

曲衝撃波による渦度生成

京大数理研 木田 重雄 (Shigeo Kida)

1. はじめに

渦度(あるいはエンストロフィ)の生成は、乱流混合や騒音発生等、流体運動の輸送現象における重要なメカニズムの一つである。一定密度の非圧縮性流体の流れでは、エンストロフィは渦伸長によって増加する。渦伸長によるエンストロフィの増加の割合は、エンストロフィ自身の大きさに比例するので、渦なしの流れではこの効果は現れない。しかし、圧縮性流体の場合には、エンストロフィの生成と成長に寄与する別のメカニズムが存在する。

圧縮性粘性流体に対する渦度方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} = & -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega + (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho^2} \nabla p \times \nabla \rho \\ & + \frac{1}{Re_0} \left[\frac{1}{\rho} \nabla^2 \omega - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

と書ける。ここに、 \mathbf{u} は速度、 $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度、 p は圧力、 ρ は流体の密度、 t は時間、 $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$ は微分オペレーターである。変数は全て、初期条件や外力によって決る代表長さ l_0 、代表速度 u_0 、代表密度 ρ_0 、代表温度 T_0 を用いて無次元化してある。また、無次元パラメーター

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 l_0}{\mu} \quad (1.2)$$

は基準レイノルズ数、 μ は運動粘性係数である。

(1.1) の右辺第一項と第二項は、それぞれ流体の移流と渦伸長(または収縮)による渦度の変化を表している。この二つの項は渦度に関して一次であるから渦なしの流れにおいてはなくなってしまう。第三項(傾圧項)は、渦なし流れにおいても生き残り、渦度を生成することが出来る。最後の項は、粘性の作用による渦度の変化を表す。

(1.1) と ω の内積を取ると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} = & -\nabla \cdot (\mathbf{u} Q) - Q(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \omega \cdot \mathbf{S} \cdot \omega - \frac{1}{\rho^2} [\omega \cdot (\nabla p \times \nabla \rho)] \\ & + \frac{1}{Re_0} \omega \cdot \left[\frac{1}{\rho} \nabla^2 \omega - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times \left(\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

となる。ここに

$$Q = \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \quad (1.4)$$

はエンストロフィ密度、 S は歪み速度テンソルで、その成分は

$$S_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \quad (1.5)$$

で与えられる。(1.3) の右辺の五つの項は順に、移流項、圧縮項、渦伸長項、傾圧項、粘性項と呼ばれる。粘性項は、速度場や密度場に依存して正になったり負になったりする。また、傾圧項は一定密度の非圧縮性流体に対しては零になる。

この論文では、渦運動の力学、特に衝撃波と渦度場の相互作用を調べるために行った三次元圧縮性流れの直接数値シミュレーションと若干の解析結果を報告する。

2. 圧縮性流体の基礎方程式と数値シミュレーション

圧縮性粘性流体の運動は、質量・運動量及び全エネルギーの保存を記述する次のナビエ-ストークス方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_j u_k) = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{2}{Re_0} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(S_{jk} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{jk} \right) + \rho F_j, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_T + \frac{\partial}{\partial x_j} (E_T + p) u_j &= \frac{1}{M_0^2 Pr Re_0 (\gamma - 1)} \nabla^2 T \\ &+ \frac{2}{Re_0} \frac{\partial}{\partial x_k} u_j \left(S_{jk} - \frac{1}{3} \Delta \delta_{jk} \right) + \rho u_j F_j \end{aligned} \quad (2.3)$$

と流体の状態方程式(完全気体を仮定)

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M_0^2} \quad (2.4)$$

によって記述される。ここに、 T は温度、

$$E_T = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 \quad (2.5)$$

は全エネルギー、 $F(\mathbf{x}, t)$ は不規則外力である。

三つの無次元パラメタがある。ひとつは基準レイノルズ数(1.2)で、他の二つは基準マッハ数

$$M_0 = \frac{u_0}{c_0} \quad (2.6)$$

とプラントル数

$$Pr = \frac{C_p \mu}{\kappa} \quad (2.7)$$

である。ただし、 $c_0 = \sqrt{\gamma RT_0}$ は音速の代表値、 γ は比熱比、 R は気体定数、 C_p は定圧比熱、 κ は熱伝導率である。添字が繰り返して現れた時は、その添字に関して和をとるものとする。

方程式系 (2.1) - (2.3) を一辺 2π の立方体の内部で周期境界条件のもとで数値的に解いた。空間微分はスペクトル法 (64^3 のコロケーション点) を用い、時間積分はルンゲ-クッタ-ジル法を用いた。一様状態、即ち、 $\rho(\mathbf{x}, 0) = 1$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$, $E_T(\mathbf{x}, 0) = 1$ から出発し、統計的に定常な不規則外力で速度場を長時間励起し、 $t = 30$ まで積分して発達した乱流場を作った。パラメタは、 $\gamma = 1.4$, $Pr = 0.7$, $Re_0 = 50$ と選んだ。最終的に得られた乱流場は、RMS マッハ数

$$M = \sqrt{\left\langle \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2} \right\rangle} \quad (2.8)$$

の空間平均が 0.8、局所的な最大値が 2.0 であった。ここに、 $c = \sqrt{\gamma RT}$ は音速である。また、テイラー長を用いて作ったレイノルズ数

$$R_\lambda = \sqrt{\frac{5}{3\mu\epsilon}} \langle \rho \rangle \langle |\mathbf{u}|^2 \rangle \quad (2.9)$$

は 36 であった。ここに、 ϵ は運動エネルギーの散逸率で、 $\langle \rangle$ は空間平均を表す。この準定常状態の統計的性質については、文献 1 を参照されたい。外力は $t = 30$ で打ち切り、その後 $t = 40$ まで走らせた。以下では、この減衰乱流中に現れる衝撃波と渦度場の相互作用について述べる。

レイノルズ数と RMS マッハ数の時間発展を図 1 に示してある。レイノルズ数は 36 から 17 まで、RMS マッハ数は 0.80 から 0.35 まで、どちらも単調に減少する。局所マッハ数 $|\mathbf{u}|/c$ の最大値は $t = 30$ では 2.0、 $t = 40$ では 0.9 で、圧縮性の効果が充分期待される。

圧縮性流れを解析するためには、速度場 \mathbf{u} を回転成分 \mathbf{u}_R 、圧縮成分 \mathbf{u}_C 、平均 \mathbf{u}_0 の三つに分けて、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_C + \mathbf{u}_O \quad (2.10)$$

のように分解するのが有効である。ここに、

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_R = 0, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}_C = 0, \quad (2.12)$$

$$\langle \mathbf{u}_R \rangle = \langle \mathbf{u}_C \rangle = 0. \quad (2.13)$$

である。なお、この分解は一意的である。

3 衝撃波

3.1 衝撃波の同定

圧縮性流れの最も際だった特徴の一つは、衝撃波の存在である。後に見るように、渦度と衝撃波の間には強い相互作用がある。粘性も温度拡散も無視出来るいわゆる完全流体の場合には、衝撃波は密度や圧力、速度の衝撃波に垂直な成分等の物理量の不連続面になっている。衝撃波に相対的な速度の垂直成分は衝撃波の一方の側では亜音速、他方では超音速となっている。前者を衝撃波の前方、後者を後方と呼ぶ。衝撃波の前方から入ってくる流体粒子の速さは、後方から出て行く速さより大きいので、速度の発散 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ (以下では単に発散と言う) は、衝撃波のところで、負の無限大になる。従って、発散が大きな負の値をとるところ (大負値発散領域) を衝撃波と見なすことが出来よう。実際の粘性流では、衝撃波は粘性と温度拡散によって丸められる。しかし、粘性率や熱伝導率が充分小さい限り、衝撃波面はあまり丸められないので、衝撃波を横切る速度勾配は依然として大きく、従って発散は大きな負の値をとる。

厳密に言えば、ある薄い領域が衝撃波であることを言うためには、その領域に相対的な速度の垂直成分が領域の一方の側で超音速、他方で亜音速であることを確かめなくては行けない。しかし、三次元速度場において、ある領域に相対的な流体の速度を求めるのには膨大な手間が掛かるので、ここでは大負値発散領域を衝撃波と見なすことにする。

発散の確率分布関数は原点に関して非対称である。例えば、 $t = 30.8$ の時、発散は空間の 66% のところで正の値、34% のところで負の値をとる。その最大値と最小値はそれぞれおおよそ 5 と -20 である。図 2 は、 $t = 30.8$ における発散の等値面を基本周期領域 $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 2\pi$ の中で示してある。等値面上の発散の値は、最小値 (負の値をとる) の 15% である。この時

刻における RMS マッハ数の平均値は 0.75、最大値は 1.9、最小値は 0.004、また、レイノルズ数は 35 である。これらの曲面の内側では、発散は上記のしきい値よりも小さい。薄い帯状の領域が多数見られるが、それらは衝撃波の性質を持っていることが次節で示される。これらの領域の占める体積はごく小さく、全部合わせても全体の 1.4% に過ぎない。

3.2 曲衝撃波の構造

さて、図 2 で観察された薄い帯状の領域が、衝撃波の性質を持っているかどうかを調べよう。図の右前方にある帯領域を詳しく調べてみよう。図 3(a) はその帯領域を拡大したもので、立方体は $(\frac{7}{16}\pi \leq x_1 \leq \frac{23}{16}\pi, \pi \leq x_2 \leq 2\pi, \frac{1}{4}\pi \leq x_3 \leq \frac{5}{4}\pi)$ である。発散が大きな値をとるこの帯領域の形はかなり複雑であるが、近似的に二次元構造をしていることが認められる。その構造をもっとよく見るために、帯領域を平面 A [$x_1 + x_3 = 54\Delta x$ 、ただし $\Delta x (= 2\pi/64)$ は刻み幅を表す] 及び平面 B ($x_2 = 48\Delta x$) で切った切口をそれぞれ図 3(b, c) に示す。平面 A に垂直な曲った薄い帯状の構造がよく分かる。この領域を曲衝撃波と呼ぼう。

曲衝撃波の構造は、速度の圧縮成分 u_c に端的に現れる。図 4(a, b) に、それぞれ u_c の平面 A と B による切口を示した。線分は u_c のそれぞれの面内の成分に平行である。この速度成分は、それぞれの平面内のある曲線 (三次元空間で考えれば、ある曲面) の中に流れ込んでいるように見える。この曲面は、図 3 に示した大負値発散領域と一致しており、曲衝撃波の構造をはっきりと表している。この曲衝撃波は、平面 A に垂直な方向に近似的に二次元的な構造をしており、その平面上では x_2 軸に垂直な方向に軸を持つ放物形になっている。

曲衝撃波の移動速度は、少し異った二つの時刻における速度の圧縮成分のグラフを比較することによって得られる。時刻 $t = 30.6$ と 30.8 での速度場の比較から、この衝撃波は $(1, 0, -1)$ 方向に単位時間当たり 0.07 の速さで動いていることが分かる。従って、この衝撃波は凹型で、衝撃波の前面(後面)は図 4(a) では衝撃波の右(左)に、また図 4(b) では左上(右下)に位置している。

平面 A と B の上での密度の等高線が図 5(a, b) にそれぞれ示してある。密度勾配は衝撃波のところで非常に大きい。密度は衝撃波の頂点の直前、直後でそれぞれ 0.46、1.25 で、衝撃波を横切って密度は 2.7 倍増加している。この衝撃波に付随する衝撃波マッハ数は

$$M_s = \frac{|(u - u_s)_\perp|}{c} \quad (3.1)$$

で定義される。ここに、 $(u - u_s)_\perp$ は衝撃波に相対的な速度の垂直成分である。衝撃波の前面における M_s の値は衝撃波の接続条件 [後で述べる (3.2) 式で $\theta = 0$ の場合] を用いて、2.0 と

見積られる。一方、衝撃波後方のマッハ数は 0.6 である。従って、確かに、衝撃波の前方では超音速、また後方では亜音速となっている。

図 7(a, b) には、圧力の平面 A 及び B 上での切口が示してある。それらは、密度の対応するグラフと非常に良く似ている。密度勾配と圧力勾配は互いにほとんど平行で、しかも衝撃波面に垂直である。それらの勾配は衝撃波のところで非常に大きい値をとるが、それらの外積 (エンストロフィ密度方程式 [(1.3) 式] の傾圧項) は大きくはならない。例えば、衝撃波の頂点付近では、 $|\nabla p \times \nabla \rho| / |\nabla p| |\nabla \rho| \approx 0.09$ で、両勾配の間の角はたった 5° に過ぎない。

密度勾配と圧力勾配のベクトルの間の角の確率分布関数の $t = 30.8$ における形を図 7(a) に示した。分布は角度 4° 付近に最大値を持ち、大きな角度に対しては急速に減少する。角度が 10° 以下になる確率はこの時刻では 0.54 である。従って、密度勾配と圧力勾配は互いにほとんど平行であると言ってよい。これら二つの勾配の平行性は、衝撃波の近傍でより強くなる。図 7(b) は、大負値発散領域 ($\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$) に限った時の角度分布である。分布が角度の小さい方へ移動し、最大値をとる角度は約 1° である。角度が 3° 以下の空間点はこの大負値発散領域の 75% も占める。我々がこのシミュレーションで見出した密度勾配と圧力勾配の平行性は、Passot と Pouquet (1987)²⁾ による二次元圧縮流の結果と正反対であることを指摘しておく。彼らは、これら二つの勾配は互いに垂直になるように並ぶと述べている。この違いは流れの次元の違いに依るのではないかと思われるが、はっきりしたことはまだ分っていない。

図 8 に速度場の平面 A への射影を示した。細い線は、 u のこの面内の成分に平行になっている。太い曲線は曲衝撃波である。流体は衝撃波を左から右へ抜けていき、衝撃波の背後では曲衝撃波の軸の方に曲がる傾向がある。このような速度変化は、斜め衝撃波を横切る流体粒子の運動として理解することが出来る (3.3 節参照)。衝撃波に垂直な流体粒子の速度は、衝撃波の直前と直後でそれぞれ 1.5 と 0.3 であり、どちらも衝撃波の移動速度 0.07 よりずっと大きい。

図 9(a, b) は平面 A、B 上における渦度ベクトル場である。矢印は渦度ベクトルの方向を表す。渦線と衝撃波の構造に関して興味深い点が幾つかある。まず第一に、渦度線は衝撃波のすぐ後で大きくその方向を変える。これは衝撃波の背後で渦度が生成されていることを暗示する。次に、渦度は衝撃波面に垂直になる傾向がある。そして第三に、渦度は衝撃波の移動する方向に向いている。即ち、渦度は密度勾配とは逆向きである。渦度と衝撃波のこれらの特徴が現れるメカニズムは、まだよく分っていない。

渦度と圧力勾配の間の角の確率分布関数が図 10(a) に示してある。時刻は $t = 30.8$ であ

る。分布は角度がおおよそ 90° のところに頂点をもつ二等辺三角形になっている。つまり、渦度と密度勾配は、互いに垂直になる傾向があると言える。大負値発散領域 $\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$ に限ると、角度分布は図 10(b) のようになる。この領域の空間点の数が少ない (全領域の 14%) ので、分布はかなりがたついているが、分布関数は全体として角度の大きい方へ移動し、頂点は 120° のところまで来ていることが分る。これは渦度と密度勾配が衝撃波の近くで反平行になる傾向があることを示唆するものである。

図 11 はエンストロフィ密度場である。曲衝撃波の頂点のすぐ後に非常に強い極大値がある。衝撃波を横切って延びている比較的強いエンストロフィの帯が顕著である。図 12 には衝撃波に平行 (平面 A に垂直) な渦度成分を示した。渦度は帯状の領域で負の値をとる (流体粒子は時計方向にまわる)。衝撃波の直後には、大きな値をとる極値と双極子構造が見られる。曲衝撃波の回りのこれらの流れの特徴を次節で議論しよう。

3.3 曲衝撃波の接続条件

曲衝撃波を横切る流れ場の諸量とその空間微分の接続条件を考える。流れは二次元・定常で流体は完全気体とする。接続条件は一般に衝撃波の方向と曲率の双方に依存して衝撃波の場所ごとに異なる。図 13 に示すように、衝撃波の単位法線ベクトルを \hat{n} 、単位接線ベクトルを \hat{l} 、曲率半径を a 、衝撃波角を θ とする。曲率半径 a の符号は衝撃波が流れの下流に向かって凸型の時は正、凹型の時は負と定める。流体粒子は、図 16 に矢印で示したように、衝撃波を左から右へ通り抜ける。単位法線ベクトル \hat{n} の方向は衝撃波後方に、また単位接線ベクトル \hat{l} は衝撃波に沿って衝撃波の前面を左に見る方向に向いている。

衝撃波の前方における密度、圧力、速度の法線方向及び接線方向の成分をそれぞれ ρ 、 p 、 u_n 、 u_l とし、衝撃波後方での対応するものを $\bar{\rho}$ 、 \bar{p} 、 \bar{u}_n 、 \bar{u}_l とする。よく知られているように、これらの諸量の衝撃波前後の接続条件は

$$\bar{\rho} = \frac{(\gamma + 1)M_s^2}{(\gamma - 1)M_s^2 + 2} \rho, \quad (3.2)$$

$$\bar{p} = \frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1} p, \quad (3.3)$$

$$\bar{u}_n = \frac{(\gamma - 1)M_s^2 + 2}{(\gamma + 1)M_s^2} u_n, \quad (3.4)$$

$$\bar{u}_l = u_l \quad (3.5)$$

で与えられる。³⁾ここに、衝撃波マッハ数

$$M_s = \sqrt{\frac{\rho|\mathbf{u}|^2}{\gamma p}} \cos\theta \quad (3.6)$$

は衝撃波前方における衝撃波に相対的な速度の法線成分と音速の比で定義されている。衝撃波が存在するためには、衝撃波前方において、速度の法線成分が音速を上まわらなければならない。即ち、

$$M_s > 1 \quad (3.7)$$

である。

さて、場の諸量の空間微分の接続条件は、上記の (3.2) - (3.5) から導くことが出来る。その前に、曲線座標系におけるベクトル場の微分公式を思い出しておこう。ベクトル場 $\mathbf{F} = F_n \hat{\mathbf{n}} + F_l \hat{\mathbf{l}}$ に対して、その法線方向及び接線方向の微分はそれぞれ

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial n} = \frac{\partial F_n}{\partial n} \hat{\mathbf{n}} + \frac{\partial F_l}{\partial n} \hat{\mathbf{l}}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial l} = \left(\frac{\partial F_n}{\partial l} - \frac{F_l}{a} \right) \hat{\mathbf{n}} + \left(\frac{\partial F_l}{\partial l} + \frac{F_n}{a} \right) \hat{\mathbf{l}} \quad (3.9)$$

で与えられる。ここに a は曲率半径である。曲衝撃波を横切る接線微分量に対する接続条件は、(3.2) - (3.5) を衝撃波に沿って微分することによって得られる。ここでは、簡単のために衝撃波前方で流れは一様であるとする。非一様な場合への拡張は容易である。この時、速度 \mathbf{u} に対して式 (3.8) と (3.9) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & \quad \frac{\partial \rho}{\partial l} = 0, & \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0, & \quad \frac{\partial p}{\partial l} = 0, \\ \frac{\partial u_n}{\partial n} = 0, & \quad \frac{\partial u_n}{\partial l} = \frac{u_l}{a}, & \quad \frac{\partial u_l}{\partial n} = 0, & \quad \frac{\partial u_l}{\partial l} = -\frac{u_n}{a} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

が得られる。(3.2) - (3.5) を衝撃波に沿って微分すると

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial l} = \frac{4(\gamma + 1)M_s^2 \tan\theta}{a\{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}^2} \rho, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial l} = \frac{4\gamma M_s^2 \tan\theta}{a(\gamma + 1)} p, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial l} = \frac{\{(\gamma - 1)M_s^2 - 2\} \tan \theta}{a(\gamma + 1)M_s^2} u_n, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial l} = -\frac{u_n}{a} \quad (3.14)$$

となる。ここに、公式 (3.9) と微分の関係 (3.10) 及び $\partial \theta / \partial l = -1/a$ を用いた。

一方、法線成分に対する接続条件は、衝撃波背後における完全気体の運動方程式

$$\text{div}(\bar{\rho} \bar{\mathbf{u}}) = 0, \quad (3.15)$$

$$\bar{\rho}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}) \bar{\mathbf{u}} = -\text{grad} \bar{p}, \quad (3.16)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \text{grad}(\bar{p} \bar{\mathbf{u}}) + \frac{1}{2} \bar{\rho}(\bar{\mathbf{u}} \cdot \text{grad}) |\bar{\mathbf{u}}|^2 = 0 \quad (3.17)$$

から得られる。これらの方程式の空間微分を法線微分と接線微分を用いて表せば、

$$\frac{\partial}{\partial n}(\bar{\rho} \bar{u}_n) + \frac{\bar{\rho} \bar{u}_n}{a} + \frac{\partial}{\partial l}(\bar{\rho} \bar{u}_l) = 0, \quad (3.18)$$

$$\bar{\rho} \left(\bar{u}_n \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} - \frac{\bar{u}_l^2}{a} + \bar{u}_l \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial l} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial n}, \quad (3.19)$$

$$\bar{\rho} \left(\bar{u}_n \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial n} + \frac{\bar{u}_n \bar{u}_l}{a} + \bar{u}_l \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial l} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial l}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(\bar{p} \bar{u}_n) + \frac{\bar{p} \bar{u}_n}{a} + \frac{\partial}{\partial l}(\bar{p} \bar{u}_l) \right\} + \frac{\bar{\rho}}{2} \left(\bar{u}_n \frac{\partial}{\partial n} + \bar{u}_l \frac{\partial}{\partial l} \right) (\bar{u}_n^2 + \bar{u}_l^2) = 0 \quad (3.21)$$

となる。(3.11) - (3.14) を (3.18) - (3.21) に代入すると、法線微分量について解けて、

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = \frac{2M_s^2}{a\{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}} \left[-1 + \frac{(\gamma + 1)\{3(\gamma - 1)M_s^4 - (\gamma - 3)M_s^2 + 2(\gamma + 2)\}}{(M_s^2 - 1)\{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}^2} \tan^2 \theta \right] \rho, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial n} = \frac{2\gamma M_s^2}{a(\gamma + 1)} \left[-\frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)M_s^2} + \frac{2(2\gamma - 1)M_s^4 + (\gamma + 5)M_s^2 - (\gamma - 1)}{(M_s^2 - 1)\{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}} \tan^2 \theta \right] p, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial n} = \frac{2}{a(\gamma + 1)} \left[\frac{2\gamma M_s^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)M_s^2} - \frac{3M_s^2 + 1}{M_s^2 - 1} \tan^2 \theta \right] u_n, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial n} = \frac{2 \{(-\gamma + 3)M_s^2 - (\gamma + 5)\} \tan \theta}{a(\gamma + 1) \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}} u_n \quad (3.25)$$

が得られる。

関係式 (3.11) - (3.14) と (3.22) - (3.25) は、静止状態へ向かって運動する曲衝撃波の接続条件である。次節で見るように、これらの関係式を用いて曲衝撃波を横切る流れの特徴を議論することが出来る。ところで、(3.22) - (3.24) の分母に因子 $(M_s^2 - 1)$ が含まれており、これらの諸量は $M_s \rightarrow 1$ の極限で発散するよう見える。しかし現実には、この極限では衝撃波はなくなり流れは連続であって、このような特異性はあってはならない。実は、この見かけの特異性は曲衝撃波の曲率半径とマッハ数に有限値を独立に与えたことによるのであって、もし曲衝撃波の曲率半径が $M_s \rightarrow 1$ で ∞ に近づくものとすればこの特異性はなくなるのである。

3.4 渦度生成

一様流が曲衝撃波を通過した時、その背後に渦度が発生することはよく知られている(クロココの定理)。⁴⁾ 前節で導いた速度の空間微分についての接続条件を用いて、我々は曲衝撃波を横切る渦度の生成を定量的に議論することが出来る。

(3.5)、(3.13)、(3.25) より曲衝撃波背面の渦度は

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial n} + \frac{\bar{u}_l}{a} - \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial l} \\ &= \frac{4(M_s^2 - 1)^2 \sin \theta}{a(\gamma + 1)M_s^2 \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}} |u| \end{aligned} \quad (3.26)$$

で与えられる。渦度は衝撃波の曲率半径に反比例する。衝撃波前方の定常流と衝撃波の曲率半径を与えると、衝撃波背後に生成される渦度の強さは衝撃波角 θ に依存する。衝撃波マッハ数 M_s もまた衝撃波角に依存する。生成される渦度の符合は衝撃波角と衝撃波の曲率 a の符合によって決まる。もし流体の速度の接線成分が単位接線ベクトル \hat{l} と同じ(反対)向きであれば、凸型 ($a > 0$) の衝撃波の背後に正(負)の渦度が生成される。凹型 ($a < 0$) の衝撃波に対しては反対符合の渦度が生成される。渦度の強さは θ の単調関数ではなく、垂直衝撃波 ($\theta = 0$) 及びマッハ波 [$\theta = \pm \cos^{-1}(1/M_s)$] に対して零となる。

さて、我々のシミュレーションで得られた曲衝撃波に関連した渦度場の構造について考えよう。ただし、流れは二次元的でも定常でもないので、衝撃波背後の渦度の符合について定性的な議論しか出来ない。図 8 から分るように、流体粒子の速度は曲衝撃波の軸とある有限の角をなしている。(3.26) 式によれば、渦度の符合は $\sin \theta$ の符合で決まる。このことから、曲

衝撃波の背後に双極子が発生することが分る。流れの方向が曲衝撃波の軸と一致しない時は、正負いづれか一方の符号をもった渦度が卓越する。このことは、図 12 で曲衝撃波を横切る負の渦度をもった細長い領域の存在をよく説明する。

3.5 傾圧発生

非粘性流体の渦なし流から渦度が発生するとすれば、それは傾圧項 $-\nabla p \times \nabla \rho / \rho^2$ によるしかない。と言うのは、この場合、他の項は全て零になるからである。第 3.3 節で導いた曲衝撃波の接続条件を使って、渦なしの定常状態から曲衝撃波を横切る際の渦度生成における傾圧項の大きさを見積ることが出来る。

衝撃波の厚さが零の極限では、密度勾配も圧力勾配も共に衝撃波のところで無限大になる。しかしながら、これらの勾配は互いにほとんど平行で、その外積は非常に小さい。衝撃波を横切る傾圧項の寄与を正確に計算するためには、衝撃波内部での密度と圧力の関数形を知る必要がある。衝撃波の内部構造は粘性項と熱拡散項に依存し、それはいわゆる漸近接続法によって解析することが出来る。その解析は簡単であるが、表現は最低次でもかなり煩雑になるのでここでは傾圧項の大きさを厳密に計算する代わりに、衝撃波の接続条件を用いたおおよその見積りをすることにする。

二次元非圧縮定常流に対しては、渦度方程式は、円柱座標系 (n, l) で

$$0 = -\frac{\partial}{\partial n}(u_n \omega) - \frac{u_n \omega}{n} - \frac{\partial}{\partial l}(u_l \omega) - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial \rho}{\partial n} \right) \quad (3.27)$$

と書ける。ここに、 ω は渦度の $\hat{n} \times \hat{l}$ 方向の成分である。渦度が (n, l) 面上に成分をもたないから圧縮項は恒等的に零になる。無限に薄い衝撃波が $n = a$ のところに局在していると、(3.27) を n について、衝撃波を含む無限小区間 $[a_-, a_+]$ に渡って積分すると、

$$[u_n \omega]_{a_-}^{a_+} = - \int_{a_-}^{a_+} \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \frac{\partial \rho}{\partial l} - \frac{\partial p}{\partial l} \frac{\partial \rho}{\partial n} \right) dn \quad (3.28)$$

が得られる。ただし、 ω と u が有限であると仮定した。(3.28) 式の左辺は、(3.4) と (3.26) を使って計算出来て、

$$[u_n \omega]_{a_-}^{a_+} = \frac{4(M_s^2 - 1)^2}{a(\gamma + 1)^2 M_s^4} u_n^2 \tan \theta \quad (3.29)$$

となる。ここで、 ω が $n = a_-$ で零になることを使った。(3.28) 式の右辺の積分は (3.29) に等しくなければならない。

(3.28) の積分は密度と圧力の衝撃波内部での関数形が分らない限り具体的に計算することは出来ない。その代わりに、接続条件 (3.2)、(3.3)、(3.11)、(3.12) を用いてその積分を概算す

ることが出来る。(3.2) より衝撃波前後の密度差が $\Delta\rho = \bar{\rho} - \rho = 2(M_s^2 - 1)\rho / \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}$ であるから、密度の法線微分が $\partial\rho(n)/\partial n = 2(M_s^2 - 1)\rho\delta(n - a) / \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}$ で近似される。ここに、 $\delta(\cdot)$ はデルタ関数である。同様にして、圧力の法線微分が $\partial p(n)/\partial n = 2\gamma(M_s^2 - 1)p\delta(n - a) / (\gamma + 1)$ で近似される。密度の接線微分は衝撃波の前では零、衝撃波の後では (3.11) で与えられる。従って、密度の接線微分の代表値としてここではこの二つの値の平均 $2(\gamma + 1)M_s^2 \tan\theta \rho / a \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}^2$ をとる。同様に、圧力の接線微分は $2\gamma M_s^2 \tan\theta p / a (\gamma + 1)$ で近似される。密度の逆数の自乗はそれらの衝撃波の両側での平均値 $\{(\gamma^2 + 1)M_s^4 + 2(\gamma - 1)M_s^2 + 2\} / (\gamma + 1)^2 M_s^4 \rho^2$ で見積もられる。従って、(3.28) の積分は結局

$$[u_n \omega]_{a-}^{a+} = \frac{4(\gamma - 1)(M_s^2 - 1)^2 \{(\gamma^2 + 1)M_s^4 + 2(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}}{a(\gamma + 1)^3 M_s^4 \{(\gamma - 1)M_s^2 + 2\}^2} u_n^2 \tan\theta \quad (3.30)$$

となる。これは (3.29) 式と完全に一致するものではない。衝撃波の内部構造をきちんと計算しないで、渦度と圧力の関数形を近似的に与えたからである。しかし、(3.30) と (3.29) の曲率半径 a 、衝撃波角 θ 及び法線速度 u_n に対する依存性は完全に一致する。更に、マッハ数 M_s 依存性は、小マッハ数の極限 ($M_s \rightarrow 1$) と大マッハ数の極限 ($M_s \rightarrow \infty$) で一致する。

4 エンストロフィ収支

この章では、エンストロフィ密度方程式 (1.3) の各項の相対的な大きさについて考える。

(1.3) の全空間に渡る空間平均を取れば、エンストロフィ方程式

$$\begin{aligned} \frac{d\langle Q \rangle}{dt} = & -\langle Q(\nabla \cdot \mathbf{u}) \rangle + \langle \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho^2} [\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla p \times \nabla \rho)] \right\rangle \\ & + \frac{1}{Re_0} \left\langle \boldsymbol{\omega} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho^2} \nabla \rho \times (\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})) \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (4.1)$$

が得られる。周期境界条件のおかげで移流項は消えてしまう。図 14 に、渦度伸長 (○)、圧縮 (□)、移流 (マークなし)、傾圧 (◇)、散逸 (▽) の各項とそれらの和 (●) を示した。見やすくするために、圧縮項と傾圧項は 5 倍してある。この図から、エンストロフィ収支に最も効くのは渦伸長項と散逸項であることが分る。前者は正、後者は負の寄与を与える。正味の寄与はわずかながら負で、エンストロフィは時間と共に単調に減少する。圧縮項は零の回りを小さな振幅で振動する。振動の周期は約 2 単位時間で、運動エネルギーと内部エネルギーの間のエネルギー交換や、基本周期領域を横切る音波の時間スケールと同程度である。⁵⁾

傾圧項は非常に小さい。密度勾配と圧力勾配は衝撃波のところで大きな値を取るが、それらはほとんど平行なのでその外積は小さい (3.2 節参照)。これは、Passot と Pouquet²⁾ によ

る二次元圧縮性乱流の結果とは正反対である。二次元流では、三次元流において重要な役割を演ずる渦伸長項はない。Passot と Pouquet は、密度勾配と圧力勾配はほとんど垂直で、傾圧項がエンストロフィ収支に強く効くと主張している。

我々はこれまでエンストロフィ収支における各項の場合全体に渡る役割を調べてきた。ここでは、衝撃波領域からの寄与に着目しよう。第 2.1 節で見たように、衝撃波領域は大負値発散領域である。図 15 には、 $t = 30.8$ での $\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$ の領域からのエンストロフィ収支への各項の寄与が示してある。それらは全エンストロフィ散逸量が 1 になるように規格化してある。前に図 2 に関連して述べたように、この大負値発散領域は全空間のほんの 1.4% を占めているに過ぎない。図 15 を見ると、圧縮項と移流項がエンストロフィの増大に寄与し、一方、渦伸長項と散逸項がその消散に寄与していることが分かる。傾圧項はこの場合も非常に小さい。正味のエンストロフィ収支は正であるのでエンストロフィが衝撃波内部で生成されていることが分る。渦伸長は、大域的なエンストロフィ収支には正の寄与を与えるが(図 14)、衝撃波領域に限ればエンストロフィの強度を減少させるように働く。圧縮項は衝撃波領域でエンストロフィを成長させるが、全体の収支にはほとんど関与しない。

では、流れ場のどの部分でエンストロフィが強められているのであろうか。この質問に対するヒントを得るために我々は発散の値を条件としてエンストロフィ密度の平均値を計算した。図 16 に、 $t = 30.8$ でのエンストロフィ密度の平均値の分布を、条件にとった発散の値に対してプロットした。エンストロフィは両端、即ち発散の絶対値が大ききところで大きくなる。

図 16 と同様な平均値の分布が、エンストロフィ収支の各項について $t = 30.8$ の時刻で図 17 に示してある。圧縮項は負発散領域で、渦伸長項は正発散領域でそれぞれ大きくなる。これら二つの項は、それぞれの領域においてエンストロフィの大きな値を維持するのに貢献している。

5 まとめ

圧縮・非圧縮を問わず、もし流体の密度が一様でなければ渦度は密度勾配と圧力勾配の方向の不一致によって生成される。この渦度の傾圧生成は異なった密度の流体からなる流れにおけるエンストロフィ生成の主たるメカニズムである。⁶⁾

この論文では、単一流体からなる圧縮性乱流におけるエンストロフィ生成のメカニズムを解析的並びに数値的に調べた。 $R_\lambda \approx 35$ と $M \approx 0.75$ では流体密度は衝撃波近くを除いて空間的にゆっくり変化する。実際、渦度の大部分は強い衝撃波領域で傾圧項によって生成され、圧

縮項によって強められていることを確かめた。しかし、傾圧生成のメカニズムは二種の異なった流体の場合ほどには強くはない。何故なら、単一流体の場合、密度勾配と圧力勾配は衝撃波のところで互いに平行にならなければならないのに対し、二種の異なった流体の密度界面では必ずしもそうなる必要はないからである。

我々はまた、エンストロフィ収支方程式に現れるいろいろな項を比較した。全収支への主たる寄与は渦伸長と散逸項が受け持ち、前者は正、後者は負の寄与を与えることを見出した。しかし、衝撃波領域に限定すれば、圧縮項と傾圧項が正の、散逸項が負の寄与を与える。速度の発散の大きさを条件としてとったエンストロフィの平均やエンストロフィ収支の各項の平均から、渦度は発散の絶対値の大きなところで強められていること、及び、渦伸長と圧縮項はそれぞれ大きな正と負の発散領域で重要であることが分った。渦線は衝撃波面に垂直で密度勾配と反平行になっている。

乱流モデルの構築の際に問題になる重要な要素の一つは渦の傾圧生成のメカニズムの理解である。そのために、この生成過程に関連する渦度の構造のより詳しい研究が必要である。この際、衝撃波を横切る歪み速度テンソルの空間分布の解析も重要となるであろう。我々のシミュレーションの空間精度は衝撃波の内部構造を議論するには不十分である。衝撃波の内部構造をとらえ、レイノルズ数やマッハ数依存性を調べるためには、より高い精度の計算が必要である。

この研究はプリンストン大学の S.A. Orszag 教授と共同でなされたものである。

引用文献

- ¹ S. Kida & S.A. Orszag 1990 Energetics in a Forced Compressible Turbulence (submitted to Phys. Fluids).
- ² T. Passot & A. Pouquet 1987 Numerical Simulation of Compressible Homogeneous Flows in the Turbulent Regime, J. Fluid Mech., **181**, 441 - 466.
- ³ L.D. Landau & E.M. Lifshitz 1959 *Fluid Mechanics*, Pergamon.
- ⁴ J.D. Anderson Jr. 1982 *Modern Compressible Flow with Historical Perspective*, McGraw-Hill.
- ⁵ S. Kida & S.A. Orszag, 1990 Numerical Simulation of a Decaying Compressible Turbulence (to appear).
- ⁶ J.M. Picone and J.P. Boris, 1988 Vorticity generation by shock propagation through

bubbles in a gas, J. Fluid Mech., 189, 23 - 51.

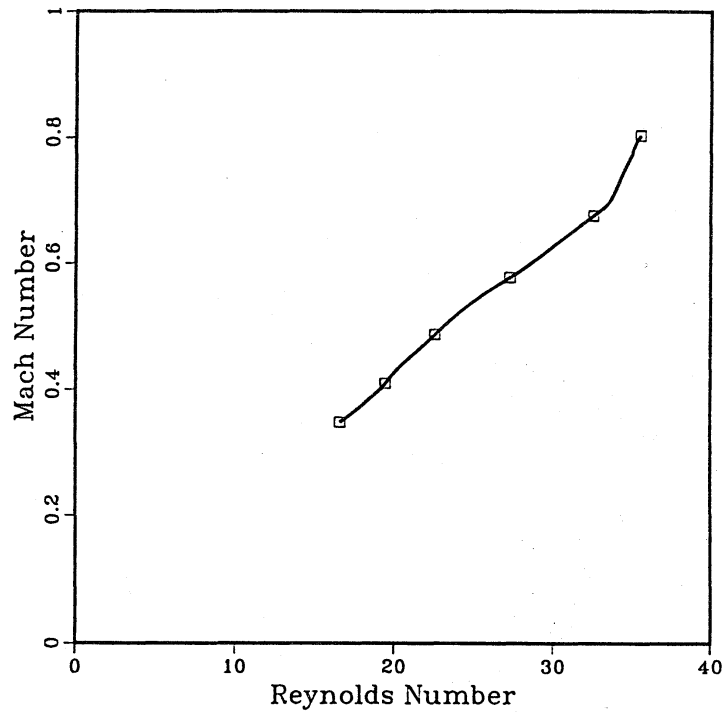


図 1. レイノルズ数と RMS
マッハ数の時間変化。

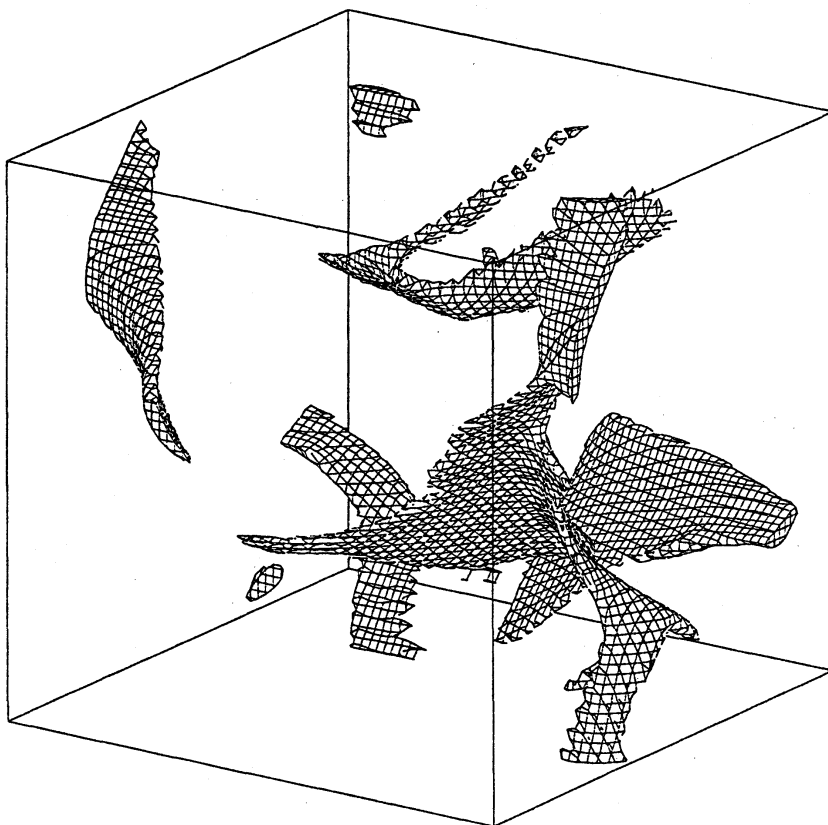


図 2. 大負値発散領域。速
度の発散が最小値の 15%
の値をとる面が描いてある。
 $t = 30.8$.

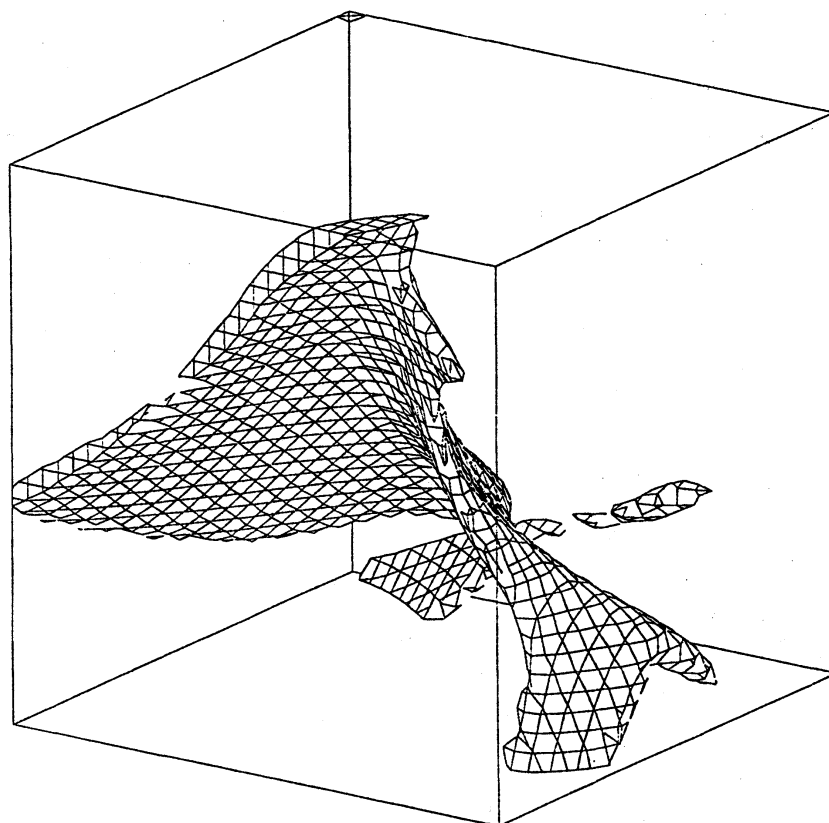


図 3. (a) 領域 $(7\pi/16 \leq x_1 \leq 23\pi/16, \pi \leq x_2 \leq 2\pi, \pi/4 \leq x_3 \leq 5\pi/4)$ における図 2 の拡大図。

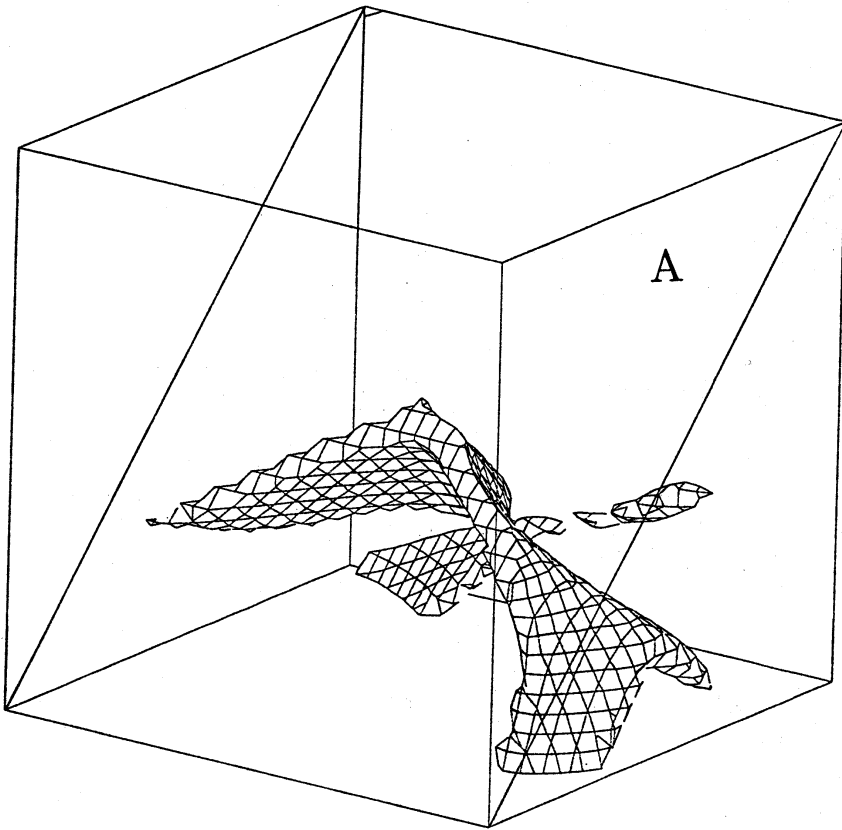


図 3. (b) 平面 A ($x_1 + x_3 = 54\Delta x$) による図 3(a) の切口。

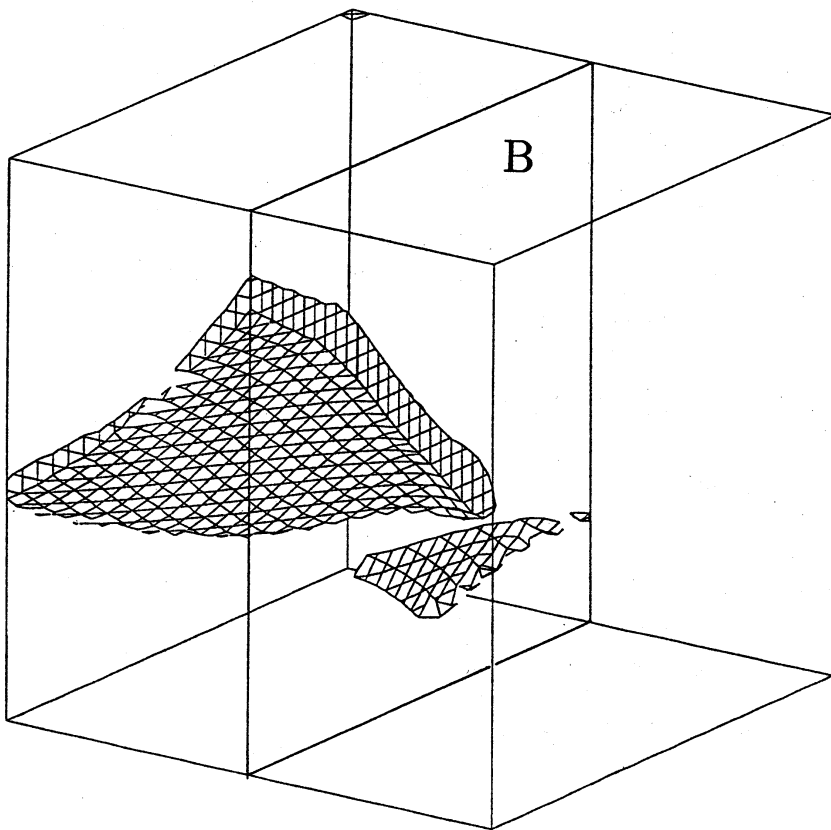


図 3. (c) 平面 B ($x_2 = 48\Delta x$) による図 3(a) の切口。

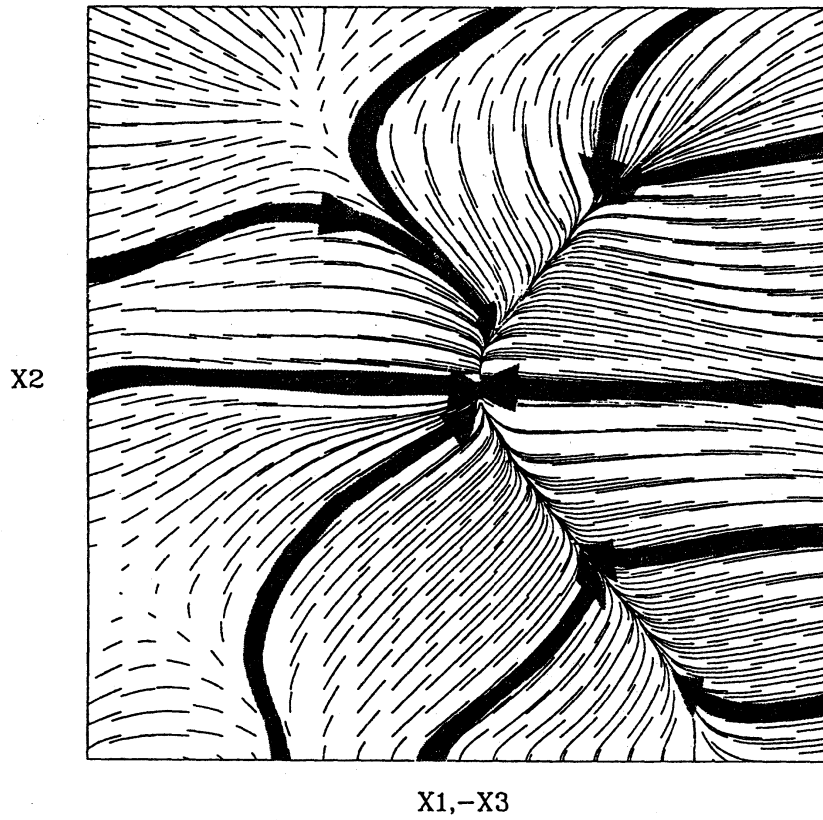


図 4. (a) 平面 A 上での速度の圧縮成分。線分は速度ベクトルに平行である。矢印は流れの向きを表す。 $t = 30.8$.

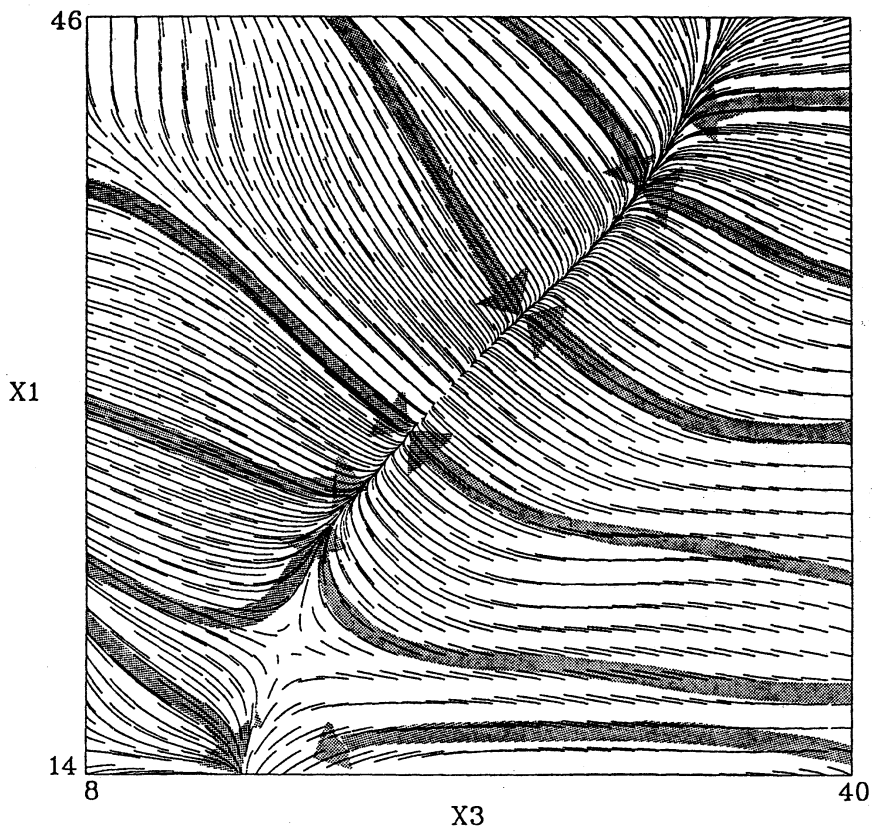


図 4.(b) 平面 B 上での速度の圧縮成分。 $t = 30.8$.

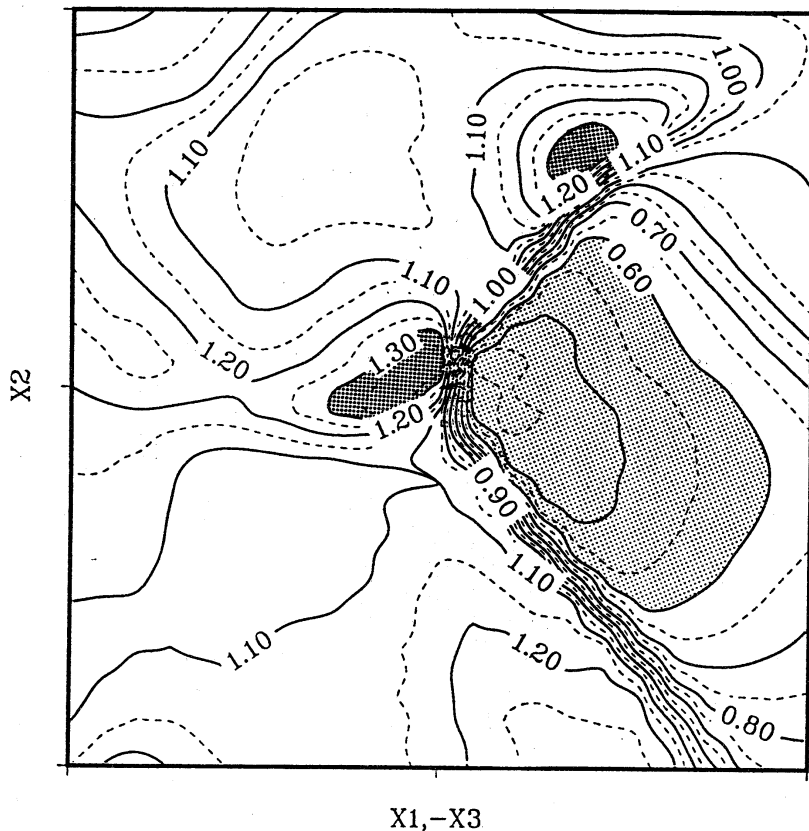


図 5. (a) 平面 A 上での
密度の等高線。 $t = 30.8$.

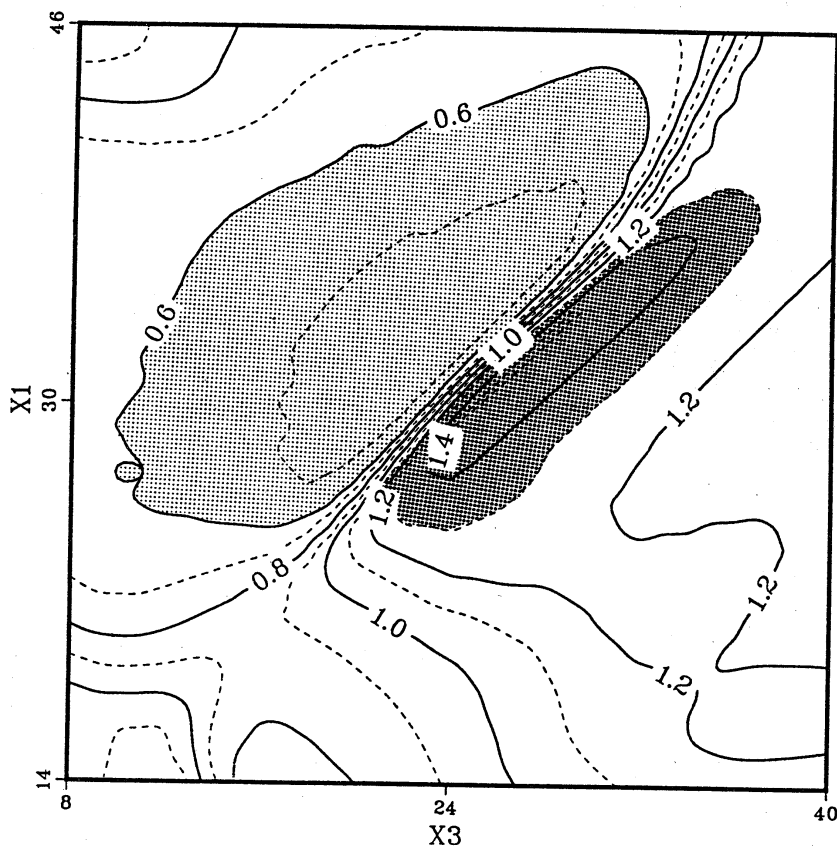


図 5. (b) 平面 B 上での
密度の等高線。 $t = 30.8$.

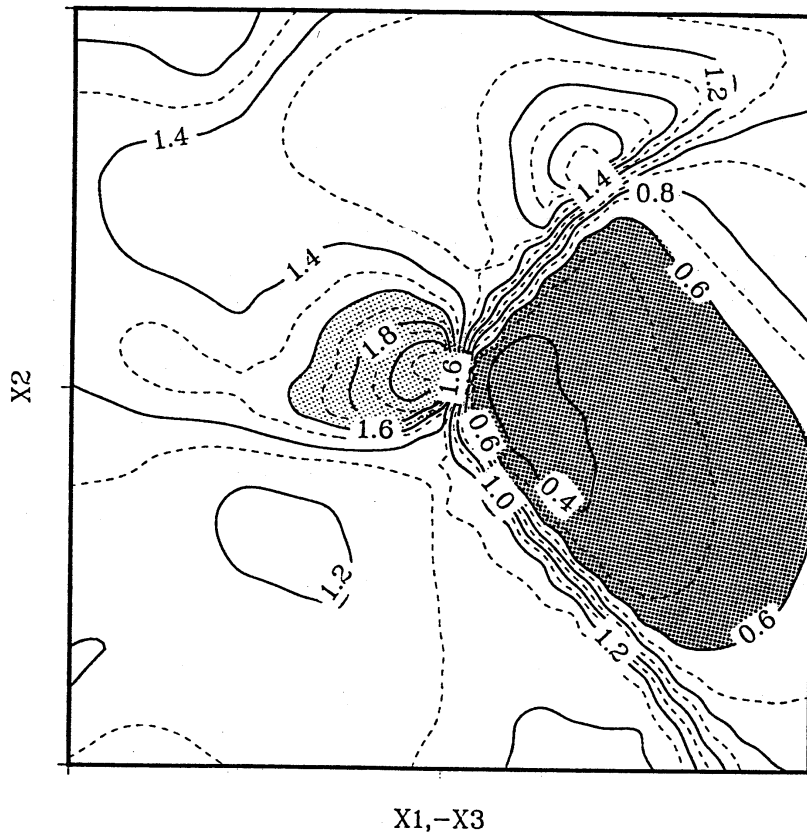


図 6. (a) 平面 A 上での
圧力の等高線。 $t = 30.8$.

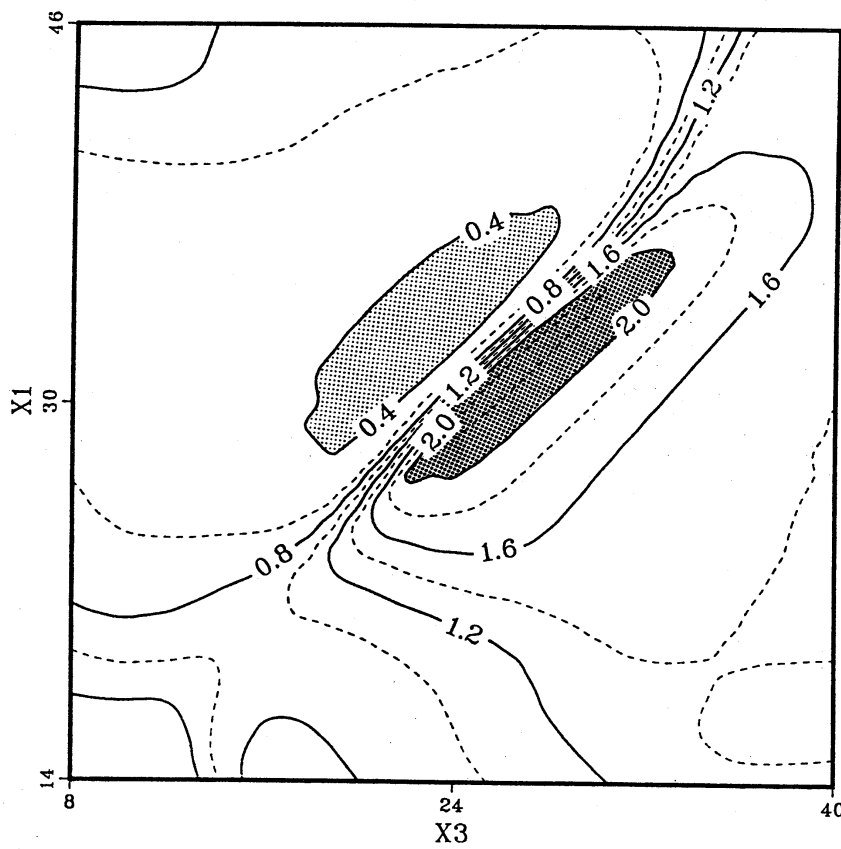


図 6. (b) 平面 B 上での
圧力の等高線。 $t = 30.8$.

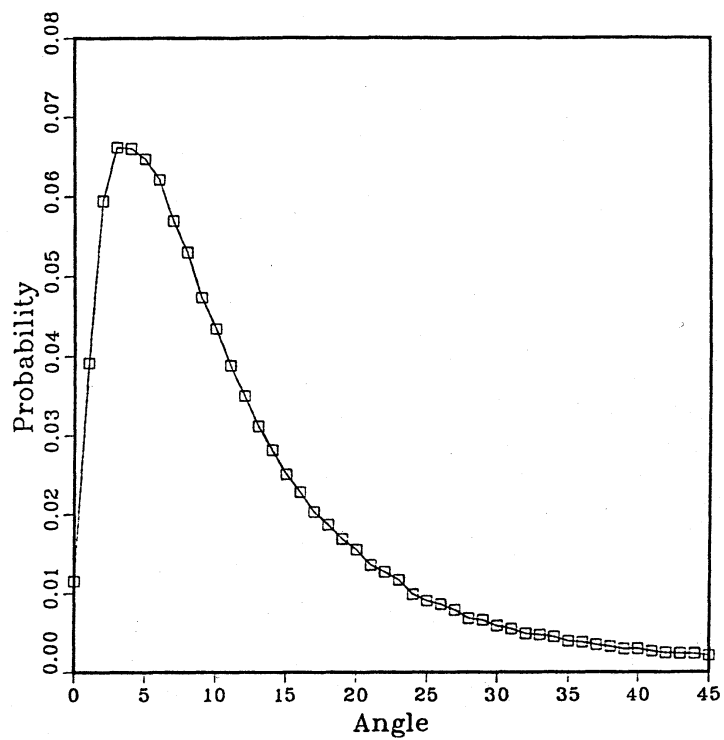


図 7. (a) 全空間にわたる
密度勾配と圧力勾配の間の
角の確率分布。 $t = 30.8$.

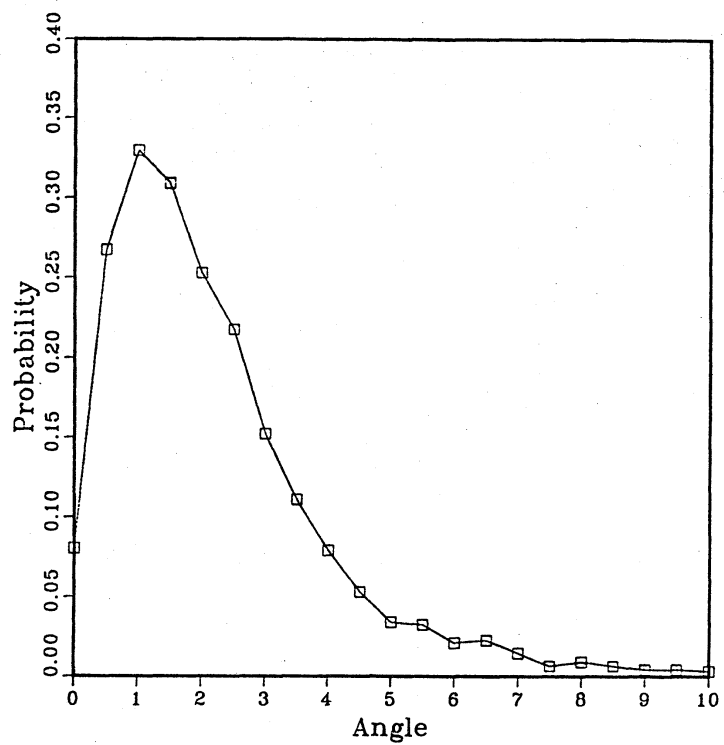


図 7. (b) 大負値発散領
域 $\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$ に
おける密度勾配と圧力勾配
の間の角の確率分布。 $t =$
30.8.

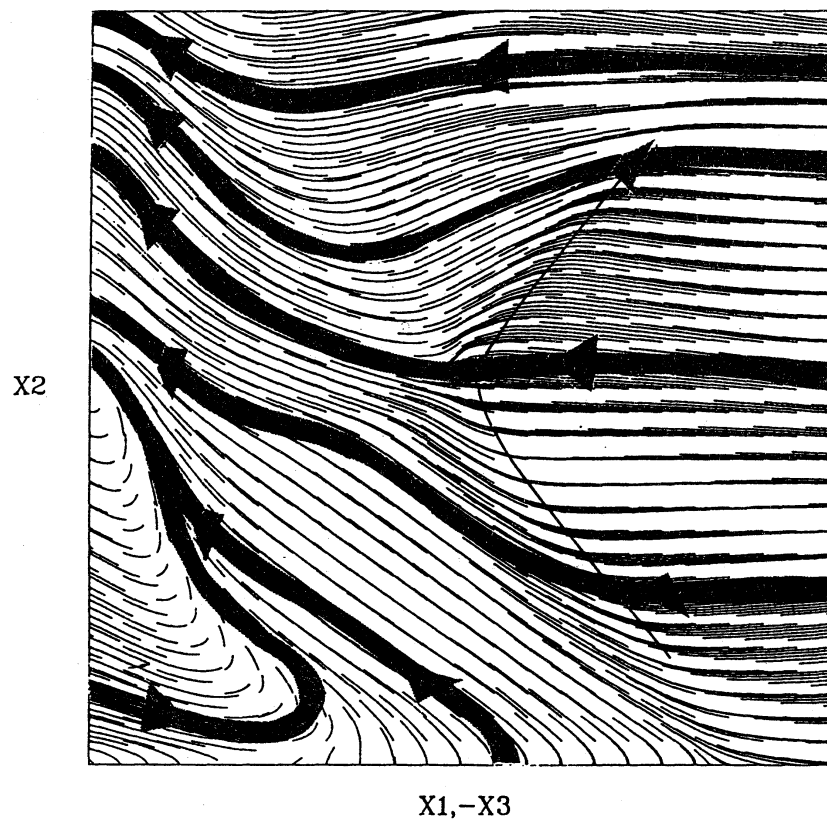


図 8. 平面 A 上の速度場。 $t = 30.8$.

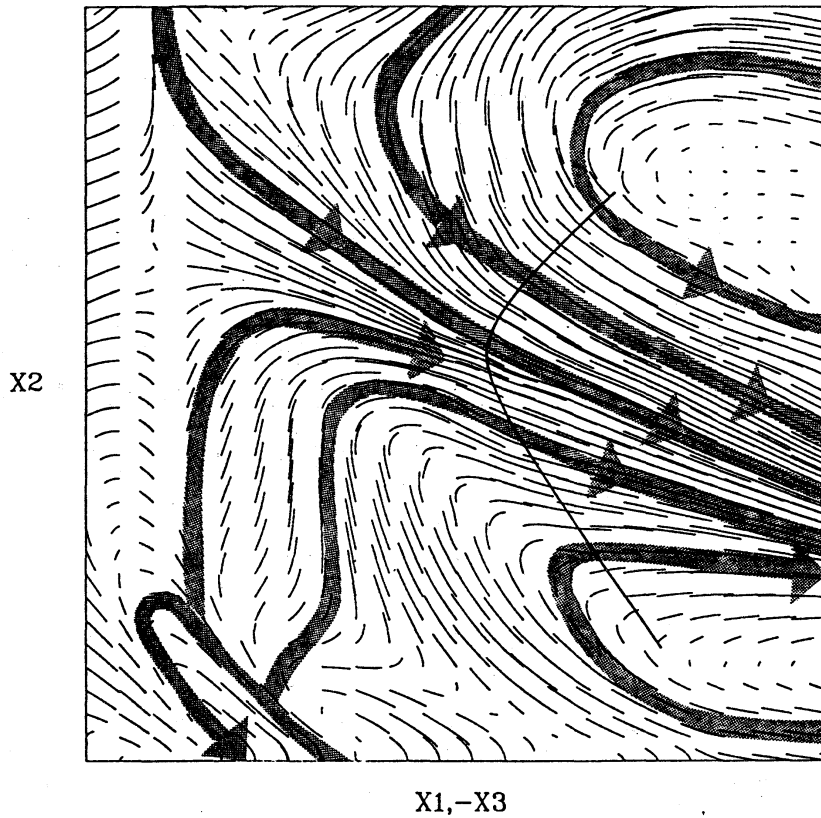


図 9. (a) 平面 A 上での渦度場。 $t = 30.8$.

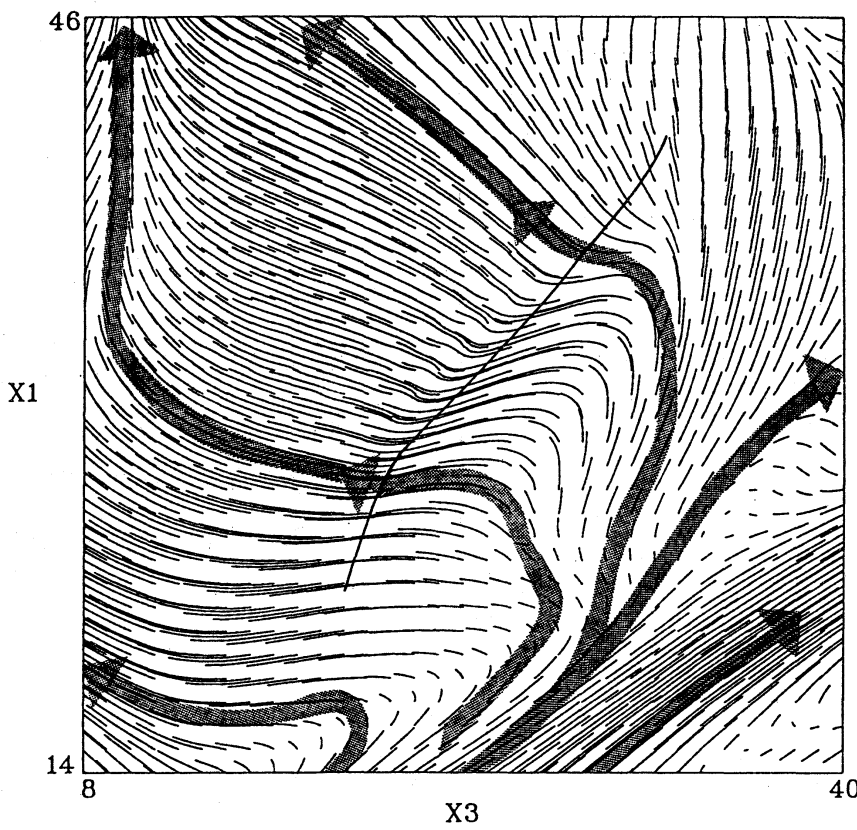


図 9. (b) 平面 B 上での渦度場。 $t = 30.8$.

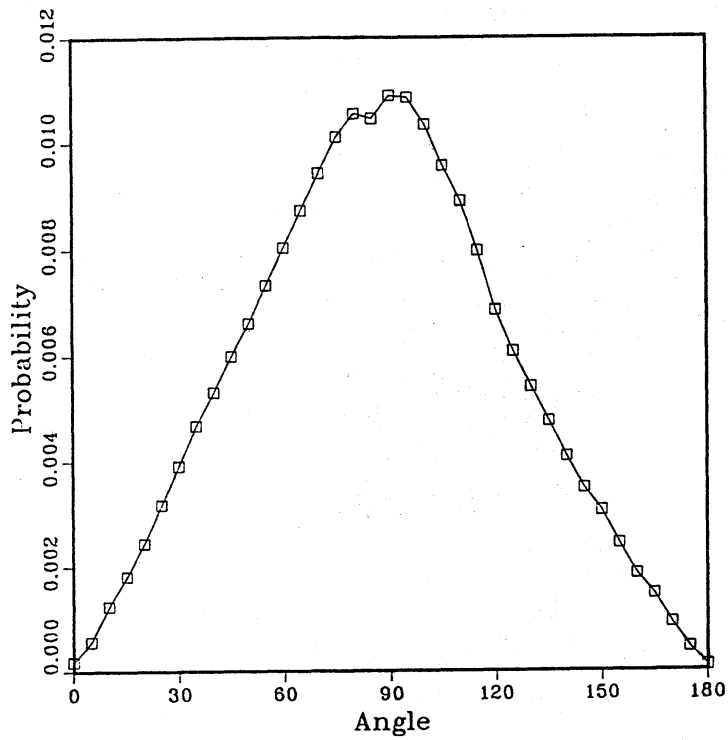


図 10. (a) 全空間にわたる渦度と密度勾配の間の角の確率分布。 $t = 30.8$.

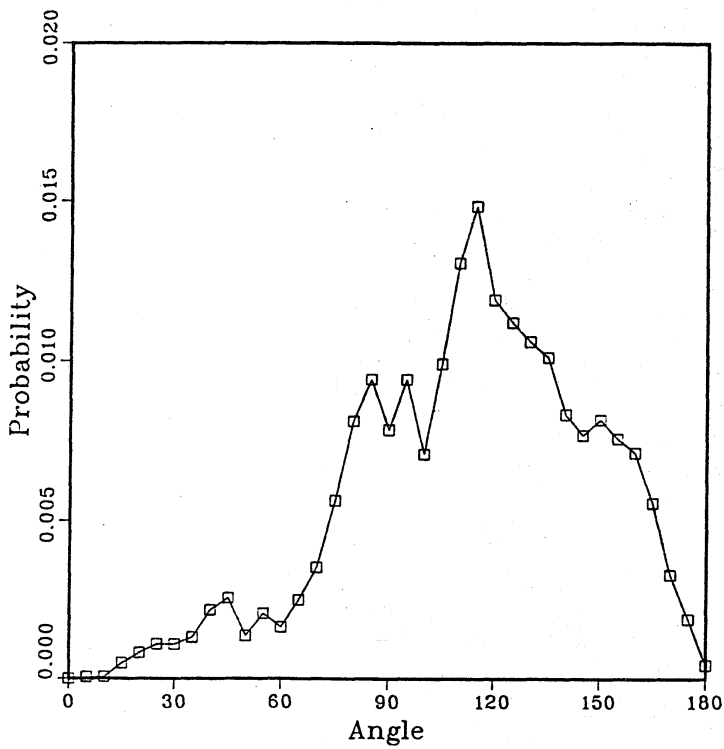


図 10. (b) 大負値発散領域 $\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$ における渦度と密度勾配の間の角の確率分布。 $t = 30.8$.

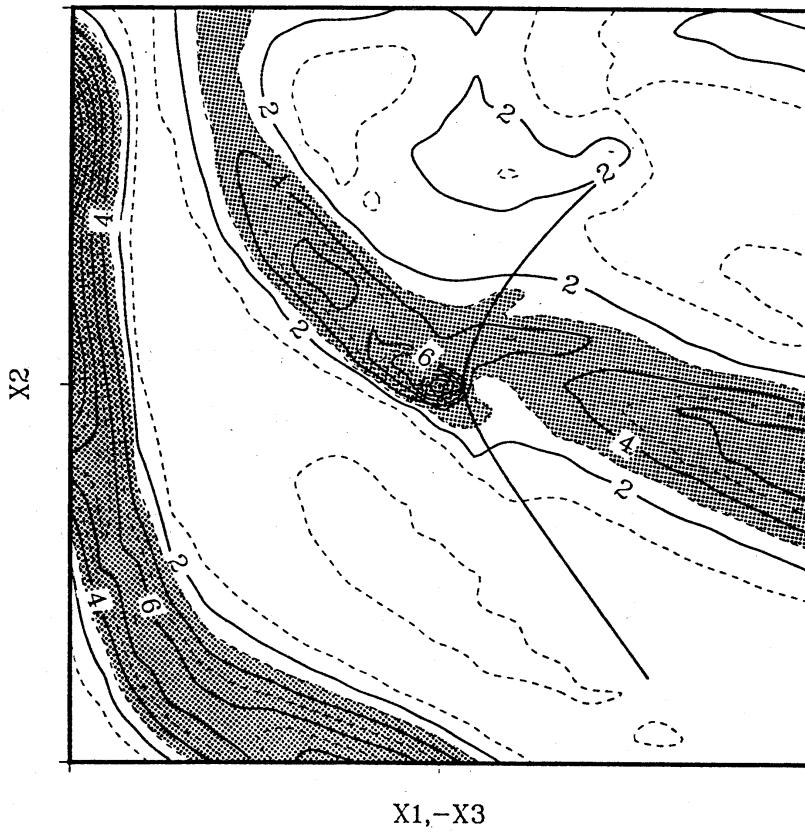


図 11. 平面 A 上でのエンストロフィ場。 $t = 30.8$.

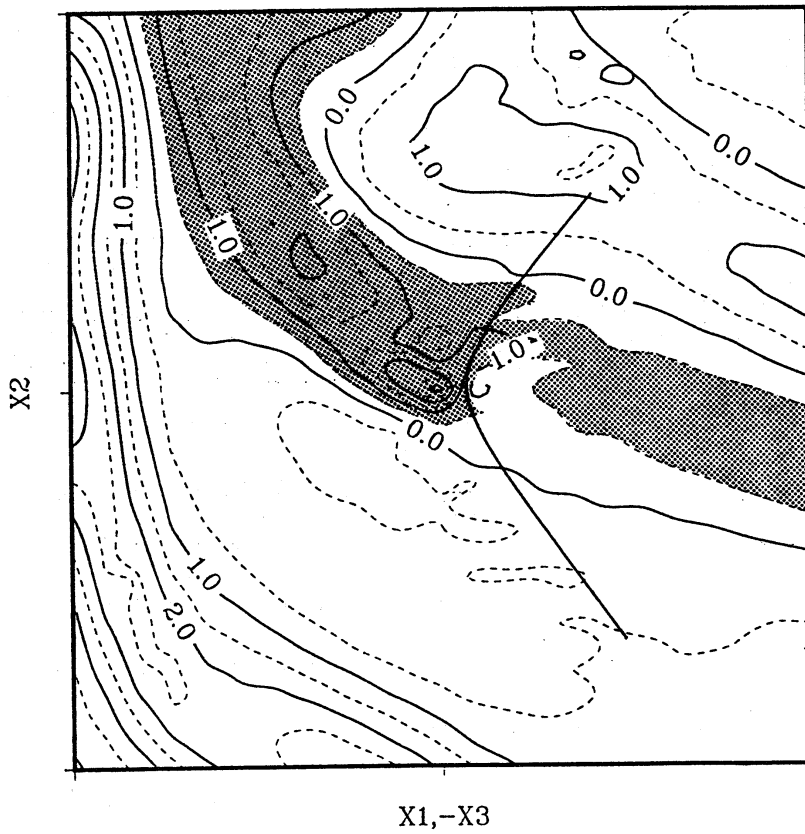


図 12. 平面 A 上での渦度の垂直成分。 $t = 30.8$.

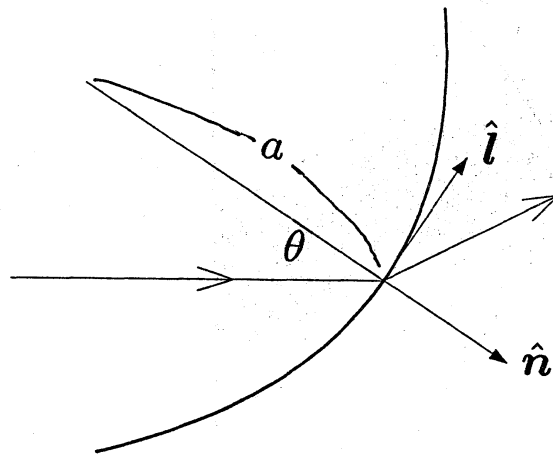


図 13. 曲衝撃波。\$\hat{l}\$ は単位接線ベクトル、\$\hat{n}\$ は単位法線ベクトル、\$a\$ は曲率半径、\$\theta\$ は衝撃波角である。

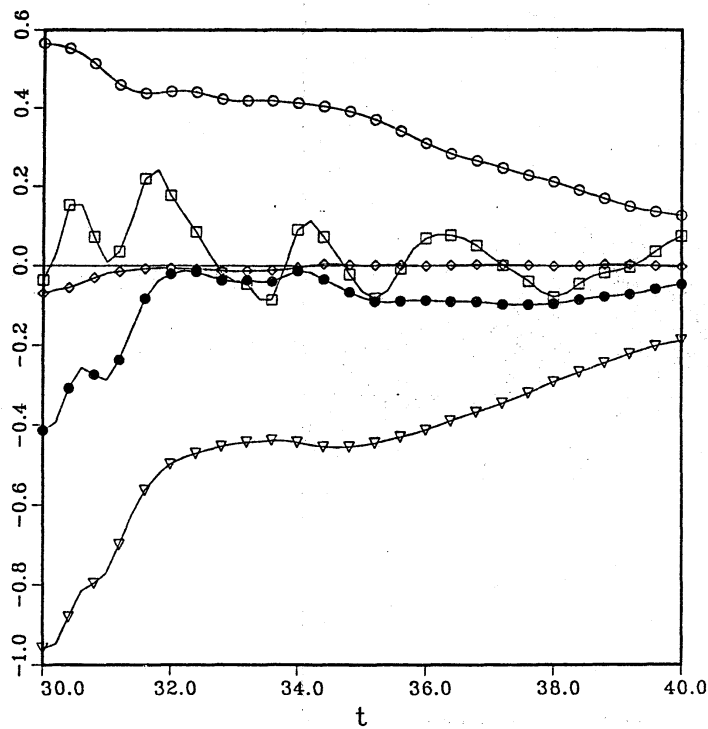


図 14. エンストロフィ収支における各項の平均値の時間変化。○は渦伸長項、□は圧縮項、無印は移流項、◇は傾圧項、▽は粘性項、●はこれらの項の和である。圧縮項と傾圧項は 5 倍してある。

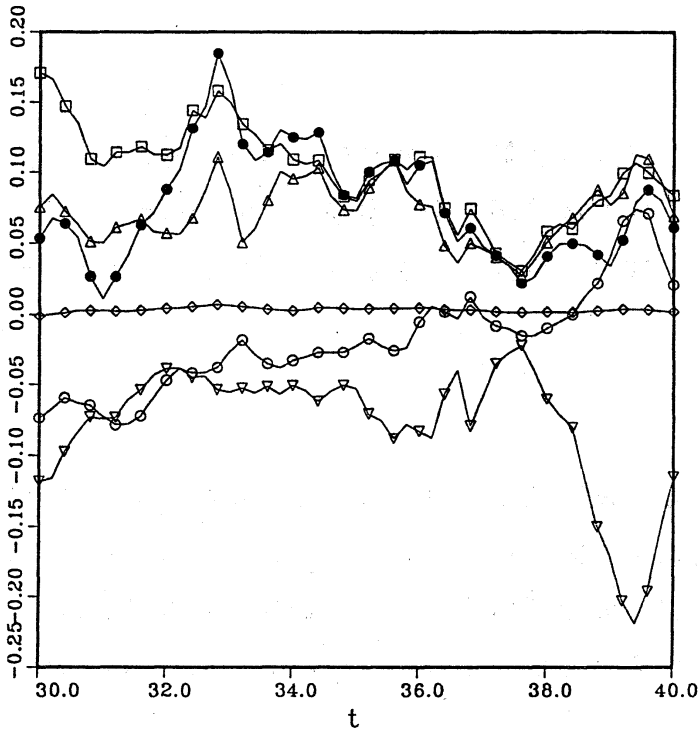


図 15. エンストロフィ収支における各項の平均値の時間変化。大負値発散領域 ($\Delta \leq -0.15 |\Delta_{\min}|$) で平均をとり粘性項の全空間に渡る平均値で規格化している。○は渦伸長項、□は圧縮項、△は移流項、◇は傾圧項、▽は粘性項、●はこれらの項の和である。

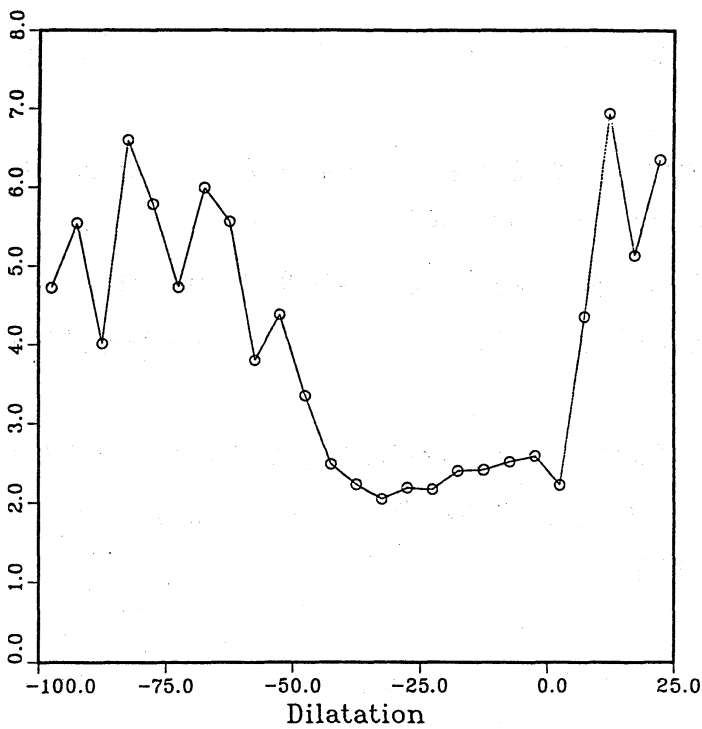


図 16. エンストロフィ分布と速度の発散の関係。 $t = 30.8$.