数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 138-139


# 閉点定理と選択公理

豊田高専　米澤佳己 (Yoshimi Yonezawa)

可換環論において, 次の閉点定理は重要な役目をはたしている.

**Theorem**(閉点定理). *If $X$ is a non-empty compact $T_0$-space, then there is a closed point in $X$.*

ここでは, この定理の証明において選択公理が本質的に必要なことを証明する.

以下, 必要な定義を挙げる.

- $x \in X$ が閉点であるとは, $\overline{\{x\}} = \{x\}$ となること.
- $T_0$-space $X$ の上の順序 $\leq_X$ を

$$x \leq_X y \Leftrightarrow \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{x\}}$$

によって定める. (この時, $X$ の極大元 $\leftrightarrow$ $X$ の閉点)

- $B$ を自然数の有限列の集合, その上の順序を

$$s \leq t \Leftrightarrow s \subseteq t$$

により定める.

$\mathcal{M}$ を $A$ を atoms として持つ ZFA のモデルとする ([1] pp.198 参照). さらに, $A$ は $B$ との間に全単射があるものとし, $A$ には $B$ の意味での順序が入っているものとする.

- $\mathcal{G}$ を $A$ の上の順序を保存する自己同型写像全体がなす群と定める.
- $a \in A$ に対して $c_a = \{b \in A \mid b \geq a\}$ とおき, これを ($a$ を頂点とする)$A$ の cone と呼ぶ.
- $F$ を $A$ の部分集合とするとき $c_F = \cup_{a \in F} c_a$ と定める.
- $C = \{c_F \mid F \subseteq A$ ($F$ は 有限集合) $\}$ とおく.($A$ の cone の 有限個の和集合として表わせる集合の族. )
- $E \subseteq A$ に対し, $fix(E) = \{\pi \in \mathcal{G} \mid \forall a \in E\ \pi(a) = a\}$ と定め,

$\mathcal{F} = \{H \mid H$ は $\mathcal{G}$ の部分群であり, ある $A$
の有限部分集合 $E$ があって $fix(E) \subseteq H$ を満たす$\}$

とおくと, これは $\mathcal{G}$ の normal filter をなす.

そこで, $\mathcal{N}$ をこの $\mathcal{G}, \mathcal{F}$ から定まる permutation model とする.

**Lemma.** $\forall a \in A (c_a \in \mathcal{N})$ *and* $C \in \mathcal{N}$

**Theorem.** $\mathcal{N} \models$ "$C$ は $A$ 上の閉集合族の公理を満たし, しかもその位相で $A$ は *compatct* である"

これが示されると, この位相において $A$ は閉点を持たないことは自明であるから, Jech-Sochor Embedding theorem (Theorem 47 in [1]) より

**Theorem.** *The closed point theorem is not provable in ZF set theory.*

が示されたことになる.

**Lemma.** $\mathcal{N}$ では $C$ は $A$ の位相を定める.

(証明)

$C$ において閉集合の公理のうち $S \subseteq C \to \cap S \in C$ 以外は明らかなので, これについてのみ考える. 今, $S$ は $\mathcal{N}$ の元であるので, $\mathcal{N}$ の定義より ある $A$ の有限部分集合 $E$ があって $fix(E) \subseteq sym(S)$ を満たす. 特に $E$ は "$a \in E$ & $b \leq a \to b \in E$" を満たすようにとれる.

case 1 もし, $S$ の元 $c_F$ うち $F \cap E = \emptyset$ を満たすものがとれたとすると, $\pi \in fix(E)$ で $\pi``F \cap F = \emptyset$ を満たすものが存在する. すると $\pi(S) = S$ なので, $c_{\pi(F)} \in S$ になるが, $c_F \cap c_{\pi(F)} = \emptyset$ であるから $\cap S = \emptyset$ となる.

case 2 どんな $S$ の元 $c_F$ をとっても $F \cap E \neq \emptyset$ となるならば, 任意の $S$ の元 $c_F$ に対し $\pi \in fix(E)$ で $\pi``(F-E) \cap (F-E) = \emptyset$ となるものがとれる. すると $\pi``c_F \cap c_F = C_{F \cap E}$ より $F \cap E$ を考えることにより, $\forall c_F \in S(F \subseteq E)$ を満たすと仮定してよい. つまり $\cap S = c_{F_1}$ を満たすような $F_1 \subseteq E$ がとれる.

case1, case2 いずれにしても $\cap S \in C$ となるから, $C$ は $A$ の位相を定めることになる. ∎

**Lemma.** $\mathcal{N}$ において $C$ は $A$ の *compact* な位相を定める.

(証明)

閉集合族 $S$ が 有限交差性を持つならば $\cap S \neq \emptyset$ であることを示す. $C$ が位相を定めることの証明において, case 1 の場合 $c_F \cap c_{\pi(F)} = \emptyset$ かつ $c_F, c_{\pi(F)} \in S$ となるように $F, \pi$ をとれるから $S$ が有限交差性を持つことに反する. よって, case 2 の場合だけが残り, このとき, $\cap S = c_{F_1}$ $(F_1 \subseteq E)$ となって結局 $\cap S$ は $S$ の元の有限個の intersection と一致する. 故に, $\cap S \neq \emptyset$ ∎

## 参考文献

[1] T. J. Jech, Set Theory, Accademic press(1981)
[2] T. J. Jech, The Axiom of Choice, North–Holland(1973)