数理解析研究所講究録
第 772 巻 1991 年 140-143

アーベル群の Δ-system Lemma と c.c.c.

江田　勝哉　(KATSYA EDA)

筑波大学数学系

問題の発端は無限直積アーベル群 $\mathbb{Z}^\kappa$ の整数値連続関数群 $C(X,\mathbb{Z})$ への埋め込みの問題ですのでまず問題の背景を述べます．A をアーベル群とし，$A^* = \mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z})$ とおく．$\mathbb{Z}$ の位相は離散位相とする．

命題 1 [2]. X を *0-*次元ハウスドルフ空間，$\mathbb{N}$ を自然数全体の集合次のことが成立します．

(1) 群 $C(X,\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ と同型の部分群を含むことと X が無限個の空でない開閉集合に分割されることが同値;

(2) 群 $C(X,\mathbb{Z})^*$ は $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ と同型の部分群を含むことと X の $\mathbb{N}$-コンパクト化 $\beta_{\mathbb{N}}X$ が無限コンパクト部分集合を含むことが同値.

この (2) は拡張できて

命題 2 [4]. κ を無限基数とする．このとき，群 $C(X,\mathbb{Z})^*$ が $\mathbb{Z}^\kappa$ と同型の部分群を含むことと X の $\mathbb{N}$-コンパクト化 $\beta_{\mathbb{N}}X$ が *weight* κ のコンパクト部分集合を含むことが同値.

さて (1) の単純な拡張は“群 $C(X,\mathbb{Z})$ が $\mathbb{Z}^\kappa$ と同型の部分群を含むことと X が κ-個の空でない開閉集合に分割されることが同値”となるのですが，なかなか証明ができないので反例があると予想することにしました．問題は空間 X をつくることと群 $C(X,\mathbb{Z})$ へ $\mathbb{Z}^\kappa$ を埋め込むことの2つがあります．このような状況は集中しにくい状況なのですが，別の情報から次の枠組みで反例がある可能性があるかもしれないといったことがわかりました．　その枠組みを述べるのに少し定義を用意します．

$\mathbb{Z}$ を離散位相群としてみれば，A^* は積位相をもつ位相群 $\mathbb{Z}^A$ の閉部分群になる．この位相は A の有限部分集合 F に対して $U_F = \{h \in A^* : h(F) = 0\}$ を $0 \in A^*$ の近傍基とした位相群と同じです．いま $R_{\mathbb{Z}}A = \bigcap\{\mathrm{Ker}(h) : h \in A^*\}$ とすると A^* は位相群として $(A/R_{\mathbb{Z}}A)^*$ と同型になるので位相群にのみ着目する場合 $\mathbb{Z}^I$ の部分群 A（つまり $R_{\mathbb{Z}}A = 0$ の場合）に限ってよい．またその場合自然な写像 $\sigma : A \to A^{**}$ が単射となります．ところで A^* を位相空間としてみると $\sigma(a) \in C(A^*,\mathbb{Z})$ であることがすぐわかります．そこで，ある κ について　空間　$(\mathbb{Z}^\kappa)^*$ に κ-個の空でない開集合で互いに素なものがないこと　が判れば反例ができたことになります．

そこで A^* の位相に研究対象をしぼります．この位相は自然なものですからその研究はすでにあり [1, 6, 9], 位相の完備化と A の reflexivity に関係して行なわれていますが．けれども位相空間としての性質が調べられていないようです．

問題: 空間 A^* は c.c.c. を満たすか？　つまり非可算個の空でない互いに素な開集合をもつか？ とくに $A = \mathbb{Z}^{\omega_1}$ のとき c.c.c. を満たすか？

この問題は open です．空間 A^* がアーベル群論において興味のある対象であることをまず説明します．群 A が separable とは任意の有限部分集合が有限生成の直和因子に含まれること．とくに A が $\mathbb{Z}^I$ の pure 部分群 (elementary substructure) (つまり，$m|a$ $(a \in A, m \in \mathbb{N})$ が $\mathbb{Z}^I$ で成立すれば A で成立する) ならば separable である．A がある $\mathbb{Z}^I$ の部分群となるとき A を torsionless とよびます．A が reflexive とは自然な写像$\sigma : A \to A^{**}$ が同型写像であること．

命題 3 [4]. 群 A の濃度が最小の可測基数未満のとき A^{**} は自然な意味で $C_k(A^*, \mathbb{Z})$ (コンパクト集合上連続な関数全体) に含まれる．A が *separable* で $R_{\mathbb{Z}}A = 0$ のとき A が *reflexive* であることと A^{**} が $C(A^*, \mathbb{Z})$ に含まれることが同値．

群 A の濃度が最小の可測基数未満でないとき reflexivity を論ずることはいまのところ意味がありません．それは次のことが open だからです．

問題 [5]: reflexive な群 A で濃度が最小の可測基数以上のものが存在するか？

この問題は 0-次元空間及び Tychonoff 空間において対応する問題が open であるので見た目よりはずっと位相空間論的な問題です．ともかく命題 3 から群 A の濃度が最小の可測基数未満のとき空間 A^* が $k_{\mathbb{N}}$-空間であれば $C(A^*, \mathbb{Z}) = C_k(A^*, \mathbb{Z})$ であるから A は reflexive になります．この逆は言えないのですが，今のところ　A が torsionless で A^* が $k_{\mathbb{N}}$-空間となることがわかっているのは A が free のときだけです．

定理 4 [4]. 群 A と無限基数 κ について以下は同値．

(1) 群 A には直和因子でランク κ の自由部分群がある；

(2) 空間 A^* には *weight* κ のコンパクト部分集合がある；

(3) 空間 A^* には *weight* が κ 以上のコンパクト部分集合がある．

次がこの話の主定理です．

定理 5 [4]. A を *separable torsion-free* 群とする．このとき，空間 A^* は $(2^{\aleph_0})^+$-*c.c.* を満たす．

この証明は次の2つの補題と Erdös-Rado の定理によります. torsion-free 群 A の部分群 B_i $(i \in I)$ に対してすべての B_i を含む最小の pure 部分群を $\Sigma_*\{B_i : i \in I\}$ と記す.

補題 6(TORSION-FREE 群の Δ-SYSTEM LEMMA). *A を torsion-free 群 κ を非可算基数とする. F_α $(\alpha < \kappa)$ が A の有限ランクの pure 部分群なら濃度 κ の部分集合 $I \subset \kappa$ と pure 部分群 F で $F = F_\alpha \cap F_\beta, (\alpha \neq \beta)$ なるものがある.*

PROOF: 群 B に対して $\mathcal{F}(B)$ を B の有限ランク pure 部分群全体とする. B の濃度が κ 未満ならば $\mathcal{F}(B)$ の濃度も κ 未満である. 補題を証明するため F_α のランクがすべて同じ n としてよい. そこで n についての帰納法で証明する. $n = 0$ の場合は明か.

(Case 1) どんな $I \subset \kappa$ で $|I| < \kappa$ であるものについても $\alpha \notin I$ で $F_\alpha \cap \Sigma_*\{F_\beta : \beta \in I\} = 0$ なるものがあるとき:

帰納法で $\mu_\alpha < \kappa$ $(\alpha < \kappa)$ を $\mu_\alpha \neq \mu_\beta$ $\quad(\alpha \neq \beta)$ で $F_{\mu_\alpha} \cap \Sigma_*\{F_{\mu_\beta} : \beta < \alpha\} = 0$ となるようにとることが出来る. すると $\{\mu_\alpha : \alpha < \kappa\}$ と 0 が必要な性質をみたす.

(Case 2) そうでない場合:

$|I_0| < \kappa$ となる $I_0 \subset \kappa$ ですべての $\alpha < \kappa$ について $F_\alpha \cap \Sigma_*\{F_\beta : \beta \in I_0\} \neq 0$ なるものがある. 最初の注意から A の pure 部分群 F と $J \subset \kappa \backslash I_0$ で $|J| = \kappa$ ですべての $\alpha \in J$ について $F = F_\alpha \cap \Sigma_*\{F_\beta : \beta \in I_0\}$ となるものがある. $\sigma : A \to A/F$ を標準準同型写像とする. A/F は torsion-free で $\sigma(F_\alpha)$ のランクは n 未満 $(\alpha \in J)$ となる. また $\sigma(F_\alpha)$ は A/F で pure となる. 帰納法の仮定から $|I| = \kappa$ なる $I \subset J$ と A/F の pure 部分群 G ですべての $\alpha \in I$ について $G = \sigma(F_\alpha) \cap \Sigma_*\{\sigma(F_\beta) : \beta \neq \alpha, \beta \in I\}$ となるものがある. $\alpha \in J$ について $\sigma^{-1}\sigma(F_\alpha) = F_\alpha$ であるから $\alpha \in I$ については $\sigma^{-1}(G) = F_\alpha \cap \Sigma_*\{F_\beta : \beta \neq \alpha, \beta \in I\}$ となる. よって I と $\sigma^{-1}(G)$ が求めるものとなる.

補題 7. *A を separable torsion-free 群, $F = <f_1 \cdots f_n>_*$, $G = <g_1 \cdots g_n>_*$ を A の pure 部分群, $u|_{F\cap G} = v|_{F\cap G}$, $u + U_F \cap v + U_G = \phi$ とする. このとき $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$ $m \in \mathbb{N}$ で次の性質 $m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i f_i + b_i g_i$, $m \nmid \Sigma_{i=1}^n a_i u(f_i) + b_i v(g_i)$ を満たすものがある.*

定理 3 の証明: 今 $\{u_\alpha + U_{F_\alpha} : \alpha < (2^{\aleph_0})^+\}$ が互いに素であるとする. 但し, F_α は A のランク n の純部分群. 補題 6 により $F = F_\alpha \cap F_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ でかつ $u_\alpha|_F = u_\beta|_F$ と仮定してよい. $F_\alpha =< x_{\alpha 1} \cdots x_{\alpha n} >_*$ とおく. 補題 7 により $\alpha < \beta$ に対して $a_{\alpha\beta i}, b_{\alpha\beta i} \in \mathbb{Z}$ と $m_{\alpha\beta} \in \mathbb{N}$ を $m_{\alpha\beta} \mid \Sigma_{i=1}^n a_{\alpha\beta i} x_{\alpha i} + b_{\alpha\beta i} x_{\beta i}$ で $m_{\alpha\beta} \nmid \Sigma_{i=1}^n a_{\alpha\beta i} u_\alpha(x_{\alpha i}) + b_{\alpha\beta i} u_\beta(x_{\beta i})$ となるようにとれる. ここで Erdös-Rado の定理 [**8**, Theorem

69] を適用して濃度が $\aleph_1$ の $\mathcal{H} \subset \kappa$ と $a_i, b_i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, m_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq n)$ で $u_\alpha(x_{\alpha i}) = m_i$ $(\alpha \in \mathcal{H})$, $a_{\alpha\beta i} = a_i, b_{\alpha\beta i} = b_i, m_{\alpha\beta} = m$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{H}, \alpha < \beta)$ なるものを得る. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{H}$ を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i x_{\alpha i} + b_i x_{\beta i}, m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i x_{\alpha i} + b_i x_{\gamma i}, m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i x_{\beta i} + b_i x_{\gamma i}$ が成立する. よって $m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i x_{\beta i} + b_i x_{\beta i}$ だから $m \mid \Sigma_{i=1}^n a_i u_\beta(x_{\beta i}) + b_i u_\beta(x_{\beta i})$, つまり $m \mid \Sigma_{i=1}^n (a_i + b_i) m_i$ となり 矛盾となる.

筆者は定理 3 の結論が c.c.c. となるかどうかがわからない. 特にもとの問題と関連して $A = \mathbb{Z}^{\omega_1}$ のとき A^* が c.c.c. を満たすかということに筆者はとても興味がある.

注意（1） 補題 4 は可算体 K 上で成立し, その場合定理 3 は $A^* = \mathrm{Hom}_K(A, K)$ とすると結論は c.c.c. となる. 非可算体 K 上では補題 4 は 3-次元空間 K^3 で成立しない. 反例は次のとおり. $\mathbf{v}_t = (1, t, t^2)$ $(t \in K)$ とし W_t を $\mathbf{v}_t$ と直交する 2-次元空間とする. すると $\{W_t : t \in K\}$ が反例である. それは s, t, u が異なるとき $< \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_u >= K^3$ が成立することからわかる.

（2） 補題 4 において pure という条件は本質的である. 有理数群 $\mathbb{Q}$ の部分群で反例がある. 有理数群 $\mathbb{Q}$ の部分群は type により分類されるが type には ${}^\omega\omega$ の mod-finite の順序が埋め込まれている. そこで type の狭義の上昇列 $(\mathbf{t}_\alpha : \alpha < \kappa)$ (但し, κ は非可算) をとる [7, §85] [**14**, p. 260]. そして H_α を type $\mathbf{t}_\alpha$ の $\mathbb{Q}$ の部分群とする. すると部分群 $H_\alpha \cap H_\beta$ の type は $\alpha < \beta$ のとき $\mathbf{t}_\alpha$ となる. よって H_α $(\alpha < \kappa)$ が反例となる.

References

1. S. U. Chase, *Function topologies on abelian groups*, Illinois J. Math. **7** (1963), 593–608.
2. K. Eda-H. Ohta, *Abelian groups of integer-valued continuous functions, their* **Z**-*duals and* **Z**-*reflexivity*, in "Abelian group theory," Gordon-Breach, New York-London, 1987, pp. 241–258.
3. K. Eda-T. Kiyosawa-H. Ohta, *N-compactness and its applications*, in "Topics in General Topology," North-Holland, Amsterdom-New York, 1989, pp. 459–521.
4. K. Eda-S. Kamo-H. Ohta, *Abelian groups of continuous functions and their duals, (preprint)*.
5. P. Eklof - A. Mekler, "Almost-free modules," North-Holland, Amsterdom-New York, 1990.
6. M. Huber, *Reflexive modules and abelian groups*, J. Algebra **82** (1983), 469–487.
7. L. Fuchs, "Infinite abelian groups," Academic Press, New York, 1970/1973.
8. T. Jech, "Set theory," Academic Press, New York, 1978.
9. A. Mader, *Duality and completions of linear topologied modules*, Math. Z. **179** (1982), 325–335.