数理解析研究所講究録
第773巻 1991年 38-44

Weakly normal ideals と the singular cardinal hypothesis

沼津高専 阿部吉弘 (Yoshihiro Abe)

Solovay [So] は、compact cardinal より上では、S.C.H. (the singular cardinal hypothesis) が成立することを示した。証明には、$P_\kappa\lambda = \{x \subset \lambda : |x| < \kappa\}$ 上の fine ultrafilter が使われているが、その存在からは、weakly normal な fine ultrafilter の存在が導かれる。ここでは、maximal という条件をとり除き、weakly normal filter の存在から、同様の結論を導く。$\kappa \geq \omega_1$ は regular とし、$\lambda \geq \kappa$ は cardinal とする。詳しい議論は [A1], [A2], [A3] を見られたい。

Definition. I を $P_\kappa\lambda$ 上の ideal とする。

(1) I が weakly normal $\iff$ $\forall f : P_\kappa\lambda \longrightarrow \lambda$, regressive $\exists \gamma < \lambda$ s.t. $\{x : f(x) \leq \gamma\} \in I^* = \{X \subset P_\kappa\lambda : P_\kappa\lambda - X \in I\}$.

(2) I が semi weakly normal $\iff$ $\forall X \in I^+ = \{Y \subset P_\kappa\lambda : Y \notin I\}$ $\forall f : X \longrightarrow \lambda$, regressive $\exists \gamma < \lambda$ s.t. $\{x \in X : f(x) \leq \gamma\} \in I^+$.

Theorem 1 ([A2]) (i) と (ii) は同値.

(i) I が weakly normal.

(ii) I は semi weakly normal で, 濃度 $cf(\lambda)$ の pairwise disjoint な I^+-sets の family は存在しない,

Corollary 2. (1) $cf(\lambda) < \kappa$ の時, I が weakly normal であることと、$cf(\lambda)$-saturated であることは同値。

(2) $cf(\lambda) = \kappa$ の時, weakly normal ideal は κ-saturated.

(3) normal $cf(\lambda)$-saturated ideal は weakly normal.

Lemma 3. I が precipitous ならば, $f_*(I|X)$ が semi weakly normal になる $X \in I^+$ と $f: X \to P_\kappa\lambda$ が存在する。

Proof. G を generic filter on P_I = "the p.o. set of I^+ sets", $j: V \to M$ を G についての generic elementary embedding とする。

M が well founded なことから. $1\!\!1_P \Vdash \underset{\sim}{f}$ represents $\sup j''\lambda$ in M となる name $\underset{\sim}{f}$ をとると, $X \in I^+$, $f: X \to V$ で $X \Vdash \underset{\sim}{f} = \check{f}$ を満たすものがある。

$X \Vdash \check{f}$ represents $\sup j''\lambda$ より, どんな $\alpha < \lambda$ についても, $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in I$。また, $Y = \{x \in X : g(x) < f(x)\} \in I^+$ ならば, $Y \Vdash \underset{\sim}{f} = \check{f}$ よりやはり. $\{x \in Y : g(x) < \gamma\} \in I^+$ となる $\gamma < \lambda$ が

存在する。

この2点から、$h(x)=x\cap f(x)$ とし, $J=h_*(I|X)$
$=\{Y\subset P_\kappa\lambda : h^{-1}(Y)\cap X\in I\}$ とすれば、J は semi weakly normal
になる。

Theorem 4. $cf(\lambda)$個の pairwise disjoint な I^+-sets がないような precipitous ideal が存在すれば, $P_\kappa\lambda$ 上に weakly normal ideal がある。

Proof. Theorem 1 と Lemma 3 による。

Theorem 5. $P_\kappa\lambda$ 上に weakly normal ideal が存在すると.

(1) λ が regular ならば, $\lambda^{<\kappa}=2^{<\kappa}\cdot\lambda$。

(2) $cf(\lambda)=\kappa$ ならば, $\lambda^{<\kappa}=2^{<\kappa}\cdot\lambda$。

(3) $cf(\lambda)<\kappa$ ならば, $\lambda^{<\kappa}=2^{<\kappa}\cdot\lambda^+$。

Proof. (1) $2^{<\kappa}<\lambda$ の場合に限ってよい。$P_\kappa\lambda$ 上の weakly normal ideal I から、λ 上の filter D を

$$X\in D \iff X\subset\lambda,\ \{x\in P_\kappa\lambda : \sup x\in X\}\in I^*$$

で定めると, D は κ-complete uniform filter で次の性質がある.

(a) $\{\alpha<\lambda : cf(\alpha)<\kappa\}\in D$

(b) $\forall f:\lambda\to\lambda$, regressive $\exists\gamma<\lambda\,(\{\alpha : f(\alpha)<\gamma\}\in D)$.

(a)から，
$$A_\alpha = \begin{cases} \text{cofinal subset of } \alpha \text{ with cardinality} < \kappa & \text{if } \mathrm{cof}(\alpha) < \kappa \\ \phi & \text{otherwise} \end{cases}$$
とすると，(b)とDの uniform 性によって，(c)が成り立つ。

(c) $\forall \eta < \lambda \ \exists \eta' \ (\eta < \eta' < \lambda \wedge \{\xi : A_\xi \cap [\eta, \eta') \neq \phi\} \in D)$

そこで，$\eta_0 = 0$，$\lim(\alpha)$ のとき $\eta_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \eta_\beta$，

$\{\xi : A_\xi \cap [\eta_\alpha, \eta_{\alpha+1}) \neq \phi\} \in D$ となるように λ の strictly increasing sequence $\{\eta_\alpha : \alpha < \lambda\}$ をとれて，$I_\alpha = [\eta_\alpha, \eta_{\alpha+1})$ とする。(c)により

(c)′ $\{\xi : A_\xi \cap I_\alpha \neq \phi\} \in D$ for all $\alpha < \lambda$.

次に $M_\xi = \{\alpha < \lambda : A_\xi \cap I_\alpha \neq \phi\}$ とすると，$|A_\xi| < \kappa$ より $|M_\xi| < \kappa$ で，(c)′は次のように書き換えられる．

(d) すべての $\alpha < \lambda$ に対して，$\{\xi : \alpha \in M_\xi\} \in D$.

かってな $x \in P_\kappa \lambda$ をとると，Dの κ-completeness，$|x| < \kappa$，(d)の3点から，$\{\xi : x \subset M_\xi\} \in D$ となり，これは，$P_\kappa \lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} P(M_\xi)$ を示すので，$\lambda^{<\kappa} = 2^{<\kappa} \cdot \lambda$ が証明された。

(3) $\lambda^{<\kappa} \geq \lambda^+$ である。$\{x_\alpha : \alpha < \lambda^{<\kappa}\} = P_\kappa \lambda$ とし，$f : P_\kappa \lambda \longrightarrow P_\delta \lambda^+$ を $f(x) = \{\alpha < \lambda^+ : x_\alpha \subset x\}$ で定める。ここで，δ はすべての $\alpha < \kappa$ に対して $2^\alpha < \delta$ となる最小の cardinal で，$\mathrm{cf}(\delta) \geq \kappa$，$\delta^{<\kappa} = \delta$ である。

$X \in E$ iff $X \subset P_\delta \lambda^+ \wedge f^{-1}(X) \in I^+$ で E を定めると，

E は $P_\delta\lambda^+$ 上の κ-complete $\mathrm{cf}(\lambda)$-saturated ideal で，Theorem 4 から，$P_\delta\lambda^+$ 上に κ-complete fine ideal が存在する。あとは，(1) と同じように，λ^+ 上に filter が定義され，A_ξ，I_α，M_ξ が順序導入される。(ここでは，$|A_\xi|$，$|M_\xi| < \delta$ に注意) 最後に，κ-completeness がきいて，$P_\kappa\lambda^+ = \bigcup_{\xi<\lambda^+} P(M_\xi)$ となり，$(\lambda^+)^{<\kappa} = 2^{<\kappa}\cdot\lambda^+$，従って，$\lambda^{<\kappa} = 2^{<\kappa}\cdot\lambda^+$ が得られる。

(2) η を κ と λ の間の regular cardinal とし，I_η を
$X \in I_\eta \iff X \subset P_\kappa\eta \wedge \{x \in P_\kappa\lambda : x\cap\eta \in X\} \in I$ で定義すると，I_η は κ-complete κ-saturated ideal。再び，Theorem 4 により，$P_\kappa\eta$ 上に weakly normal ideal が存在するので，(1) から，$\eta^{<\kappa} = 2^{<\kappa}\cdot\eta$。 $\lambda^{<\kappa} = \lambda\cdot\bigcup_{\eta<\lambda}\eta^{<\kappa} = \lambda\cdot\bigcup_{\eta<\lambda}(\eta^+)^{<\kappa}$ 。

上の (2) の証明の応用で

Corollary 6. $\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ で下のいずれかが成り立てば，$\lambda^{<\kappa} = 2^{<\kappa}\cdot\lambda$ である.

(1) $P_\kappa\lambda$ 上に normal λ-saturated ideal が存在する.

(2) $P_\kappa\lambda$ 上に κ^+-saturated ideal が存在する.

また，(3) の証明の変形で

Corollary 7. $P_\kappa\lambda$ 上に normal λ^+-saturated ideal が存在すれば，$\lambda^{<\kappa} \leq (\lambda^+)^{<\kappa} = 2^{<\kappa}\cdot\lambda^+$

S.C.H. に目を転じると，(η, λ) の区間で S.C.H. が成立するためには，この中の regular cardinal δ に対して，$\delta^{<\kappa} = \delta$ が成り立てばよいことが知られている。([Si]) これを，我々の結果から表現すると、さまざまな場合が考えられるが、ここでは代表的で単純なものを1つ挙げておく．

Theorem 8 $P_\kappa\lambda$ 上に normal η-saturated ideal が存在し，$\nu = \max(2^{<\kappa}, \eta) < \lambda$ とすると，(ν, λ) で S.C.H が成り立つ．

References

[A1] Y. Abe, Weakly normal filters and the closed unbounded filter on $P_\kappa\lambda$, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 1226-1234.

[A2] Y. Abe, Saturated ideals and the subtle properties of $P_\kappa\lambda$, preprint.

[A3] Y. Abe, Strong compactness and weakly normal ideals on $P_\kappa\lambda$, in preparation

[F] M. Foreman, Potent axioms, Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), 1-28.

[Si] J. Silver, On the singular cardinals problem, Proce. International Congress of Mathematicians, Vancouver 25 (1975), 265-268

[So] R. M. Solovay, Strongly compact cardinal and the G.C.H, Proceedings of the Tarski Symposium, Proc. of Symp. in Pure Math. 25 (1974), 365-372