数理解析研究所講究録
第775巻 1992年 134-140

Quaternionic Manifolds

大阪大学 理学部 新田貴士

Abstract. 四元数 hyperbolic space $H^n\mathbb{H}$ と 四元数射影空間 $P^n\mathbb{H}$ 亦は $\mathbb{H}^n$ 上の quaternionic structure 全体の空間との関係を調べる。

序, 以下

$$G := Sp(1,n) = \left\{ A \in SL(n+1,\mathbb{H}) \;\middle|\; {}^t\bar{A}\begin{pmatrix}-1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}A = \begin{pmatrix}-1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix} \right\}$$

とする。 この話の出発点は 荒川氏の次の論文である.

Tsuneo Arakawa " On certain automorphic forms of $Sp(1,q)$".
彼はこの論文の中で次の事を論じている。

dg を $G=Sp(1,n)$ の Haar measure とし, $\Gamma(\subset G)$ を G の lattice で $\int_{\Gamma\backslash G} dg < +\infty$ なるものとする。 更に $\tilde{\rho}$ を $Sp(1)$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な表現

$$\tilde{\rho} : Sp(1) \xrightarrow{\sim} SU(2) \quad \text{on } \mathbb{C}^2$$

とし，$\tilde{\rho}^\nu$ を $\tilde{\rho}$ の symmetric ν-tensor 表現

$$\tilde{\rho}^\nu : Sp(1) \curvearrowright \text{ on } S^\nu(\mathbb{C}^2),$$

where S^ν: symmetric ν-tensor on $\mathbb{C}$.

とする。それを自然に $K := Sp(1) \times Sp(n)$ に引き上げたものを ρ^ν と書く．つまり $Sp(1)$-成分は $\tilde{\rho}^\nu$ で $Sp(n)$ の方は止めておく。Ω を G 上の Cassimir operator とするとき $\lambda : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ が決まり，

$$A_0(\Gamma\backslash G, \nu) := \{ f : G \longrightarrow S^\nu(\mathbb{C}^2) \mid \text{① } f(g) \text{ is bdd. on } G,$$
$$\text{② } f(\gamma g k) = \rho_\nu(k)^{-1} f(g) \text{ for } \gamma \in \Gamma,\ k \in K,\ g \in G,$$
$$\text{③ } \Omega f = \lambda(1 + \tfrac{\nu}{2}) f \quad \}$$

の次元を Trace formula という積分表示を用いて調べられる。

上の $A_0(\Gamma\backslash G, \nu)$ は幾何学的には次の空間と同値であることを満渕氏と共に調べた。

H^ν を G/K 上の vector 束で $G \times_{\rho_\nu} S^\nu(\mathbb{C}^2)$ とする。左から Γ で割ると H^ν は $\Gamma\backslash G/K = \Gamma\backslash H^n_{\mathbb{H}}$ 上の vector 束とも考えられ，その vector 束は G/K の Lie 環の分解から決まる接続を持ち，それは H^ν 上の Laplacian Δ を誘導する．

$\{\tilde{f} \in \mathcal{P}_{C^\infty}(\Gamma \backslash H^n\mathbb{H}, H^\nu) \mid \ , \tilde{f} : \text{bdd}, \quad \Delta\tilde{f} = \mu(\nu)\tilde{f}\}$

但し，$\mu(\nu)$ は ν のある関数である．A_0 と上の空間との対応は自然なものである．

そこで以下考えたい問題は次である．

"$H^n\mathbb{H}$ or $\Gamma \backslash H^n\mathbb{H}$ は何か幾何学的意味があるか？ 例えば何か幾何学的構造のモジュライ空間になっているとか．"

本論，

$P^n\mathbb{H}$ を quaternionic projective space とすると，それは $Sp(n+1)/Sp(1) \times Sp(n)$ なる対称空間の形で書けた。$Sp(n)$ の $\mathbb{C}^{2n}$ への自然な表現を

$$\rho_E : Sp(n) \hookrightarrow SU(2n) \text{ on } \mathbb{C}^{2n}$$

と書き，ρ_E で $Sp(n+1)/Sp(1) \times id$ に $\mathbb{C}^{2n}$ をはり合せた complex vector bundle を E と書くとき，[Ni] でその上のある種の Yang-Mills connection の moduli space は $SL(n+1)/Sp(n+1)$ になることを示した。調べたい $H^n\mathbb{H} = Sp(1,n)/Sp(1) \times Sp(n)$ は $SL(n+1)/Sp(n+1)$ に自然に totally geodesic sub mfd. として入っている．つまり $H^n\mathbb{H}$ の各元は E 上の Yang-Mills connection である条件を満たすものである．

そこでその条件を調べよう。 [Ni] の中の $SL(n+1, \mathbb{H})/Sp(n+1)$ と Yang-Mills connection との対応を見てみよう。

$A \in SL(n+1, \mathbb{H})$ に対して $P^n\mathbb{H}$ 上の quaternionic rank n の vector bundle E_A を

$$\begin{array}{ccccc} P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} \supset & E_A & \supset & (E_A)_{[h]} & \overset{\mathrm{def}}{=} \{ v \in \mathbb{H}^{n+1} \mid {}^t\bar{v}\, {}^t\bar{A} A h = 0 \} \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & P^n\mathbb{H} & \ni & [h] & \end{array}$$

と定義し, E_A 上の connection を $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$ の flat connection の制限 connection とする. 特に $A = id$ の時 $E_{id} = E$ となり E_A は E と C^∞ vector bundle として同型なので E_A の上で定義した connection を E に引き戻した connection を ∇_A とするとそれは Yang-Mills connection となり, A に対し ∇_A を対応させた。つまり U を quaternionic universal bundle:

$$\begin{array}{ccccc} P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} \supset & U & \supset & (U)_{[h]} & \overset{\mathrm{def}}{=} \{ v \in \mathbb{H}^{n+1} \mid v \in h \cdot \mathbb{H} \} \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & P^n\mathbb{H} & \ni & [h] & \end{array}$$

とすると, $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1} = U \oplus E_A$ だが, そこに A に依存する connection を入れた。 そこで E_A の条件から A を $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$ の bundle automorphism と考えると

$$U \oplus E_A \simeq A(U) \oplus A(E_A)$$

で. 右辺は

直交分解になっている。特に $A \in Sp(1,n)$ の時、bundle automorphism A で $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} = J$ なる quaternionic Hermitian structure は変らない。$h = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ の上で $(U)_{[h]}$ と $(E_A)_{[h]}$ は J でも直交している。更に $P^n\mathbb{H}$ の tangent bundle $TP^n\mathbb{H} = U^* \otimes_{\mathbb{H}} E$ でもある。U には自然な connection ∇_0 が $P^n\mathbb{H} \times \mathbb{H}^{n+1}$ の制限として入っているので、$(U, \nabla_0)^* \otimes_{\mathbb{H}} (E, \nabla_A)$ で $TP^n\mathbb{H}$ 上の connection が決る。

principal bundle の言葉でいうと、$TP^n\mathbb{H}$ の frame bundle を $Sp(n+1)$ とする時、$TP^n\mathbb{H}$ の connection は $id \in Sp(n+1)$ での Lie algebra の分解を $Sp(n+1)$ で回して広げたものである。

vertical 方向は $sp(1) \oplus sp(n) \hookrightarrow sp(n+1)$ の image で、horizontal 方向はそれの $sp(n+1)$ の中での直交補空間である。その時、$(U, \nabla_0)^* \otimes (E, \nabla_A)$ とは、standard な $sp(1) \oplus sp(n) \hookrightarrow \left(\begin{array}{c|c} sp(1) & 0 \\ \hline 0 & sp(n) \end{array}\right) \subset sp(n+1)$ なる埋め込みを $A x {}^t\bar{A}$ (for $x \in sp(n+1)$) で変化させたものに他ならない。その A に依存する $sp(1) \oplus sp(n)$ の埋め込みを f_A と書くと $A \in Sp(1,n)$ の時 $f_A(sp(1))$ と $f_A(sp(n))$ は

$J=\begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1\end{pmatrix}$ でもって直交している。この条件を(*)と書くと、$A \in Sp(1,n)$ の時、$(V,\nabla_0)^* \otimes (E,\nabla_A)$ は (*) を満す $TP^n\mathbb{H}$ 上の $Sp(1)\cdot GL(n,\mathbb{H})$-connection である。また逆も言える。まとめると、

$$H^n\mathbb{H} \cong \{ P^n\mathbb{H} \text{ 上の } Sp(1)\cdot GL(n,\mathbb{H})\text{-linear connection s.t. } (*) \}$$

となる。

また、$\Gamma' (\subset SL(n+1,\mathbb{H}))$: discrete subgroup とする時、Γ'の元は自然に $TP^n\mathbb{H}$ の bundle automorphism と考えられ それに応じて connection の moduli space $H^n\mathbb{H}$ 上の automorphism を対応させる。つまり、

$$\Gamma' \subset SL(n+1,\mathbb{H}) \rightsquigarrow \Gamma \subset Sp(1,n)$$

なる対応が定義される。この対応で

$$\underline{\Gamma \backslash H^n\mathbb{H}} \cong \{ \underline{\Gamma' \backslash P^n\mathbb{H}} \text{ 上の } Sp(1)\cdot GL(n,\mathbb{H})\text{-linear connection s.t. } (*) \}$$

となる。

注、なお、ここであつかった問題について満渕氏は別の解答を得ている。

reference

[Ar.] T. Arakawa ; On certain automorphic forms of $Sp(1, q)$, Taniguchi Symp., Katata '83, Birkhäuser '84

[Ni] T. Nitta ; Compactification of Moduli spaces of Einstein-Hermitian Connections for null-correlation bundles, Adv. Study 18.1. '90 397- 416