数理解析研究所講究録
第 778 巻 1992 年 50-51

帯球関数に関係する可積分接続について

名古屋大学理学部　　松尾　厚

$\mathfrak{h}$ を n-次元複素ベクトル空間とし，$\Sigma\subset\mathfrak{h}^*$ を階数 n のルート系とする。対応する Weyl 群を W とする。ここで，Σ は被約とは限らない。正ルートの全体を Σ^+，割れないルートの全体を Σ_0，$\Sigma_0^+=\Sigma^+\cap\Sigma_0$ とする。複素数 k_α を，任意の $\alpha\in\Sigma$, $w\in W$ に対して $k_{w\alpha}=k_\alpha$ を満たすように与え，multiplicity と呼ぶ。ただし，$\alpha\notin\Sigma$ のときに，$k_\alpha=0$ と解釈することにする。また，$\lambda\in\mathfrak{h}^*$ も一つ与え，weight と呼ぶ。

さて，$\mathfrak{h}$ 上の変数を u と書こう。$\mathfrak{h}$ 上の関数 $f(u)$ の $\xi\in\mathfrak{h}$ 方向の微分を $\partial_\xi f(u)$ と表わす。このとき，Laplacian を

$$L=\sum_{i=1}^n\partial_{\xi_i}^2+\sum_{\alpha\in\Sigma^+}k_\alpha\frac{e^{\alpha(u)}+1}{e^{\alpha(u)}-1}\partial_\alpha$$

と定義する。ただし，$\{\xi_i\}$ は $\mathfrak{h}$ の正規直交基底である。一方，$\mathcal{R}$ を $\{\frac{1}{1-e^{\alpha(u)}};\alpha\in\Sigma^+\}$ の多項式で書かれる関数全体とする。$\mathfrak{h}$ 上の $\mathcal{R}$-係数の微分作用素であって L と可換で W-不変なもの全体を $\mathbf{D}$ と表わすことにする。Heckman と Opdam は次の微分方程式系を考えた。

$$P\phi=\gamma(P)(\lambda)\phi\ ;\ P\in\mathbf{D}. \tag{1}$$

ここに，$\gamma(P)(\lambda)\in\mathbf{C}$ は weight $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ に依存する固有値である。この方程式系は Weyl 群 W の作用で不変であり，解空間の階数は W の位数に等しい。もし，Σ が非コンパクト型 Riemann 対称空間 G/K の制限ルート系の 2 倍で，k_α が対応する重複度の半分であったならば，$\mathbf{D}$ は G/K の不変微分作用素の動径部分全体と一致し，この微分方程式系は帯球関数の満たす微分方程式系とみられる。

ところで，この方程式を高階のものまで実際に書き下すのは困難である。我々の目標はこの方程式をより単純で扱いやすい方程式に書き換えることである。そこで，W の群環 $\mathbf{C}[W]=\bigoplus_{w\in W}\mathbf{C}\,w$ を考える。各 $\alpha\in\Sigma$ に対し，

$$\sigma_\alpha(w)=s_\alpha w,\qquad \epsilon_\alpha(w)=\begin{cases} w & \text{if } w^{-1}\alpha\in\Sigma^+,\\ -w & \text{otherwise.}\end{cases}$$

により，σ_α，$\epsilon_\alpha \in \mathrm{End}(\mathbf{C}[W])$ を定める。ただし，$s_\alpha \in W$ は $\alpha \in \Sigma$ に付随する鏡映である。また，weight $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に依存する $e_\xi(\lambda) \in \mathrm{End}(\mathbf{C}[W])$ を各 $\xi \in \mathfrak{h}$ に対して

$$e_\xi(\lambda)(w) = (w\lambda, \xi)\, w$$

と定義する。これらを用いて，次の微分方程式を考えよう。

$$\partial_\xi \Phi(u) = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Sigma^+} \frac{k_\alpha}{2}(\alpha, \xi)\Big(\frac{e^{\alpha(u)}+1}{e^{\alpha(u)}-1}(\sigma_\alpha - 1) + \sigma_\alpha \epsilon_\alpha\Big) + e_\xi(\lambda)\Big\}\Phi(u);\ \xi \in \mathfrak{h}. \tag{2}$$

ここに，未知関数 $\Phi(u)$ は $\mathbf{C}[W]$ に値を取るものである。この方程式は，Frobenius の意味で可積分であり，階数は W の位数に一致する。なお，この方程式は共形場理論にあらわれる Knizhnik-Zamolodchikov 方程式に類似していることを注意しておく。

我々の主要結果は次の定理である。

定理：方程式 (2) の任意の解 $\Phi(u) = \sum_{w \in W} \phi_w(u)\, w$ に対し，$\phi(u) = \sum_{w \in W} \phi_w(u)$ は方程式 (1) の解である。この対応が解空間の同型を与える必要十分条件は $k_\alpha + 2k_{2\alpha} + (\lambda, \alpha^\vee) \neq 0$ が任意の $\alpha \in \Sigma_0^+$ について成立することである。

方程式 (2) はいわゆる logarithmic connection を定めており，特に方程式系は鏡映面に添って regular singularity を持っている。方程式 (1) がこのような単純な方程式で表示されることは著しいことであって，この事実により対称空間上の調和解析の結果が，別の角度から整理されるのではないかと期待される。

参考文献

1. Cherednik, I.V., *Generalized braid groups and local r-matrix systems*, Doklady Akad. Nauk SSSR.
2. Cherednik, I.V., *Affine extensions of Knizhnik-Zamolodchikov equations and Lusztig's isomorphism*, Preprint RIMS-742.
3. Heckman, G.J., Opdam, E.M., *Root systems and hypergeometric functions I*, Comp. Math. 64 (1987) 329-352.
4. Heckman, G.J., *An elementary approach to the hypergeometric shift operators of Opdam*, Invent. Math 103 (1991) 341-350.
5. Helgason, S., Groups and Geometric Analysis, Academic Press, 1984.
6. Matsuo, A., *Knizhnik-Zamolodchikov type equations and zonal spherical functions*, Preprint RIMS-750.