上の相対位相を $\mathcal{T}_D$ とする。そこで，$X = D \cup \{x_0\}$ とおき，X に，$\mathcal{T}_D \cup \{(((\beta, \omega_1) \times [0, 1]) \cap D) \cup \{x_0\} : \beta < \omega_1\}$ を基底とする位相 $\mathcal{T}$ を与える。このとき，$X = (X, \mathcal{T})$ が求める空間である。実際，x_0 の近傍の補集合は可分距離空間なので，X は Lindelöf で，容易に分るように，$\dim X = 0$。次に，$\mathcal{T} \cup \{((\omega_1 \times [0, t)) \cap D) \cup \{x_0\} : 0 < t \leq 1\}$ から生成される位相を $\mathcal{T}_k$ とすると，$kX = (X, \mathcal{T}_k)$ である。



a nbd of x_0 in X



a nbd of x_0 in kX

ここで，kX は正規で，x_0 の kX に於ける近傍は，右辺の

（見えない）区間 $[0, 1]$ を横切るので，$\dim \beta X = \operatorname{ind} \beta X = 1$.
もし，区間 $[0, 1]$ の代りに，cube $[0, 1]^n$ を使えば，自然に，$\dim \beta X = n > 0 = \dim X$ であるように出来る。

最初に述べた van Douwen の例も基本的に同じ idea を使っている。紹介される機会がないと思うので，ここで述べる：

<u>例（van Douwen [3]）</u>。c^{++} に順序位相を与えて，その部分空間 $S = \{\xi \in c^{++} ; \xi$ は isolated 又は $\mathrm{cof}(\xi) = c^{+}\}$ を考える。一方 $K = [0, 1]^n$ として，積 $S \times K$ の部分空間 X で条件

(1) $\forall \xi \in S\ [\, |X \cap (\{\xi\} \times K)| = 1\,]$,

(2) $\forall y \in K\ [\, \{\xi \in S : \langle \xi, y \rangle \in X\}$ is stationary $]$

をみたすものをとる。このとき，X は正規空間で $\dim X = n$. ところが，X の compact 集合の濃度は有限なので，βX は離散空間である，即ち，$\dim \beta X = 0$. □

van Douwen の空間 X は，$\operatorname{ind} X = 0$ であることに注意せよ。Tamano [16] による空間 X は，全く異なる idea による。そして，X は Lindelöf 空間であって，$\operatorname{ind} X > 0$, $\dim X > 0$ である。しかし，その次元は，互に正確に計算されていない。

そこで Tamano による次の問題が残っている。

問題 5 ([16]). $n = 2, 3, \cdots, \infty$ に対し，$\dim X = n$，$\dim_R X = 0$ である Lindelöf 空間 X は存在するか？
(何故，$n = 1$ がないか筆者には分らない。)

3. 整数値連続関数のアーベル群. ω_1 の stationary co-stationary 集合 E をとり，$\omega_1 + 1$ の部分空間 $X = E \cup \{\omega_1\}$ を考える。[4] で証明したように，X 上の整数値連続関数全体が作る群 $A = C(X, \mathbb{Z})$ は，反射的でない $\mathbb{Z}$-双対群である。いま，A のこれらの性質を保ったまま，X を可分空間に作り直すことが出来ることを示す。これは，A が $\mathbb{Z}^\omega$ の部分群と同型であることを意味し，[7] の問に肯定的に答える。

N の部分集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \omega_1}$ で「$\alpha < \beta \Rightarrow U_\alpha \setminus U_\beta$ は有限かつ $U_\beta \setminus U_\alpha$ は無限」をみたすものをとれ。$Y = X \cup N$ として，Y に次のように位相を与える。

ω_1 の基本近傍は，$\{\omega_1\} \cup \{\lambda \in E : \lambda > \alpha\} \cup (N \setminus (U_\alpha \cup F))$，但し，$\alpha < \omega_1$ かつ F はすべての U_α との共通部分が有限であるような N の部分集合である。

$\beta \in E$ の基本近傍は，$\{\lambda \in E : \alpha < \lambda \leq \beta\} \cup (U_\beta \setminus (U_\alpha \cup F))$，但し，$\alpha < \beta$ かつ F は N の有限集合。

N の各点は孤立点。

このとき，N は Y で dense だから，Y は可分空間。更に，E が stationary かつ co-stationary であることから，

$$\beta_N(E \cup N) = Y \quad \text{かつ} \quad \kappa_N Y = (E \cup N) \oplus \{\omega_1\}$$

であることが分る。これらに [4] の議論を適用すれば，$A = C(Y, \mathbb{Z})$ が反射的でない $\mathbb{Z}$-双対群であることが確かめられる。この場合，$A^{**} \cong A$ であるが，$A^{**} \ncong A$ である様に，Y を作りかえることも可能である，[6] を参照せよ。最後に，自然な場合を除いて，$C(X, \mathbb{Z}) \ncong C(Y, \mathbb{Z})$ である空間 X, Y はあまり知られていない（最近，加茂氏によって，有理数の空間 $\mathbb{Q}$ と無理数の空間 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ に対し，$C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) \ncong C(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ であることが証明された [6]）。そこで，次の問題が起る。

<u>問題6.</u> 互いに素な ω_1 の stationary 集合 A, B に対し，$C(A, \mathbb{Z}) \cong C(B, \mathbb{Z})$ か？

なお，$A \cap B$ が stationary でないとき，stationary 集合 A と B は位相同型でない（これは，§1 の定理によって，A^2 は正規であるが，$A \times B$ が正規でないことからも分る）。整数値連続関数のアーベル群については [4]－[7] を参照されたい。

References

1. M. Atsuji, Normality of product spaces I, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 81-119.
2. P. de Caux, A collectionwise normal, weakly θ-refinable Dowker space which is neither irreducible nor realcompact, Topology Proc. 1 (1976), 66-77.
3. E. K. van Douwen, 小山晃氏への手紙 Sep. 13, 1984.
4. K. Eda and H. Ohta, On abelian groups of integer-valued continuous functions, their Z-duals and Z-reflexivity, in: Abelian Group Theory, Gordon and Breach (1986), 241-257.
5. K. Eda, T. Kiyosawa and H. Ohta, N-compactness and its applications, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 459-521.
6. K. Eda, S. Kamo and H. Ohta, Abelian groups of continuous functions and their duals, to appear.
7. P. C. Eklof and A. H. Mekler, Almost Free Modules, Set-theoretic Methods, North Holland (1990).
8. R. Engelking, General Topology, Heldermann Verlag (1989).
9. W. G. Fleissner, Applications of stationary sets in topology, in: Surveys in General Topology, Academic Press (1980), 163-193.
10. T. Hoshina, Normality of product spaces II, in: Topics in General Topology, North Holland (1989), 121-160.
11. N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, Products of spaces of ordinal numbers, to appear in Topology Appl.
12. A. Koyama, Refinable maps in dimension theory, Topology Appl. 17 (1984), 247-255.
13. H. Ohta, Products of stationary sets, 数理解析研講究録 732 (1990), 39-43.
14. T. C. Przymusinski, Products of normal spaces, in: Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland (1984), 781-826.
15. M. E. Rudin, Dowker spaces, in: Handbook of Set-theoretic Topology, North Holland (1984), 761-780.
16. K. Tamano, Dimension of k-leaders, Tsukuba J. Math. (1985), 233-236.
17. S. Todorcevic, On the Lindelöf property of Aronszajn trees, in: Proc. Sixth Prague Topology Symposium, Heldermann Verlag (1986), 577-588.