数理解析研究所講究録
第 778 巻 1992 年 42-49

Fock space representations of twisted affine Lie algebras

東北大学理学部数学教室　黒木　玄　(Gen Kuroki)

0. 序論

Affine Lie algebra の Fock space representations は、最初に、N. Wakimoto [W] によって $\mathfrak{g}(A_1^{(1)})$ の場合が構成された。この表現の面白い応用の一つは、P. Christe と R. Flüme による [CF] における $\mathfrak{g} = sl_2$ に対する Knizhnik-Zamolodchikov equations (以下、KZ eqations と略) の解の積分表示式の構成であろう。Fock space representations の立場から見ると、A. V. Marshakov [Mar] が構成した screening operator を用いることによって、[CF] の結果の一般化が全て機械的に得られるのである。さらには、B. Feigin と E. Frenkel による一連のすばらしい研究 [FeFr1,2] によって、任意の non-twisted affine Lie algebra の Fock space representations および screening operators の構成の仕方が明らかにされた。Kuroki [Kur] においては、任意の non-twisted affine Lie algebra に対する screening operators を構成することによって、KZ equations に対する積分表示式の証明が得られている。この論説では、twisted の場合も含めた任意の affine Lie algebra の Fock space representations の構成について解説する。

1. 諸定義と記号の準備

1.1. $\mathfrak{g}$ は $\mathbb{C}$ 上の simple Lie algebra であるとし、$\mathfrak{g}$ の三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ を固定する。ここで、$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan subalgebra であり、$\mathfrak{n}_\pm$ は $\mathfrak{g}$ の maximal nilpotent subalgebras である。σ は finite order N を持つ $\mathfrak{g}$ の diagram automorphism であるとする。N は 1, 2, 3 のいずれかになる。σ に関する $\mathfrak{g}$ の固有空間分解を $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathfrak{g}_i$ と書く。ここで、

$$\mathfrak{g}_i := \{X \in \mathfrak{g} \mid \sigma(X) = \exp(\tfrac{2\pi\sqrt{-1}}{N} i) X\} \quad \text{for } i \in \mathbb{Z}$$

とおいた。$\mathfrak{g}$ の任意の subspace V に対して、$V_i := V \cap \mathfrak{g}_i$ とおく。例えば、$\mathfrak{n}_{\pm,i} = \mathfrak{n}_\pm \cap \mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_i$ である。このとき、$\mathfrak{g}_0$ は simple Lie algebra になり、$\mathfrak{h}_0$ は $\mathfrak{g}_0$ の Cartan subalgebra になることが知られている。対 $(\mathfrak{g}, \sigma)$ に付随する affine Lie algebra $\widehat{\mathfrak{g}}$ を定義しよう。$N = 1$ のとき non-twisted affine Lie algebra と呼び、$N = 2, 3$ のとき twisted affine Lie algebra と呼ぶ。$K_i := t^{i/N}\mathbb{C}[t, t^{-1}]$ とおく。Loop algebra $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t^{1/N}, t^{-1/N}]$ の subalgebra $L\mathfrak{g}$ を次のように定める:

$$L\mathfrak{g} := \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathfrak{g}_i \otimes K_i.$$

より一般に、σ で保たれる $\mathfrak{g}$ の subalgebra $\mathfrak{a}$ に対して、$L\mathfrak{g}$ の subalgebra $L\mathfrak{a}$ を $L\mathfrak{a} := \bigoplus_{i=0}^{N-1} \mathfrak{a}_i \otimes K_i$ と定める。$\widehat{\mathfrak{g}}$ は $L\mathfrak{g}$ に derivation $d = t\frac{d}{dt}$ を付け加えて中心拡大したものとして定義される。すなわち、vector space として $\widehat{\mathfrak{g}}$ は、

$$\widehat{\mathfrak{g}} := L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$$

と定義され、Lie algebra structure は以下によって定義される:

$$\begin{aligned}
&[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] := [X, Y] \otimes t^{m+n} + (X|Y) m \delta_{m+n,0} K, \\
&[d, X \otimes t^m] = m X \otimes t^m, \\
&K \in \text{center of } \widehat{\mathfrak{g}}.
\end{aligned}$$

ここで、$(.|.)$ は次によって定められた $\mathfrak{g}$ の non-degenerate invariant symmetric bilinear form であるとする:

$$\mathrm{trace}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}\,X\,\mathrm{ad}\,Y) = 2g^*(X|Y) \quad \text{for } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

ただし、g^* は $\mathfrak{g}$ の dual Coxeter number である。このとき、V. G. Kac の教科書 [Kac] などで知られているように、$\mathfrak{g}$ を X_r 型の simple Lie algebra としたとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ は $\mathrm{X}_r^{(N)}$ 型の Kac-Moody Lie algebra に同型になる。この論説の目標は、boson による $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Fock space representations を構成することである。

1.2. $\mathfrak{b}_- := \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h}$ とおく。$\mathfrak{b}_-$ は $\mathfrak{g}$ の Borel subalgebra である。G は Lie algebra $\mathfrak{g}$ を持つ connected and simply connected な algebraic Lie group であるとし、B_-, U_+ はそれぞれ $\mathfrak{b}_-$, $\mathfrak{n}_+$ に対応する G の Lie subgroups であるとする。$\mathfrak{g}$ の flag variety F を $F := B_-\backslash G$ と定め、F の原点 o を $o := B_- \bmod B_-$ と定める。このとき、oU_+ は F の Zariski open cell になり、right U_+-space として U_+ と同型になる。さらに、U_+ は exponential map を通じて、$\mathfrak{n}_+$ と algebraic variety として同型になる。λ は $\mathfrak{h}$ の dual space の要素とし、λ を $\mathfrak{b}_-$ 上に trivial に拡張しておく。すなわち、λ は $\mathfrak{b}_-$ の Lie algebra character であるとする。B_-U_+ の structure ring $\mathbb{C}[B_-U_+]$ に対する $\mathfrak{g}$ の作用 L, R を次のように定義する:

$$(L(X)f)(g) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(\exp(-sX)g)$$
$$(R(X)f)(g) := \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} f(g\exp(sX)) \quad \text{for } g \in B_-U_+ \text{ and } X \in \mathfrak{g}.$$

この準備のもとで、M_λ^* を

$$M_\lambda^* := \{f \in \mathbb{C}[B_-U_+] \mid L(Y)f = -\lambda(Y)f \text{ for } Y \in \mathfrak{b}_-\}$$

と定めると、$X \in \mathfrak{g}$ に対して $R(X)$ は M_λ^* に作用し、その作用によって M_λ^* は left $\mathfrak{g}$-module をなす。$\mathfrak{g}$ の M_λ^* への作用を R_λ と書くことにする。M_λ^* に属す函数で U_+ 上一定の値 1 をとるものを v_λ と書くと、v_λ は weight λ の highest weight vector になる。さらに、定義より、M_λ^* は v_λ から生成される free $\mathbb{C}[oU_+]$-module をなすことがわかる。(実は M_λ^* は lowest weight Verma module の dual に同型になることが簡単に示せる。) したがって、$X \in \mathfrak{g}$ に対して $R_\lambda(X)$ は、$\mathbb{C}[oU_+]$ ($\simeq \mathbb{C}[\mathfrak{n}_+]$ これは多項式環に同型) に作用する多項式係数の 1 階の微分作用素とみなすことができる。$\widehat{\mathfrak{g}}$ の Fock space representations は $R_\lambda(X)$ の微分作用素としての表示を用いて構成される。

1.3. 任意の $\alpha \in \mathfrak{h}_0^*$ に対して、$\mathfrak{n}_{+,i,\alpha} := \{X \in \mathfrak{n}_{+.i,\alpha} \mid [H, X] = \alpha(H)X \text{ for } H \in \mathfrak{h}_0\}$ とおき、$\Delta_{+,i} := \{\alpha \in \mathfrak{h}_0^* \mid \mathfrak{n}_{+,i,\alpha} \neq 0\}$ とおく。このとき、$\alpha \in \Delta_{+,i}$ に対して $\dim \mathfrak{n}_{+,i,\alpha} = 1$ となることが知られているので、$\mathfrak{n}_{+,i,\alpha} = \mathbb{C}e_{i,\alpha}$ と書いて良い。このとき、$\{e_{i,\alpha} \mid i = 0, \cdots, N-1 \text{ and } \alpha \in \Delta_{+,i}\}$ は $\mathfrak{n}_+$ の basis をなす。この basis によって $\mathfrak{n}_+$ に座標系 $\{x_{i,\alpha}\}$ を

$$X = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\alpha \in \Delta_{+,i}} x_{i,\alpha}(X)e_{i,\alpha} \quad \text{for } X \in \mathfrak{n}_+$$

によって定める。同型 $oU_+ \cong U_+ \cong \mathfrak{n}_+$ によって、oU_+ に座標系 $\{x_{i,\alpha}\}$ が入る。この座標系のもとで、$X \in \mathfrak{g}$ に対して、$R_\lambda(X)$ は次の様に表わされる:

$$R_\lambda(X) = \sum_{i,\alpha} R_{i,\alpha}(X;x)\frac{\partial}{\partial x_{i,\alpha}} + \sum_{i,a} \rho_{i,a}(X;x)\lambda(H_{i,a}).$$

ただし、$\{H_{i,a} \mid a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}_i\}$ は $\mathfrak{h}_i$ の basis であり、$\sum_{i,\alpha}$, $\sum_{i,a}$ は、それぞれ、$\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{\alpha\in\Delta_{+,i}}$, $\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}_i}$ の略記号である。そして、$R(X,x)_{i,\alpha}$, $\rho(X;x)_{i,a}$ は、λ によらない $x = \{x_{i,\alpha}\}$ の多項式になる。

2. ボゾンとそのフォック表現

2.1. 以下において、$\kappa \in \mathbb{C}$ を固定して話を進める。$\kappa = 0$ の場合が level $-g^*$ ($=$ $-$dual Coxeter number) の場合に対応する。$\mathbb{C}$ 上の associative algebra $\mathcal{A}$ を以下の条件によって定める:

(1) $\mathcal{A}$ は次の集合から生成される:

$$\begin{aligned} A := \{&x_{i,\alpha}[-m], \delta_{i,\alpha}[m], p_{i,a}[m] \mid \\ &i = 0, \cdots, N,\ \alpha \in \Delta_{+,i},\ a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}_i,\ m \in \mathbb{Z} + \tfrac{i}{N}\}. \end{aligned}$$

(2) $\mathcal{A}$ は A から生成される tensor algebra を以下の commutation relataions で割ったものに等しい:

$$\begin{aligned} [\delta_{i,\alpha}[m], x_{j,\beta}[n]] &= \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\beta}\delta_{m+n,0}, \\ [p_{i,a}[m], p_{j,b}[n]] &= \kappa(H_{i,a}|H_{j,b})m\delta_{m+n,0}, \\ (\text{他の組み合わせの commutator}) &= 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{O}$ によって、$x_{i,\alpha}[m]$ の全体から生成される $\mathcal{A}$ の subalgebra を表わす。

Remark. $\kappa \neq 0$ のとき $\mathcal{A}$ の center は $\{p_{0,a}[0] \mid a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}_0\}$ から生成されるが、$\kappa = 0$ のときは $\mathcal{A}$ の center は大きくなって $p_{i,a}[m]$ の全体から生成される。

2.2. $\mathcal{A}$ の三角分解を定義しよう。A の subsets $A_\pm$, A_0 を次のように定める:

$$\begin{aligned} A_+ &:= \{x_{i,\alpha}[m], \delta_{i,\alpha}[n], p_{i,a}[m] \in \mathcal{A} \mid m > 0, n \geq 0\}, \\ A_- &:= \{x_{i,\alpha}[m], \delta_{i,\alpha}[n], p_{i,a}[n] \in \mathcal{A} \mid m \leq 0, n < 0\}, \\ A_0 &:= \{p_{0,a}[0] \mid a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}_0\}. \end{aligned}$$

$A_\pm$, A_0 から生成される $\mathcal{A}$ の subalgebras をそれぞれ $\mathcal{A}_\pm$, $\mathcal{A}_0$ と書く。これらは、それぞれ $A_\pm$, A_0 から生成される多項式環に同型であるから、$\mathcal{A}_- \otimes \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_+$ は、A から生成される多項式環 $\mathbb{C}[A]$ に自然に同型である。そして、以下の写像は vector spaces の間の同型写像である:

$$\mathcal{A}_- \otimes \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_+ \longrightarrow \mathcal{A}, \quad a_- \otimes a_0 \otimes a_+ \mapsto a_- a_0 a_+.$$

これらの写像を合成してできる $\mathbb{C}[A]$ から $\mathcal{A}$ への vector spaces としての同型写像を *normal product* と呼び、$a \in \mathbb{C}[A]$ に対応する $\mathcal{A}$ の要素を ${:}a{:}$ と表わす。

2.3. $\lambda \in \mathfrak{h}_0^*$ に対して、I_λ は A_+ と $\{p_{0,a} - \lambda(H_{0,a})1 \mid a = 1, \cdots, \dim \mathfrak{h}_0\}$ から生成される $\mathcal{A}$ の left ideal であるとする。$\mathcal{A}$ の highest weight λ の *Fock representation* は $\mathcal{F}_\lambda := \mathcal{A}/I_\lambda$ によって定義される。$1 \bmod I_\lambda$ を $|\lambda\rangle$ と書くと、定義より、

$$\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{A}|\lambda\rangle, \quad A_+|\lambda\rangle = 0, \quad p_{0,a}[0]|\lambda\rangle = \lambda(H_{0,a})|\lambda\rangle$$

が成立する。

2.4. $\mathcal{A}$ に作用する derivation Θ を $a = x_{i,\alpha}$, $\delta_{i,\alpha}$, $p_{i,a}$ に対して、$\Theta a[m] := ma[m]$ と定める。Θ は $x_{i,\alpha}[m]$ 達から生成される $\mathcal{A}$ の subalgebra $\mathcal{O}$ を保つ。$\mathcal{A}$ の gradation $\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in \frac{1}{N}\mathbf{Z}} \mathcal{A}[m]$ を

$$\mathcal{A}[m] := \{a \in \mathcal{A} \mid \Theta a = ma\}$$

によって定める。一般に、$\mathcal{A}$ の任意の subspace V に対して、$V[m] := V \cap \mathcal{A}[m]$ と書くことにする。$\mathcal{A}[m]$ の filtration を

$$\mathcal{A}^n[m] := \bigoplus_{l \geq n} \mathcal{A}_-[m-l]\mathcal{A}_0\mathcal{A}_+[l] \quad \text{for } n \in \tfrac{1}{N}\mathbf{Z}$$

によって定め、この filtration による completion を $\widehat{\mathcal{A}}[m]$ と書く:

$$\widehat{\mathcal{A}}[m] := \operatorname*{proj\,lim}_{n \longrightarrow \infty} \mathcal{A}[m]/\mathcal{A}^n[m].$$

このとき、$\widehat{\mathcal{A}} := \bigoplus_m \widehat{\mathcal{A}}[m]$ は $\mathcal{A}$ を dense に含み、$\mathcal{A}$ の algebra structure は $\widehat{\mathcal{A}}$ 上に連続的に一意に拡張される。$\widehat{\mathcal{A}}[\theta]$ によって、$\widehat{\mathcal{A}}$ と θ から生成される tensor algebra を以下の commutation relation で割ったものを表わす:

$$[\theta, a] = ma \quad \text{for } a \in \widehat{\mathcal{A}}[m].$$

A の $\mathcal{F}_\lambda$ への作用は、$\widehat{\mathcal{A}}$ 上連続的に一意に拡張される。ただし、$\mathcal{F}_\lambda$ には離散位相を入れておくことにする。任意の $c \in \mathbf{C}$ に対して、$\mathcal{F}_\lambda$ への $\widehat{\mathcal{A}}$ の作用の$\widehat{\mathcal{A}}[\theta]$ の上への拡張で$\theta|\lambda\rangle = c|\lambda\rangle$ を満たすものが唯一存在する。このとき、$\xi = (\lambda, c)$ とおき、$\widehat{\mathcal{A}}[\theta]$-module としての $\mathcal{F}_\lambda$ を $\mathcal{F}_\xi$ と書き、highest weight vector $|\lambda\rangle$ を $|\xi\rangle$ と書く。$\mathcal{O}$ の $\widehat{\mathcal{A}}$ の中での閉包を $\widehat{\mathcal{O}}$ と表わす。あとで、$\widehat{\mathcal{O}}$ に係数を持つ $L\mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}d$ の Lie algebra cohomology の解析が必要になる。

2.5. $x_{i,\alpha}(z)$, $\delta_{i,\alpha}(z)$, $p_{i,a}(z)$ を形式的に以下によって定める:

$$x_{i,\alpha}(z) := \sum_{m \in \mathbf{Z} - \frac{i}{N}} z^{-m} x_{i,\alpha}[m],$$

$$\delta_{i,\alpha}(z) := \sum_{m \in \mathbf{Z} + \frac{i}{N}} z^{-m-1} \delta_{i,\alpha}[m],$$

$$p_{i,a}(z) := \sum_{m \in \mathbf{Z} + \frac{i}{N}} z^{-m-1} p_{i,a}[m].$$

ここで、z は formal variable である。$a_1, \cdots, a_n$ が $x_{i,\alpha}$, $\delta_{i,\alpha}$, $p_{i,a}$ のいずれかを表わすとき、$a(z)$ を形式的に $a(z) := {:}a_1(z) \cdots a_n(z){:}$ と定めると、$a(z)$ を z について形式的に展開して得られる係数は $\widehat{\mathcal{A}}$ の要素として意味を持つ。

3. フォック空間表現

3.1. 以下、$\frac{1}{N}\mathbf{Z}$-gradation のことを、単に、gradation と呼ぶことにする。$U=\bigoplus_m U[m]$, $V=\bigoplus_m V[m]$ は graded vector spaces であるとし、

$$\widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(U,V)[m] := \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(U,V) \mid f(U[n]) \subseteq V[m+n] \text{ for } n \in \tfrac{1}{N}\mathbf{Z}\},$$
$$\widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(U,V) := \bigoplus_m \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(U,V)[m]$$

とおく。$\mathfrak{a}=\bigoplus_m \mathfrak{a}[m]$ は graded Lie algebra であるとし、V は graded $\mathfrak{a}$-module であるとする。外積空間 $\bigwedge^p \mathfrak{a}$ には自然に gradation が入る。このとき、complex $(\widetilde{C}^{\cdot}, d)$ を以下の様にして定めることができる:

$$\widetilde{C}^p := \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbf{C}}(\textstyle\bigwedge^p \mathfrak{a}, V),$$
$$(df)(l_1,\cdots,l_{p+1}) := \sum_{1\le i\le p+1} (-1)^{i-1} l_i\big(f(l_1,\cdots,\widehat{l_i},\cdots,l_{p+1})\big)$$
$$+ \sum_{1\le i<j\le p+1} (-1)^{i+j} f([l_i,l_j],l_1,\cdots,\widehat{l_i},\cdots,\widehat{l_j},\cdots,l_{p+1})$$

ここで、$f\in\widetilde{C}$, $l_i\in\mathfrak{a}$ である。この complex の p-th coboundary, cocycle, cohomology groups をそれぞれ$\widetilde{B}^p(\mathfrak{a},V)$, $\widetilde{Z}^p(\mathfrak{a},V)$, $\widetilde{H}^p(\mathfrak{a},V)$ と書くことにする。

Remark. $\widetilde{C}^p$ を $C^p := \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\bigwedge^p \mathfrak{a}, V)$ で置き換えると、これは、通常の Lie algebra cohomology の定義と一致する。

3.2. $X\in\mathfrak{g}_i$ に対する $\widetilde{X}(z)$ を、$R_\lambda(X)$ の中の $x_{i,\alpha}$, $\frac{\partial}{\partial x_{i,\alpha}}$, $\lambda(H_{i,a})$ にそれぞれ $x_{i,\alpha}(z)$, $\delta_{i,\alpha}(z)$, $\lambda(H_{i,a})(z)$ を代入し、normal product をとることによって定義する:

$$\widetilde{X}(z) := \sum_{i,\alpha} {:}R_{i,\alpha}(X;x(z))\delta_{i,\alpha}(z){:} + \sum_{i,a} {:}\rho_{i,a}(X;x(z))p_{i,a}(z){:}.$$

$\widetilde{X}(z)$ の z に関する展開を利用して、$L\mathfrak{g}$ から $\widehat{\mathcal{A}}[\theta]$ への linear map $\widetilde{\pi}$ を次の条件によってに定める:

$$\widetilde{X}(z) = \sum_{m\in\mathbf{Z}+\frac{i}{N}} z^{-m-1}\widetilde{\pi}(X\otimes t^m) \quad \text{for } X\in\mathfrak{g}_i.$$

さらに、$\widetilde{\pi}$ を $\mathbf{C}d$ 上に $\widetilde{\pi}(d) := \theta$ と拡張しておく。ω を次のように定める:

$$\omega(a,b) := [\widetilde{\pi}(a),\widetilde{\pi}(b)] - \widetilde{\pi}([a,b]) \quad \text{for } a,b\in L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d.$$

(注意: ここで、bracket 積 [a,b] は loop algebra の bracket 積である。) このとき、$a,b\in L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d$ に対して$\omega(a,b)\in\widehat{\mathcal{O}}$ が成立することが Wick の定理から導かれる。したがって、Lie algebra $L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d$ の$\widehat{\mathcal{O}}$ への作用を、$b\mapsto[a,b]$ ($a\in L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d$, $b\in\widehat{\mathcal{O}}$) によって定めることができる。この作用によって$\widehat{\mathcal{O}}$ を $(L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d)$-module とみなすと、$\omega\in\widetilde{Z}^2(L\mathfrak{g}\oplus\mathbf{C}d,\widehat{\mathcal{O}})$ が成立することがわかる。

3.3. ここで、Fock space representations の構成に必要な lemmas を証明抜きにまとめておこう。標準的な 2-cocycle $c_2 \in \widetilde{Z}^2(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ を次の様に定義する:

$$c_2(X \otimes t^m, Y \otimes t^n) := (\kappa - g^*)(X|Y)m\delta_{m+n,0},$$
$$c_2(d, X \otimes t^m) := 0.$$

このとき、$X \in \mathfrak{b}_+$ に対する $R_\lambda(X)$ の形を調べることによって、次を示すことができる。

Lemma 1. ω と c_2 は $\bigwedge^2(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)$ の上で一致する。

さらに、Lie algebra cohomology に関して次が成立する。

Lemma 2. 自然な写像 $L\mathfrak{h} \to L\mathfrak{b}_+ \to L\mathfrak{g}$ と $\widehat{\mathcal{O}} \to \mathbb{C}$ は次の同型を *induce* する:

$$\widetilde{H}^p(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}}) \simeq \widetilde{H}^p(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}}) \simeq \widetilde{H}^p(L\mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}d, \mathbb{C}).$$

$\xi \in (\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d)^*$ に対して、$\widehat{\mathcal{A}}[\theta]$ の algebra automorphism τ_ξ を次によって定めることができる:

$$p_{0,a}[0] \mapsto p_{0,a}[0] + \xi(H_{0,a}), \quad \theta \mapsto \theta + \xi(d).$$

このとき、$f_\xi := \tau_\xi \circ \widetilde{\pi} - \widetilde{\pi}$ とおくと、$f_\xi \in \widetilde{Z}^1(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ および次が成立する:

$$\begin{aligned} f_\xi(l) &= \xi(l) \quad \text{for } l \in \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d = \mathfrak{h}_0 \otimes 1 \oplus \mathbb{C}d, \\ f_\xi(l) &= 0 \quad \text{for } l \in (L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)'. \end{aligned}$$

ここで、Lie algebra $\mathfrak{a}$ に対して、その derived subalgebra $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}]$ を $\mathfrak{a}'$ と書いた。$(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)/(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)' \simeq \mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d$ となることに注意せよ。f_ξ の $L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d$ 上への制限を g_ξ と書き、$\widetilde{H}^1(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$, $\widetilde{H}^1(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ に属す f_ξ, g_ξ が定める cohomology classes をそれぞれ $[f_\xi]$, $[g_\xi]$ と書くことにする。

Lemma 3. $\xi \mapsto [f_\xi]$ は $(\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d)^*$ から $\widetilde{H}^1(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ への同型写像を定める。

Lemma 4. $\xi \mapsto [g_\xi]$ は $(\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d)^*$ から $\widetilde{H}^1(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ への同型写像を定める。

Lemma 5. $\widetilde{H}^0(L\mathfrak{n}_+, \widehat{\mathcal{O}}) = \widehat{\mathcal{O}}^{L\mathfrak{n}_+} = \mathbb{C}.$

3.4. 次の定理が基本的である。

Theorem. 以下の *2* つの条件をみたすような$\Gamma \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ が唯一存在する:

$$(*) \qquad c_2 = \omega + d\Gamma,$$
$$(**) \qquad \Gamma = 0 \quad \text{on } L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d.$$

Proof. Existence. Lemmas 1, 2 より、ω と c_2 は $\widetilde{H}^2(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ の中で同じ cohomology class を定めることがわかる。すなわち、ある $\widetilde{\Gamma} \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ が存在して、$c_2 = \omega + d\widetilde{\Gamma}$ が成立する。ところが、Lemma 1 と c_2 の定義より、$\bigwedge^2(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)$ 上で $d\widetilde{\Gamma} = 0$ であるから、$\widetilde{\Gamma}$ の $\bigwedge^2(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)$ の上への制限は$\widetilde{Z}^1(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ に属す。よって、Lemma 4 より、ある $\xi \in (\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d)^*$ と $a \in \widehat{\mathcal{O}}$ が存在して、$\bigwedge^2(L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d)$ 上で $\widetilde{\Gamma} = g_\xi + da$ が成立する。このとき、$\Gamma := \widetilde{\Gamma} - f_\xi - da$ とおくと、Γ は (*) と (**) をみたす。

Uniqueness. $\Gamma' \in \widetilde{\mathrm{Hom}}_{\mathbb{C}}(L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d, \widehat{\mathcal{O}})$ も (*), (**) と同様の条件をみたすと仮定する。$u := \Gamma' - \Gamma$ とおくと次が成立する: (i) $du = 0$, (ii) $L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d$ 上で $u = 0$. この条件のもとで $u = 0$ を示せばよい。(i) と Lemma 3 より、ある $\xi \in (\mathfrak{h}_0 \oplus \mathbb{C}d)^*$ と $a \in \widehat{\mathcal{O}}$ が存在して、$u = f_\xi + da$ が成立する。(ii) および $L\mathfrak{n}_+$ 上で $f_\xi = 0$ となることより、$L\mathfrak{n}_+$ 上で $da = 0$. よって、Lemma 5 より $a \in \mathbb{C}$ が出るから、$da = 0$. ゆえに、(ii) より、$L\mathfrak{b}_+ \oplus \mathbb{C}d$ 上で $f_\xi = 0$. このとき、$\xi = 0$ すなわち $f_\xi = 0$. これで、$u = 0$ が示せたことになる。 □

上の Theorem の Γ を用いて linear map $\pi : \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathcal{A}}[\theta]$ を次のように定める:

$$\pi(l) := \widetilde{\pi}(l) + \Gamma(l) \quad \text{for } l \in L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}d,$$
$$\pi(K) := \kappa - g^*.$$

このとき、(*) より、π は Lie algebra homomorphism をなすことがただちにわかる。この π を通して $\mathcal{F}_\xi$ は left $\widehat{\mathfrak{g}}$-module とみなせ、さらに、(**) より、$\mathcal{F}_\xi$ は highest weight $(\kappa - g^*, \xi)$ を持つことがわかる。この表現を $\widehat{\mathfrak{g}}$ の Fock space representation と呼ぶ。

Remark. $\mathcal{F}_\xi$ の formal character は、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の Verma module の formal character に等しい。$\kappa = 0$ のとき、$\widehat{\mathfrak{g}}$ の Fock space representations を $p_{i,a}[m]$ 抜きで構成することができ、$p_{i,a}[m]$ 抜きで構成された Fock space representations は Kac-Kazhdan conjecture の証明に役に立つ。

以下には、affine Lie algebra の Fock space representation に関する文献と、それと関係の深い Wess-Zumino-Witten model における conformal block の積分表示に関係する文献を集めてある。

References

[ATY] Awata, H., Tsuchiya A., Yanada Y.: Integral Formulas for WZNW correlation functions. preprint (1991) KEK-TH-286 KEK preprint 91-12 April 1991

[BF] Bernard, D., Felder, G.: Fock representations and BRST cohomology in $SL(2)$ current algebra. preprint (1989)

[BMP] Bouwknegt, P., McCarthy, J., Plich, K.: Quantum group structure in the Fock space resolutions of $\widehat{sl}(n)$ representations. Commun. Math. Phys. **131**, 125-155 (1990)

[CF] Christe, P., Flüme, R.: The four point correlations of primary operators of the d=2 conformal invariant $SU(2)$ σ-model with Wess-Zumino term. Nucl. Phys. B **282**, 466-496 (1987)

[DF1] Dotsenko, Vl. S., Fateev, V. A.: Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models. Nucl. Phys. B **240** [FS12], 312-348 (1984)

[DF2] Dotsenko, Vl. S., Fateev, V. A.: Four-point correlation functions and the operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $c \leq 1$. Nucl. Phys. B **251** [FS13], 691-734 (1985)

[DJMM] Date, E., Jimbo, M., Matsuo, A., Miwa, T.: Hypergeometric type integrals and the $sl(2,\mathbb{C})$ Knizhnik-Zamolodchikov equation. preprint (1990)

[FeFr1] Feigin, B., Frenkel, E.: Representation of affine Kac-Moody algebras, bosonization and resolutions. In: Brink, L., Friedan, D., Polyakov, A.M. (eds.) Physics and Mathematics of Strings. Memorial volume for Vadim Knizhnik, pp. 271-316. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific 1990

[FeFr2] Feigin, B., Frenkel, E.: Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. Commun. Math. Phys. **128**, 161-189 (1990)

[Fel] Felder, G.: BRST approach to minimal models. Nucl. Phys. B **317**, 215-236 (1989)

[GMMOS] Gerasimov, A., Marshakov, A., Morozov, A., Olshanelsky, M., Shalashvili, S.: Wess-Zumino-Witten model as a theory of free fields. III. The case of arbitrary simple group. preprint (1989)

[Kac] Kac, V. G.: Infinite dimensional Lie algebras (Second Edition). Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne Sydney: Cambridge University Press (1985)

[Kur] Kuroki, G.: Fock space representations of affine Lie algebras and integral representations in the Wess-Zumino-Witten models. Commun. Math. Phys. **141**, 511-542 (1991)

[Mat] Matsuo, A.: An application of Aomoto-Gelfand hypergeometric functions to the $SU(n)$ Knizhnik-Zamolodchikov equation. Commun. Math. Phys. **134**, 65-77 (1990)

[Mar] Marshakov, A. V.: The Dotsenko-Fateev representation for Wess-Zumino-Witten models. Phys. Lett. B **224**, 141-144 (1989)

[SV] Schechtman, V. V., Varchenko, A. N.: Integral representations of n-point conformal correlators in the WZW model. Preprint Max-Planck-Insitute für Mathematik, MPI/89-51, Bonn, August (1989)

[W] Wakimoto, N.: Fock representations of the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Commun. Math. Phys. **104**, 605-609 (1986)