数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 49-57

ｄｏｐをもつω-categorical ω-stable な理論について

筑波大　池田　宏一郎
(Kōichiro Ikeda)

【定義】ω-stable な理論Ｔが dimensional order property（ｄｏｐ）をもつとは

$p \not\perp M_1M_2$, $p \perp M_1$, $p \perp M_2$, $M_1 \downarrow M_2 \mid M_0$, $M_0 \subset M_1$, $M_0 \subset M_2$

となるようなモデルM_0，M_1，M_2およびタイプｐがあることである．

ｄｏｐをもつ理論の例として次の理論T_1がよく知られている．

【例１】Ｅ，Ｆを無限濃度のクラスを無限個もつ同値関係でＥのクラスとＦのクラスの交わりは常に無限個であるようなものし，理論T_1を同値関係Ｅ，Ｆをもつ理論とする．

ｄｏｐをもつ理論として更に次の様な理論T_2，T_3が考えられる．

【例２】言語Ｌ＝｛Ｅ，Ｖ，Ｒ｝，Ｅ，Ｖは１変数述語，Ｒを３変数述語とする．このときＬにおける理論T_2の公理を次の様にする：T_2の任意のモデルはＶとＥの合併；$R \subset V \times V \times E$；Ｖの異なる２元ｕ，ｖに対してＲ（ｕｖｅ）を満たすＥの元ｅが無限個ある；Ｅの元ｅに対してＲ（ｕｖｅ）を満たす非順序対｛ｕ，ｖ｝がただ１つ決まる．

【例３】$A = \omega \times (Z_2)^{\omega}$，$R \subset A \times A \times A$で
$R((a, g), (b, h), (c, k))$を$g + h = k$と定義する．このとき
$T_3 = Th(A, R)$．

この３つの例はそれぞれｄｏｐをもつのであるが更にω-categorical ω-stable でもある．そこでここではｄｏｐをもつω-categorical ω-stable な理論が与えられたとき，その様な理論は“本質的に”この３つのいずれかである事を示す．その際，次の事実を使う．

【事実１】 strongly minimal ω-categorical set は locally modular .

【事実２】 ω-categorical ω-stable な理論は 1-based .

【事実３】Ｍをω-stable ω-categorical transitive な構造とする．このとき任意の$a \in M$と$A \subset M$に対して$RM(c/A)=1$なる$c \in acl(aA)$がある．

【事実４】Ｄが strongly minimal nontrivial locally modular であるときＤと非直交であるような definable strongly minimal group Ｇが存在する．

以後，理論Ｔはω-categorical ω-stable であるとする．

【補題１】Ｔをｄｏｐをもつ理論とする．このとき次の条件を満たすａ，ｂ，ｄ，Ｆ（in C^{eq}）がとれる：

①$d/abF \perp aF$，$d/abF \perp bF$，$a \downarrow_F b$．

②$tp(d/abF)$は strictly minimal modular .

③$tp(a/F)$，$tp(b/F)$は strictly minimal modular .

【証明】Ｔをｄｏｐをもつω-categorical ω-stable な理論とする．このとき次のことはあきらか．

主張１．$p \not\perp abF$，$p \perp aF$，$p \perp bF$，$a \downarrow b \mid F$，となるような有限集合ＦおよびＦ上 nonalgebraic なａ，ｂ，ｃおよびｃＦ上の stationary type ｐが存在する．

主張２．$tp(a/F)$，$tp(b/F)$は strongly minimal であると仮定し

てよい．

証明．$tp(a/F)$について示す．事実３より$rk(a'/F)=1$であるような$a'\in acl(aF)$が取れる．いま$p\not\perp a'bF$であるならばa'をaとおもい，必要ならばFを$acl(F)$に膨らましてやれば$tp(a/F)$は strongly minimal．そこで$p\perp a'bF$であるとする．$F'=acl(a'F)$とする．このとき$p\not\perp abF'$，$p\perp aF'$，$p\perp bF'$，$rk(b/F)=rk(b/F')$である．一方，$rk(a/F)=rk(a/F')+1$であるのでこの操作を続けてゆけば$tp(a/F)$は strongly minimal と思ってよい．

主張３．pは strongly minimal であると仮定してよい．

証明．事実３よりあきらか．

主張４．pはabF上のタイプと思ってよい．

証明．$p\not\perp r$なる strongly minimal type $r\in S(abF)$が存在することを示せば十分．簡単の為，$abF=\emptyset$とする．主張３より$p\,(=p_c)$は modular type であると仮定してよい．いま$p_c\not\perp\emptyset$であるので，$c'\downarrow c$かつ$stp(c')=stp(c)$なるc'に対して$p_c\not\perp p_{c'}$なるp_cのコピー$p_{c'}$がある．p_cは modular であるので$d\models p_c\,|\,cc'$なるdに対して$d\not\downarrow d'\,|\,cc'$なる$d'\models p_{c'}\,|\,cc'$が存在する．よって$dc\not\downarrow d'c'$，$dc\downarrow c'$，$d'c'\downarrow c$．いま$e=cb(dc/d'c')$とすると 1-based より$e\in acl(dc)\cap acl(d'c')$．よって$r=tp(e)$とすると$rk(r)=1$，$p\not\perp r$．

いま strongly minimal type p，$tp(a/F)$，$tp(b/F)$は strictly minimal であると仮定して構わない．そこでdをpの解とすればa，b，d，Fは補題を満たしている．■

【補題２】．$\langle a,b,d,F\rangle$が補題１の①，②，③を満たすような組であるとする．このとき

１）$tp(a/F)=tp(b/F)$と思ってよい．

２）$tp(a/F)$，$tp(b/F)$が共に trivial であるならば，$a,b\in acl(dF)$．

【証明】簡単の為，$F=\emptyset$とする．

1）$tp(a)\not\perp tp(b)$であるとするとmodularityより

$tp(ab')=tp(a'b)$となるような$a'\in acl(b)$，$b'\in acl(a)$が存在する．そこで新たに$acl(ab')$をa，$acl(a'b)$をbとしてとりなおせばよい．

2）いまこの主張が成り立たないとするとwlog，$a\notin acl(d)$．故に$a\downarrow d$．

主張1．$b\downarrow d$．

証明．$b\not\downarrow d$とすると$b\in acl(d)$であるので$a\downarrow d\mid b$．これは$p\perp b$に矛盾．

主張2．$tp(a)=tp(b)$．

証明．$tp(a)\perp tp(b)$であるとすると特に$a\downarrow b\mid d$．これはやはり$p\perp a$に矛盾．

$c=cb(d/ab)$とする．

主張3．$c\in acl(ab)$，$c\downarrow a$，$c\downarrow b$．

証明．$c\in acl(ab)$はあきらか．また$tp(d/ab)$は1-basedであるので$c\in acl(d)$．よって$a\downarrow d$，$b\downarrow d$より$a\downarrow c$，$b\downarrow c$．

そこで$r=tp(a)=tp(b)$，$q=tp(c)$とすると$r\not\perp q$．ここでrはmodular type．wlog，qもmodularであると思ってよいので$acl(c)=acl(a')$なるrの解a'がある．主張3より$a'\not\downarrow ab$，$a'\downarrow a$，$a'\downarrow b$であるのでrはnontrivial．これは矛盾．■

【補題3】$\langle a, b, d, F\rangle$が補題1の①，②，③を満たす様な組であるとし$c=cb(d/abF)$とする．このとき$a, b\in acl(dF)$かつ$tp(a/F)\perp tp(b/F)$であるならば，

1）$tp(cd/F)=tp(c'd'/F)$，$c\neq c'$ならば$tp(d/cF)\perp tp(d'/cF)$．

2）$a, b\in dcl(cF)$．

【証明】簡単の為，$F=\emptyset$とする．

1）$c\neq c'$とする．$tp(abc)=tp(a'b'c')$となるa'，b'

をとると$c \in dcl(ab)$より$a' \neq a$もしくは$b' \neq b$．そこで３つの場合に分ける．

□場合１．$a' \neq a$，$b' = b$のとき．

$a' \downarrow a$であるので$tp(a) \perp tp(b)$より$ab \downarrow a'b' \mid b$がしめせる．故に$c \downarrow c' \mid b$．いま$tp(d/c) \perp b$であるので
$tp(d/c) \perp c'$．従って$tp(d/c) \perp tp(d'/c')$．

□場合２．$a' = a$，$b' \neq b$のとき．

場合１と同様．

□場合３．$a' \neq a$，$b' \neq b$のとき．

$tp(a) \perp tp(b)$より$c \downarrow c'$が示せる．よって$tp(d/c) \perp \emptyset$より$tp(d/c) \perp tp(d'/c')$．

２）いま$a, b \in acl(d)$であるので$a, b \in acl(c)$．そこでもし$a \notin dcl(c)$であるとすると$tp(a) = tp(a')$，$a \neq a'$なるa'がとれる．このとき$tp(a) \perp tp(b)$より$\{a, a', b\}$は独立集合．よって$2 = rk(ab) = rk(c) \geqq rk(aa'b) = 3$となり矛盾．故に$a \in dcl(c)$．$b \in dcl(c)$に関しても同様．■

【補題４】$\langle a, b, d, F \rangle$が補題１の①，②，③を満たす様な組であるとする．このとき$a, b \in acl(dF)$，$tp(a/F) = tp(b/F)$で trivialであるならば次の様なeが存在する：$c = cb(e/abF)$とするとき

１）$tp(ce/F) = tp(c'e'/F)$，$c \neq c'$ならば
$tp(e/cF) \perp tp(e'/cF)$．

２）cF上のaの共役元はa，bのみ．

【証明】次の２つの場合に分けてかんがえる．簡単の為，$F = \emptyset$とする．

□場合１．$tp(a/d) = tp(b/d)$．

このときはeとしてdをとればよい．$c = cb(d/ab)$とするとき１）が成り立つのは補題３の１）とほぼ同様．また 1-based より$c \in dcl(d)$であるので$tp(a/c) = tp(b/c)$であることもわかる．c上のaの共役がa，bのみであることは補題３．２）とほぼ同様．

□場合2．$tp(a/d) \neq tp(b/d)$．

このとき$tp(ad)=tp(bd')$なるd'をとる．

主張1．$tp(dd'/ab) \perp a$，$tp(dd'/ab) \perp b$．

証明．$p=tp(d/ab)$，$q=tp(d'/ab)$とする．$p \perp q$であるならば$tp(dd'/ab)=p \times q$であるから主張は成り立つ．$p \not\perp q$であるならば，p，qの modularity より$d' \in acl(d)$と思える．よってこの場合も主張は成り立つ．

$\{d, d'\}$を表す imaginary element をeとする．$c=cb(e/ab)$とする．このとき1)，2)が成り立つことは場合1と同様．

【定義】1）$M_1=(A, E_1, E_2)$はE_1，E_2が無限濃度のクラスを無限個もつようなA上の同値関係で任意のE_1クラス(a/E_1)とE_2クラス(b/E_2)に対して$|(a/E_1) \cap (b/E_2)|=1$，であるような構造．

2）$M2=(P, L, \varepsilon)$は，1点を通る直線は無限個あり，異なる2点を通る直線は丁度1つで，どの直線も丁度2つの点を含むような incidence geometory.

【定理】Tをω-categorical ω-stable な理論とする．このときTがdopをもつことと次のことは同値：有限集合Fと atom Cと

（★）　　$c, c' \in C$，$c \neq c'$ならば$\phi(xc) \perp \phi(xc')$

を満たすようなcF上の complete formula $\phi(x, c)$が存在して，以下の条件を満たすように構造M_1，M_2，もしくは群$(G, \cdot)$がC^{eq}の中にF上定義出来る：

（1）構造M_1に関しては：$A=C$；$c \in A$に対して

$(c/E_1) \downarrow (c/E_2) \mid F$かつ$(c/E_1)$，$(c/E_2)$は non-algebraic over F.

（2）構造M_2に関しては：$L=C$；Pは strictly minimal atom .

（3）群Gに関しては：$G-\{1\}=C$；Gは strictly minimal .

【証明】（←）1）構造M1が（1）のように定義されているとする．

$p_c=\phi(xc)$，$a=(c/E_1)$，$b=(c/E_2)$とする．簡単の為，$F=\emptyset$とする．このときTがdopをもつ為にはつぎの事が示せればよい．

主張．$pc \not\perp ab$，$pc \perp a$，$pc \perp b$．$a \downarrow b$，$tp(a)$，$tp(b)$は nonalgebraic．

証明．a，bが独立で nonalgebraic であることは（1）よりあきらか．

$c \in acl(ab)$より$p_c \not\perp ab$も明か．いま

$stp(c'/a) = stp(c/a)$，$c' \downarrow c \mid a$を満たすc'を取ったとき，$a \downarrow b$であることより$c \neq c'$．よって$p_c \perp p_{c'}$であるので$p_c \perp a$．

$p_c \perp b$に関しても同様．

2）構造M_2が（2）のように定義されているとする．$p_c = \phi(xc)$とする．

a，$b \varepsilon c$なるa，$b \in P$をとる．このとき

主張．$p_c \not\perp ab$，$p_c \perp a$，$p_c \perp b$．$a \downarrow b$，$tp(a)$，$tp(b)$は nonalgebraic．

証明．Pが strictly minimal であることより$a \downarrow b$．更に

$tp(a) = tp(b)$も non-algebraic．$p_c \not\perp ab$，$p_c \perp a$，$p_c \perp b$については1）と同様．

3）群Gが（3）のように定義されているとする．Gが $p_c = \phi(xc)$とする．

このとき（★）より$p_c \perp \emptyset$．いまGが strictly minimal であることより

$c = a \cdot b$，$c \downarrow a$，$c \downarrow b$，$a \downarrow b$なるa，bが取れる．

主張．$p_c \not\perp ab$，$p_c \perp a$．$p_c \perp b$．

証明．$c \in acl(ab)$より$p_c \not\perp ab$についてはok．また$p_c \perp \emptyset$，$c \downarrow a$であるので$p_c \perp a$．$p_c \perp b$に関しても同様．

（→）理論Tはdopをもつとすると補題1より①②③を満たす

$\langle a, b, d, F \rangle$がある．簡単の為，$F = \emptyset$とする．補題2より$a$，$b$，$d$は次の3つの場合のいずれかを満たしていると考えられる：

場合1．$a, b \in acl(d)$，$tp(a) \perp tp(b)$．

場合2．$a \in acl(d)$，$tp(a) = tp(b)$；trivial．

場合3．$tp(a)$もしくは$tp(b)$は nontrivial．

□場合1．$c = cb(d/ab)$，$C = tp(c)$とする．$\phi(xc)$を

$tp(d/c)$を生成する atom とする．このとき補題3．1）より

主張1．$c, c' \in C$，$c \neq c'$ならば$\phi(xc) \perp \phi(xc')$．

いま補題3．2）よりa，$b \in dcl(c)$であるので$f(d) = a$，

$g(d)=b$なる定義可能関数f，gが存在する．$A=C$とする．このときA上の2変数述語$E_1(xy)$，$E_2(xy)$をそれぞれ$f(x)=f(y)$，$g(x)=g(y)$と定義する．このとき

主張2．構造(A, E_1, E_2)はM_1．

証明．E_1，E_2が無限濃度のクラスを無限個もつような同値関係であることはあきらか．c_1/E_1，c_2/E_2をそれぞれ任意のE_1およびE_2クラスとする．このとき$a_1=f(c_1)$，$b_2=g(c_2)$とすると$tp(a)\perp tp(b)$より$a_1\downarrow b_2$．よって$a_1b_2\equiv ab$であるので$f(c')=a_1$，$g(c')=b_2$をみたすc'がただ一つ存在する．

主張3．$c/E_1\downarrow c/E_2$，c/E_1，c/E_2は nonalgebraic $/\emptyset$．

証明．$dcl(c/E_1)=dcl(a)$，$dcl(c/E_2)=dcl(b)$であるので．

□場合2．補題4のe，cに対して$C=tp(c)$，$\phi(xc)$を$tp(e/c)$を生成する論理式とする．このとき

主張1．$c, c'\in C$，$c\neq c'$ならば$\phi(xc)\perp\phi(xc')$．

　$L=C$，$P=tp(a)=tp(b)$とする．$x\varepsilon y$を$tp(xy)=tp(ac)$と定義する．このとき補題4より$tp(ac)=tp(bc)$に注意すると次のことが示せる．

主張2．構造(L, P, ε)はM_2．

主張3．Pは strictly minimal．

□場合3．　Wlog，$tp(a)$が nontrivial であるとする．このとき$tp(a/b)$も nontrivial modular である．さらに$d/ab\perp b$である．簡単の為，$b=\emptyset$とする．このとき事実4より

主張1．$tp(a)\not\perp G$であるような strictly minimal definable group Gが存在する．

　$C=G-\{1\}$とする．$tp(a)$およびGの modularity より$acl(a)=c$なる$c\in C$がある．このとき

主張2．$d/c\perp\emptyset$．

証明．$tp(d/a)$と$tp(d/c)$は平行であるので$d/a\perp\emptyset$より．

　$\phi(xc)$を$tp(d/c)$を生成している論理式とする．

主張３．ｃ，ｃ’∈Ｃ，ｃ≠ｃ’ならばϕ（ｘｃ）⊥ϕ（ｘｃ’）．

証明．ｃ≠ｃ’とするとＣの strict minimality よりｃ↓ｃ’．よって主張２よりϕ（ｘｃ）⊥ϕ（ｘｃ’）．■