数理解析研究所講究録
第 777 巻 1992 年 139-146

尤度関数の因子分解と微分構造

大阪大学基礎工　熊谷 悦生　(Etsuo Kumagai)
大阪大学基礎工　稲垣 宣生　(Nobuo Inagaki)

§1. Introduction

B. Efron (1975) が次のことを 1 母数曲指数族に関して示した。;

$$\lim_{n\to\infty}\{ni_\theta - i_{\hat{\theta}_n}\} = i_\theta\gamma_\theta^2 \tag{1.1}$$

但し、i_θ は一個のデータに対する Fisher 情報量、γ_θ は統計的曲率である。

ここでは、情報量損失の極限をとる前の段階において、尤度関数の因数分解によって得られる具体的な表現を 1 母数曲指数族の場合について述べ、その幾何学的な考察に基づいて統計的曲率が必然的に導出されることを示す。

§2. 尤度関数の因数分解

$(\mathbf{R}^n, \mathbf{B}^n)$ を n 次元 Euclid 空間の Borel 可測空間、母数空間 Θ を k 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^k (k < n)$ の開集合とする。$\mathbf{B}^n$ 上の確率測度の族を $\Pi := \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ とし、Π はある $\sigma-$ finite measure μ によって支配されているとする。このとき、Halmos - Savage の定理により、ある確率測度 P_0 が存在して Π と同値である。(この P_0 を Pivotal Probability Measure と呼ぶ。) すなわち、$\Pi \sim P_0$.

P_0 に関する P_θ の Radon-Nikodym Derivative を

$$\frac{dP_\theta}{dP_0} = f(x,\theta), \qquad \theta \in \Theta$$

と表わす。

分布 P_θ を持つ観測 X に対して、$T = T(X)$ を $\mathbf{R}^n$ から Θ への可測関数である θ の推定量とすると、T によって誘導された $(\mathbf{R}^k, \mathbf{B}^k)$ 上の測度に対して

$$P_\theta^T \ll P_0^T$$

が成立つ。よって、

$$\frac{dP_\theta^T}{dP_0^T} = g(t,\theta), \qquad \theta \in \Theta$$

が存在する。この $g(t,\theta)$ は T の周辺尤度関数とみなされる。
$g(T(x),\theta)$ の support を

$$S_g(\theta) := \{x \mid g(T(x),\theta) > 0\}$$

とおくと、$S_g(\theta) \in T^{-1}(\mathbf{B}^k)$ より

$$P_\theta\{S_g^c(\theta)\} = \int_{S_g^c(\theta)} f(x,\theta)P_0(dx) = \int_{S_g^c(\theta)} g(T(x),\theta)P_0(dx) = 0,$$

であるから、次の定理が成立つ。

Theorem 2.1 (N. Inagaki, 1983)

$$(2.1) \qquad h(x,\theta \mid t) := \begin{cases} f(x,\theta)/g(t,\theta) & \text{if } T(x) = t \text{ and } g(t,\theta) > 0 \\ 1 & \text{if } T(x) = t \text{ and } g(t,\theta) = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくとき、

$$(2.2) \qquad f(X,\theta) = g(T,\theta)h(X,\theta \mid T), \qquad a.s.\ [P_\theta]. \quad \blacksquare$$

これを尤度関数の因子分解と呼ぶことにする。T が十分統計量である時、この分解はよく知られた十分統計量による因子分解となる。

(*Remark*)
ここでの因子分解を可能にしているのは、 dominating measure として Pivotal Probability Measure P_0 を選択しているからである。通常の σ- finite measure では一般に成り立たない。その成立たない例は、 Pitman (1979) にある。

§3. 曲指数族における情報量損失

§2 で論じた因子分解を（1 母数曲）指数族に適用して情報量損失を導くことにする。
まず、一般の指数族は次のような density である；

$$p(x \mid \alpha) = \exp\{\alpha' s - \psi(\alpha)\}p_0(x),$$

但し、$p_0(x) := p(x \mid 0)$; (Pivotal Probability Measure), $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)'$, $s := (s_1(x), \ldots, s_r(x))'$, $e^{\psi(\alpha)} := E_0[\exp\{\alpha' s\}]$.

この時、

$$\frac{\partial\psi(\alpha)}{\partial\alpha} = E_\alpha(s) =: \beta, \qquad \frac{\partial^2\psi(\alpha)}{\partial\alpha\partial\alpha'} = \frac{\partial\beta'}{\partial\alpha} =: \Sigma_\alpha$$

である期待値 β 、共分散行列 Σ_α を得る。

次に、1 母数曲指数族を考える。これの density は、

$$\begin{aligned} f(x,\theta) &:= p(x \mid \alpha(\theta)) \\ &= \exp\{\alpha(\theta)'s - \psi(\alpha(\theta))\}p_0(x) \end{aligned}$$

となり、joint density は、

$$f_n(\mathbf{x},\theta) = \exp[n\{\alpha(\theta)'\bar{s}_n - \psi(\alpha(\theta))\}]p_{n0}(\mathbf{x}),$$

但し、$\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)'$, $\bar{s}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s(x_i)$, となる。この対数尤度関数は、

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_n(\theta) &:= \log f_n(\mathbf{x},\theta) \\ &= n\{\alpha(\theta)'\bar{s}_n - \psi(\alpha(\theta))\} + \log p_{n0}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

であるから、推定尤度方程式は

$$\dot{\mathbf{l}}_n(\theta) = n\dot{\alpha}(\theta)'\{\bar{s}_n - \beta(\theta)\} = 0$$

である。この解を $\hat{\theta}_n$ (MLE) とおく。すなわち、

$$\dot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\{\bar{s}_n - \beta(\hat{\theta}_n)\} = 0.$$

ここで、次のことに注意する;

$$\text{(3.1)} \qquad \left\{\begin{array}{c} \dot{\beta}(\theta) = \dfrac{\partial\beta(\theta)}{\partial\theta} = \dfrac{\partial\beta(\theta)}{\partial\alpha(\theta)}\dfrac{\partial\alpha(\theta)}{\partial\theta} = \Sigma_\theta\dot{\alpha}(\theta), \\ i_\theta = \dot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\dot{\alpha}(\theta) = \dot{\beta}(\theta)'\Sigma_\theta^{-1}\dot{\beta}(\theta), \\ \dot{\alpha}(\theta)'\beta(\theta) = \dfrac{\partial\psi(\alpha(\theta))}{\partial\theta}. \end{array}\right\}$$

$\hat{\Sigma}_n := \Sigma(\hat{\theta}_n) = \Sigma_{\hat{\theta}_n}$ と定義しておいて、$\hat{\theta}_n$ に対する次の標準化を行なう。

$$\text{(3.2)} \qquad \left\{\begin{array}{c} \hat{D}_n := \hat{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}}\dot{\beta}(\hat{\theta}_n), \\ \hat{S}_n := \sqrt{n}\hat{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}}\{\bar{s}_n - \beta(\hat{\theta}_n)\} \end{array}\right\}$$

とおくと、尤度方程式は

$$\hat{D}'_n\hat{S}_n = 0$$

と表される。

$$\hat{P}_n = \hat{D}_n[\hat{D}'_n\hat{D}_n]^{-1}\hat{D}'_n$$

なる射影行列を考えると、 $\hat{D}'_n\hat{S}_n = 0$ より $\hat{P}_n\hat{S}_n = 0$ であるから、

$$\hat{S}_n = (I - \hat{P}_n)\hat{S}_n$$

である。ここで、後の為に記号を用意しておく;

$$D(\theta) := \Sigma_\theta^{-\frac{1}{2}}\dot{\beta}(\theta), \quad P(\theta) := D(\theta)[D(\theta)'D(\theta)]^{-1}D(\theta)'.$$

以上の記号を使い、$\mathbf{i}_n(\theta)$ を次のように分解する;

$$\begin{aligned}\mathbf{i}_n(\theta) &= n\dot{\alpha}(\theta)'\{\bar{s}_n - \beta(\theta)\} \\ &= n\dot{\alpha}(\theta)'\{\beta(\hat{\theta}_n) - \beta(\theta)\} + n\dot{\alpha}(\theta)'\{\bar{s}_n - \beta(\hat{\theta}_n)\} \\ &= n\dot{\alpha}(\theta)'\{\beta(\hat{\theta}_n) - \beta(\theta)\} + \sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I - \hat{P}_n)\hat{S}_n.\end{aligned} \tag{3.3}$$

ところで、尤度関数の因子分解によって、$\theta \neq \tau$ とし

$$\begin{cases} f_n(\mathbf{x}, \tau) = g_n(\hat{\theta}_n, \tau)h_n(\mathbf{x}, \tau \mid \hat{\theta}_n), & a.s.\ [P_\tau] \\ f_n(\mathbf{x}, \theta) = g_n(\hat{\theta}_n, \theta)h_n(\mathbf{x}, \theta \mid \hat{\theta}_n), & a.s.\ [P_\theta] \end{cases}$$

を考える。あえて、$\beta(\hat{\theta}_n)$ を f_n に導入した形で表すと、

$$\begin{cases} f_n(\mathbf{x}, \tau) = \exp\{n\alpha(\tau)'\beta(\hat{\theta}_n) - n\psi(\alpha(\tau))\}\exp\{n\alpha(\tau)'(\bar{s}_n - \beta(\hat{\theta}_n))\}p_{n0}(\mathbf{x}) \\ f_n(\mathbf{x}, \theta) = \exp\{n\alpha(\theta)'\beta(\hat{\theta}_n) - n\psi(\alpha(\theta))\}\exp\{n\alpha(\theta)'(\bar{s}_n - \beta(\hat{\theta}_n))\}p_{n0}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

よって、

$$\begin{aligned}\frac{f_n(\mathbf{x}, \tau)}{f_n(\mathbf{x}, \theta)} &= \exp[n\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\beta(\hat{\theta}_n) - n\{\psi(\alpha(\tau)) - \psi(\alpha(\theta))\}] \\ &\quad \times \exp[\sqrt{n}\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I - \hat{P}_n)\hat{S}_n].\end{aligned}$$

同様にして、

$$\begin{aligned}\frac{g_n(\hat{\theta}_n, \tau)}{g_n(\hat{\theta}_n, \theta)} &= \exp[n\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\beta(\hat{\theta}_n) - n\{\psi(\alpha(\tau)) - \psi(\alpha(\theta))\}] \\ &\quad \times E_\theta[\exp[\sqrt{n}\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I - \hat{P}_n)\hat{S}_n] \mid \hat{\theta}_n],\end{aligned}$$

$$\frac{h_n(\mathbf{x}, \tau \mid \hat{\theta}_n)}{h_n(\mathbf{x}, \theta \mid \hat{\theta}_n)} = \frac{\exp[\sqrt{n}\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I - \hat{P}_n)\hat{S}_n]}{E_\theta[\exp[\sqrt{n}\{\alpha(\tau) - \alpha(\theta)\}'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I - \hat{P}_n)\hat{S}_n] \mid \hat{\theta}_n]}.$$

故に、この差分の形から、

$$\lim_{\tau\to\theta}\frac{\log f_n(\mathbf{x},\tau)-\log f_n(\mathbf{x},\theta)}{\tau-\theta}$$
$$=n\dot{\alpha}(\theta)'\{\beta(\hat{\theta}_n)-\beta(\theta)\}+\sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n,$$

$$\lim_{\tau\to\theta}\frac{\log g_n(\hat{\theta}_n,\tau)-\log g_n(\hat{\theta}_n,\theta)}{\tau-\theta}$$
$$=n\dot{\alpha}(\theta)'\{\beta(\hat{\theta}_n)-\beta(\theta)\}+\sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n],$$

$$\lim_{\tau\to\theta}\frac{\log h_n(\mathbf{x},\tau\mid\hat{\theta}_n)-\log h_n(\mathbf{x},\theta\mid\hat{\theta}_n)}{\tau-\theta}$$
$$=\sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n-E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]\}.$$

すなわち、

$$\frac{\partial\log f_n(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial\log g_n(\hat{\theta}_n,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial\log h_n(\mathbf{x},\theta\mid\hat{\theta}_n)}{\partial\theta}.$$

よって、

$$(3.4)\qquad\left\{\begin{array}{rl} ni_\theta :=& E_\theta\{\dfrac{\partial\log f_n(\mathbf{x},\theta)}{\partial\theta}\}^2\\ i_{\hat{\theta}_n} :=& E_\theta\{\dfrac{\partial\log g_n(\hat{\theta}_n,\theta)}{\partial\theta}\}^2\\ I_{h_n} :=& E_\theta\{\dfrac{\partial\log h_n(\mathbf{x},\theta\mid\hat{\theta}_n)}{\partial\theta}\}^2\end{array}\right)$$

と定義すると、$ni_\theta-i_{\hat{\theta}_n}=I_{h_n}$ となる。

I_{h_n} の極限を求めよう。

$$I_{h_n}=E_\theta\left[\sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n-E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]\}\right]^2$$

その際、次の Lemma が有益である。

Lemma 3.1 (N. Inagaki, 1985)

$0<V_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]<\infty$ とすると次のことが成立つ；

(1) $$\lim_{n\to\infty}E_\theta\mid(I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]\mid^2=0$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}E_\theta\mid V_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]-(I-P(\theta))\mid^2=0.\ \blacksquare$$

この Lemma を適用することで次の Proposition を得る。

Proposition 3.1

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta[(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\}\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\}'(I-\hat{P}_n)'] = I - P(\theta). \quad \blacksquare$$

更に、射影行列 $\{ I - \hat{P}_n \}$ によって射影されたものは、$\hat{D}_n$ と直交することから、

$$\sqrt{n}\dot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\} = 0.$$

故に、

$$\begin{aligned}
&\sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\} \\
=&\sqrt{n}\{\dot{\alpha}(\theta) - \dot{\alpha}(\hat{\theta}_n)\}'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\} \\
=&-\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)\ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\},
\end{aligned}$$

但し、$\mid \tilde{\theta}_n - \theta \mid \leq \mid \hat{\theta}_n - \theta \mid$ である。

Proposition 3.2

$\forall \eta \in D_n := \{\eta \mid \mid \eta - \theta \mid \leq \mid \hat{\theta}_n - \theta \mid, \quad \eta \in \Theta\}$ に対して、ある $M \quad (0 < M < \infty)$ が存在して、$\mid \ddot{\alpha}(\eta)'\hat{\Sigma}_n\ddot{\alpha}(\eta) \mid \leq M$ を満たすならば、

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \mid^2 = 0. \quad \blacksquare$$

以上のことから、

$$\begin{aligned}
(3.5) \qquad & E_\theta \mid \frac{\partial \log h_n(\mathbf{x}, \theta \mid \hat{\theta}_n)}{\partial \theta} \mid^2 \\
=& E_\theta \mid \sqrt{n}\dot{\alpha}(\theta)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\} \mid^2 \\
=& E_\theta \mid \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)\ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}}(I-\hat{P}_n)\{\hat{S}_n - E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\} \mid^2 \\
=& \frac{1}{i_\theta}\{\ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}(I - P(\theta))\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta)\} + o(1).
\end{aligned}$$

最後に、$P(\theta)$ は $\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta)$ への射影でもあるから、

$$\begin{aligned}
P(\theta)\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta) &= \mid \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta) \mid \frac{< \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta), \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta) >}{\mid \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta) \mid\mid \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta) \mid} \frac{\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta)}{\mid \Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta) \mid} \\
&= \frac{\dot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta)}{i_\theta}\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\dot{\alpha}(\theta).
\end{aligned}$$

よって、

$$\ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}(I-P(\theta))\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}}\ddot{\alpha}(\theta)=\ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta)-\frac{(\dot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta))^2}{i_\theta}.$$

まとめると、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} I_{h_n} &= \frac{1}{i_\theta}[\ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta)-\frac{(\dot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta))^2}{i_\theta}] \\ &= i_\theta\gamma_\theta^2,\end{aligned} \tag{3.6}$$

但し、

$$\gamma_\theta^2=\frac{\ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta)}{i_\theta^2}-\frac{(\dot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta\ddot{\alpha}(\theta))^2}{i_\theta^3}.$$

となる。この時の γ_θ が、Efron の統計的曲率と言われるものである。

§ APPENDIX

次の Lemma は、L_r- 収束定理 (see *Loève*) と呼ばれるものである；

Lemma A

$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ と X が L_r 空間に属する時、次の 2 つの条件は同値である；

(1) $$\|X_n-X\|_r\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

(2) $$\|X_n\|_r\to\|X\|_r\ (n\to\infty) \quad \wedge \quad X_n\to_p X \ ∎$$

Proof of Proposition 3.1 :

まず、$\hat{S}_n=\hat{\Sigma}_n^{-\frac{1}{2}}\sqrt{n}(\bar{s}_n-\beta(\hat{\theta}_n))$ より

$$\hat{S}_n\to_d N_r(0,I)$$

は明らか。$(I-\hat{P}_n)\to_p(I-P(\theta))$ となることによって

$$(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\to_d N_r(0,I-P(\theta)).$$

次に、$(I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]$ を考える。Lemma 3.1 によって、

$$\begin{aligned}&E_{\hat{\theta}_n}[(I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]E_\theta[\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]'(I-\hat{P}_n)'] \\ =&E_{\hat{\theta}_n}\{E_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]E_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]'\} \\ =&V_{\hat{\theta}_n}\{E_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]\}+o(1) \\ =&V_\theta\{(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\}-E_{\hat{\theta}_n}\{V_\theta[(I-\hat{P}_n)\hat{S}_n\mid\hat{\theta}_n]\}+o(1)\to 0\end{aligned}$$

残りの Cross-Term は、Schwartz の不等式により、

$$\begin{aligned}
&E_\theta[(I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n]\hat{S}_n'(I-\hat{P}_n)']\\
&\leq\{E_\theta \mid (I-\hat{P}_n)E_\theta[\hat{S}_n \mid \hat{\theta}_n] \mid^2\}^{\frac{1}{2}}\{E_\theta \mid (I-\hat{P}_n)\hat{S}_n \mid^2\}^{\frac{1}{2}} \to 0.
\end{aligned}$$

以上で求める結果を得る。 ∎

Proof of Proposition 3.2 :
仮定から Lebesgue の有界収束定理が使え、 Lemma A を適用することによって

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2 = 0$$

が成立ち、同様にして

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2 = 0$$

も成立つ。故に、

$$\begin{aligned}
&E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \mid^2\\
&=E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} + \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} \mid^2\\
&\leq E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2 + E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2\\
&\quad + 2\left[E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\hat{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[E_\theta \mid \ddot{\alpha}(\tilde{\theta}_n)'\hat{\Sigma}_n^{\frac{1}{2}} - \ddot{\alpha}(\theta)'\Sigma_\theta^{\frac{1}{2}} \mid^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}$$ ∎

References

B. EFRON, *Defining the Curvature of a Statistical Problem (with Applications to Second Order Efficiency)*, Ann. Statist. **3** (1975), 1189–1242.

N. INAGAKI, *The Decomposition of the Fisher Information*, Ann. Inst. Statist. Math. **35** (1983), 151–165.

N. INAGAKI, *The Asymptotic Distribution of a Conditional Likelihood Ratio Function Given a Maximum Likelihood Estimator*, in "Statistical Theory and Data Analysis (ed. K. Matusita)," North–Holland, 1985, pp. 269–290.

M. LOEVE, "Probability Thory," 4th ed., Splinger-Verlag, New York, 1978.

E. J. G. PITMAN, "Some Basic Theory for Statistical Inference," Chapman and Hall, London, 1979.