数理解析研究所講究録
第779巻 1992年 1-15

High-energy behavior of total cross sections for 3-body quantum systems

京大・理　伊藤 宏 (Hiroshi Ito)

<u>序</u>　3体Schrödinger方程式の全散乱断面積の高エネルギーでの挙動を考える。始状態において，粒子1,2が束縛状態をつくり，その複合粒子に残りの粒子（粒子3）が衝突してくるとしよう。終状態として次の3つの場合が考えられる。

(i) 始状態のときとは異なるペアが複合粒子をつくり，他の粒子と独立に運動する。

(ii) 始状態のときと同じペア（粒子1,2）が束縛状態をつくり（束縛エネルギーは変化しているかもしれない），残りの粒子と独立に運動する。

(iii) 3個すべて独立に運動する。

始状態をα，終状態をβで表わそう。$\lambda>0$，$\omega\in S^2$を各々系の全エネルギー，入射方向とする。散乱$\alpha\to\beta$に対する全散乱断面積$\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda,\omega)$の$\lambda\to+\infty$における挙動を調べる

ことが我々の目的である。得られた結果を粗く述べると次のようになる。ただし，各 pair potential は十分滑らかで，十分速く遠方で decay しているものとする。

$\lambda \to +\infty$ のとき，

β が (i) の場合 $\sigma_{\alpha\to\beta} = O(\lambda^{-L})$, $L \gg 1$,

β が (ii), (iii) の場合 $\sigma_{\alpha\to\beta} = O(\lambda^{-1})$.

§1 Notations, Results

$m_j > 0$, $r_j \in \mathbb{R}^N$ $(1 \le j \le 3,\ N \ge 3)$ を各々粒子 j の質量および位置ベクトル。$V_{ij}(r_i - r_j)$ を粒子 i-j 間の pair potential とする。V_{ij} $(1 \le i < j \le 3)$ に次の仮定をおく。ただし，$l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ または $l = 3/2$ とする。

$$(V)_l \begin{cases} V_{ij} \in C^{2l+2}(\mathbb{R}^N), \text{ real} \\ \exists\, \delta > l + \frac{N+1}{2} \text{ s.t } |\partial_x^\gamma V_{ij}(x)| \le C\langle x \rangle^{-\delta},\ |\gamma| \le 2l+2 \\ \text{ここで } \langle x \rangle = (1+|x|^2)^{1/2}. \end{cases}$$

2-cluster 分解全体を A_2 で表わす：

$$A_2 = \{a = \{(i,j), k\} \mid \{i,j,k\} = \{1,2,3\},\ i<j\}.$$

$a = \{(i,j), k\} \in A_2$ に対して，Jacobi 座標 $(x_a, y_a) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ を

$$x_a = r_i - r_j, \qquad y_a = r_k - \frac{m_i r_i + m_j r_j}{m_i + m_j}$$

で定義する。重心系で考えたこの系の Hamiltonian H は，この座標系を用いると

$$H = H_0 + V \qquad \text{in } \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{2N}),$$

$$H_0 = -\frac{1}{2m_a}\Delta_{x_a} - \frac{1}{2n_a}\Delta_{y_a}, \quad V = \sum_{1 \le p < q \le 3} V_{ij}(r_p - r_q),$$

とかける。ここに，m_a, n_a は $m_a^{-1} = m_i^{-1} + m_j^{-1}$, $n_a^{-1} = m_k^{-1} + (m_i + m_j)^{-1}$ で定義される換算質量である。

$a = \{(i, j), k\}$ とするとき，粒子 i と粒子 j の2体Schrödinger作用素は，

$$h_a = -\frac{1}{2m_a}\Delta_{x_a} + V_{ij}(x_a) \qquad \text{in } L^2(\mathbb{R}^N)$$

で与えられる。いま，d_a を h_a の負の固有値の個数（重複も数えて）とし，

$$\Gamma_2 = \{\alpha = (a, k) \mid a \in A_2,\ k = 1, \cdots, d_a\}$$

とおく。$\alpha = (a, k)$ は，h_a の k 番目の固有状態を表わしており，2-body channel と呼ばれる。$\alpha = (a, k)$ に対し，λ_α で h_a の k 番目の固有値 (<0)，φ_α で対応する固有ベクトルを表わす。ただし，$a \in A_2$ を固定したとき，$\{\varphi_\alpha\}_{D(\alpha) = a}$ は ONS をなしているものとする。ここで，$\alpha = (a, k)$ のとき，$D(\alpha) = a$ とかいた。

各 $\alpha \in \mathcal{A}_2$ ($a = D(\alpha)$) に対し, Channel Hamiltonian H_α, channel identification operator $J_\alpha : L^2(\mathbb{R}^N_{y_a}) \to \mathcal{H}$ を

$$H_\alpha = \lambda_\alpha - \frac{1}{2n_a}\Delta_{y_a}, \qquad J_\alpha u = \varphi_\alpha \otimes u$$

で定義する。さて, 仮定 $(V)_0$ のもと, 次の channel wave operator $W_\alpha^\pm : L^2(\mathbb{R}^N_{y_a}) \to \mathcal{H}$ の存在が知られている (例えば [RS]):

$$W_\alpha^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH} J_\alpha e^{-itH_\alpha},$$

さらに, 3-body channel に対する channel wave operator $W_0^\pm : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の存在も知られている ([RS]):

$$W_0^\pm = \operatorname*{s-lim}_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}.$$

いま, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_2 \cup \{0\}$ とおく。散乱 $\alpha \to \beta$ に対応する scattering operator $S_{\alpha\to\beta}$ は

$$S_{\alpha\to\beta} = W_\beta^{+*} W_\alpha^- \qquad (\alpha, \beta \in \mathcal{A})$$

で定義される。scattering operator は, 次の性質を持つ:

$$e^{-itH_\beta} S_{\alpha\to\beta} = S_{\alpha\to\beta} e^{-itH_\alpha}.$$

このことから, H_α, H_β のスペクトル表現を用いることによって, $S_{\alpha\to\beta}$ は, direct integral で表現できることがわか

る。例えば，$\alpha\in\Gamma_2$のとき，ユニタリ作用素 $\mathcal{Z}_\alpha: L^2(R^N_{y_a})$
$\longrightarrow L^2((\lambda_\alpha,\infty);L^2(S^{N-1}))$ を

$$(\mathcal{Z}_\alpha f)(\lambda,\omega)=n_a^{\frac{1}{2}}\mu_\alpha^{\frac{N-2}{2}}\hat{f}(\mu_\alpha\omega),\qquad a=D(\alpha)$$
$$\mu_\alpha=(2n_a(\lambda-\lambda_\alpha))^{1/2},$$

で定義する。ただし，$\wedge$ は Fourier 変換。すると，$\alpha,\beta\in\Gamma_2$ のときは，a.e. $\lambda>\lambda_{\alpha\beta}:=\max(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)$ で定義された $L^2(S^{N-1})$ 上の有界作用素の族 $\{S_{\alpha\to\beta}(\lambda)\}$ が存在して，

$$\mathcal{Z}_\beta S_{\alpha\to\beta}\mathcal{Z}_\alpha^*=\int_{\lambda>\lambda_{\alpha\beta}}^{\oplus}S_{\alpha\to\beta}(\lambda)d\lambda$$

となる。$S_{\alpha\to\beta}(\lambda)$ は scattering matrix と呼ばれている。
同様に $\beta=0$ の場合も($\alpha\in\Gamma_2$)，scattering matrix $S_{\alpha\to0}(\lambda)$: $L^2(S^{N-1})\to L^2(S^{2N-1})$ の存在がわかる。

以下，<u>$\alpha\in\Gamma_2$，$\beta\in\Gamma$</u> とする。
まず，$\beta\in\Gamma_2$ のときの $S_{\alpha\to\beta}(\lambda)$ の性質をまとめておく．

$S_{\alpha\to\beta}(\lambda)-\delta_{\alpha\beta}$ ($\delta_{\alpha\beta}$ は Kronecker's delta) は，Hilbert-Schmidt (H-S) norm で連続であり，その積分核を $T_{\alpha\to\beta}(\lambda,\theta,\omega)$ とすると $T_{\alpha\to\beta}(\lambda,\cdot,\omega)$ は $L^2(S^{N-1})$-値関数として $(\lambda,\omega)\in(0,\infty)\times S^{N-1}$ に関して強連続である．

上の事実は，$\alpha,\beta\in\Gamma_2$ のときには，2体 Schrödinger 方程式

の散乱の場合と同様にして，$T_{\alpha\to\beta}(\lambda,\theta,\omega)$ の表現が得られるので確めることができる。また，この表現が我々の解析の出発点となる。

次に $S_{\alpha\to 0}(\lambda)$ について述べる。そのために，次の条件を追加する。

$$
(\mathrm{Z})\ \begin{cases} \forall a=\{(i,j),k\}\in A_2 \text{ に対して, } -1\notin \sigma_p(\hat{h}_a), \text{ ここに} \\ \hat{h}_a = V_{ij}^{1/2}\left(-\frac{1}{2m_a}\Delta_{x_a}-0-i0\right)^{-1}|V_{ij}|^{1/2} \\ \left(f^{1/2}=|f|^{1/2}\operatorname{sgn} f\right) \end{cases}
$$

この仮定のもと，h_a は 0 を固有値として持たないことが知られている（例えば [GM]）。

$(V)_0$, (Z) を仮定すると $S_{\alpha\to 0}(\lambda)$ は $\lambda\gg 1$ において H-S norm で連続であり，その積分核を $T_{\alpha\to 0}(\lambda,\theta,\omega)$ とすると $T_{\alpha\to 0}(\lambda,\cdot,\omega)$ は $L^2(S^{3N-1})$-値関数として，$(\lambda,\omega)\in(0,\infty)\times S^2$ に関して強連続である。

このことは，Faddeev の方法を用いて確めることができる（[AJS], [AS]）。

さて，ここで total scattering cross section（全散乱断面積）の定義を与えよう。

(I) $\alpha \in \Gamma_2$, $\beta \in \Gamma$ $(D(\alpha)=a)$ のとき,

$$\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda,\omega) = (2\pi)^{N-1}\mu_\alpha^{1-N}\int_{S^\beta}|T_{\alpha\to\beta}(\lambda,\theta,\omega)|^2 d\theta$$

を散乱 $\alpha\to\beta$ に対する全散乱断面積と呼ぶ。ここに, λ は系の全エネルギー, ω は入射方向, また

$$S^\beta = \begin{cases} S^{N-1} & \beta\in\Gamma^2 \\ S^{2N-1} & \beta=0 \end{cases}$$

とする。ただし, $\beta\in\Gamma_2$ のときは $(V)_0$ を, $\beta=0$ のときは, $(V)_0$ と(2) を仮定しているものとする。

(II) $\alpha\in\Gamma_2$ のとき

$$\sigma_\alpha(\lambda,\omega) = \sum_{\beta\in\Gamma}\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda,\omega)$$

を 始状態が α である散乱に対する全散乱断面積と呼ぶ ここに, $(V)_0$, (2) を仮定しているものとする。

$a=\{(i,j),k\}\in A_2$ に対して intercluster potential I_a を $I_a(x_a,y_a)=V-V_{ij}(x_a)$ で定義し, $\omega\in S^{N-1}$, $\eta\in\Pi_\omega:=\{\xi\in\mathbb{R}^N \mid \xi\cdot\omega=0\}$ に対して,

$$W_a(x_a;\omega,\eta)=\int_{\mathbb{R}} I_a(x_a,t\omega+\eta)\,dt$$

とおく。また, $(\ ,\ )_a$, $\|\ \|_a$ で $L^2(\mathbb{R}^N_{x_a})$ における内積および norm を表わす。

Theorem 1　$\alpha\in\Gamma_2$, $D(\alpha)=a$ とする。$v>0$ に対して
$$\lambda(v)=\frac{1}{2}n_a v^2+\lambda_\alpha$$
とおく。

(i)　$(V)_\ell$, $\ell\in N\cup\{0\}$ を仮定. $\beta\in\Gamma_2$, $D(\beta)\neq a$

(1)　$\Rightarrow$　$\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda(v),\omega)=O(v^{-2\ell-4})$,　$v\to+\infty$.

(ii)　$(V)_0$ を仮定。$\beta\in\Gamma_2$, $D(\beta)=a$

(2)　$\Rightarrow$
$$\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda(v),\omega)=v^{-2}\int_{\Pi_\omega}|(W_a(\cdot;\omega,\eta)\psi_\alpha,\psi_\beta)_a|^2d\eta+o(v^{-2}).$$

(iii)　$(V)_0$, (Z) を仮定。

(3)　$\Rightarrow$
$$\sigma_{\alpha\to0}(\lambda(v),\omega)=v^{-2}\int_{\Pi_\omega}\|P^{cont}(h_a)W_a(\cdot;\omega,\eta)\psi_\alpha\|_a^2d\eta+o(v^{-2}),$$

(4)
$$\sigma_\alpha(\lambda(v),\omega)=v^{-2}\int_{\Pi_\omega}\|W_a(\cdot;\omega,\eta)\psi_\alpha\|_a^2d\eta+o(v^{-2}),$$

(1)〜(4) すべて $\omega\in S^{N-1}$ に関して一様。

Theorem 2　上の定理で (ii) および (iii) における仮定 $(V)_0$ を $(V)_{3/2}$ にすると，(2), (3), (4) における remainder term $o(v^{-2})$ はすべて $O(v^{-3})$ とすることができる。

§2. Resolvent estimates

$l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して次の仮定を $(U)_l$ と呼ぶ.

$$(U)_l \quad \begin{cases} V_{ij} \in C^{2l+2}(\mathbb{R}^3) \\ |\partial^\gamma V_{ij}(x)| \le C\langle x\rangle^{-\min(|\gamma|, l+2)}, \quad |\gamma| \le 2l+2。\end{cases}$$

($N \ge 3$ より $(V)_l \Rightarrow (U)_l$。)

$v > 0$, $\omega \in S^{N-1}$ に対して.

$$L(v, \omega) = v^{-1}(H - \lambda_\alpha) - i\omega \cdot \nabla_{y_a}$$
$$= e^{-in_a v\omega \cdot y_a} v^{-1}(H - \lambda(v)) e^{in_a v\omega \cdot y_a}$$

とおく。$k, s \in \mathbb{R}$ に対して, 関数空間 H^k_s を

$$H^k_s = \{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2N}) \mid \|f\|_{k,s} = \|\langle x_a ; y_a\rangle^s (-\Delta + 1)^{k/2} f\| < \infty \}$$

とおく。ここに, $\langle x ; y\rangle = (1 + |x|^2 + |y|^2)^{1/2}$, $\Delta = \Delta_{x_a} + \Delta_{y_a}$.

<u>Proposition 3</u> (i) $(U)_l$ を仮定。k integer, s real $0 \le k \le l$, $k + \frac{1}{2} < s$ とする. このとき,

(5) $$\exists (L(v,\omega) - i0)^{-1} := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (L(v,\omega) - i\varepsilon)^{-1} \quad \text{in } \mathbb{B}_{k,s},$$

ここで $\mathbb{B}_{k,s} = \mathbb{B}(H^k_s, H^k_{-s})$, さらに.

(6) $$\sup_{v \ge 1, \omega \in S^{N-1}} \|(L(v,\omega) - i0)^{-1}\|_{\mathbb{B}_{k,s}} < \infty.$$

(ii) $(U)_1$ を仮定.

(7) $\Longrightarrow \quad \| (L(v,\omega) - i0)^{-1} - (-i\omega\cdot D_{y_a} - i0)^{-1} \|_{\mathbb{B}(H^{s}_{2}, H^{0}_{-2})} = O(v^{-1})$,
as $v \to \infty$, uniformly in $\omega \in S^{N-1}$.

詳細は省略しますが，このPropositionの証明について少しだけ述べます。

$X = \langle x_a ; y_a \rangle$，$D = (\partial_{x_a}, \partial_{y_a})$，$L = L(v,\omega)$ とおく。

(6) を示すために，

(8) $$X^{-s} D^{\gamma} (L - i\varepsilon)^{-1} \langle D \rangle^{-k} X^{-s}, \quad |\gamma| \le k,\ \varepsilon > 0,$$

の形の作用素のnormを評価しなければならない。いま，D^{γ} を $(L-i\varepsilon)^{-1}$ の右に移すことを考え，さらにresolvent eq.

$$(L-i\varepsilon)^{-1} = (L-i)^{-1} + i(\varepsilon - 1)(L-i\varepsilon)^{-1}(L-i)^{-1}$$

を用いると $\left([D, (L-i\varepsilon)^{-1}] = -v^{-1}(L-i\varepsilon)^{-1}[D,V](L-i\varepsilon)^{-1} \text{ より} \right)$

(9) $$X^{-s} A_1 (L-i\varepsilon)^{-1} A_2 (L-i\varepsilon)^{-1} \cdots A_{m-1} (L-i\varepsilon)^{-1} A_m X^{-s}$$

の形の作用素を評価すればよいことがわかる。ここに，各 A_j は $D^{\alpha} V_{ij}$ と $(L-i)^{-1}$ の有限個の積である。(9) の評価は Jensen-Mourre-Perry ([JMP]) による multiple commutator method を用いて証明することができる。同じタイプの評価は [I1] でもなされています。

§3. 定理の証明の方針 （詳しくは [I2]）

3.1. (1) の証明について ($D(\alpha) \neq D(\beta)$)

$v' > 0$ を $\lambda(v) = \frac{1}{2} n_b v'^2 + \lambda_\beta$, $D(\beta) = b$ となるように定める。このとき, $T_{\alpha \to \beta}(\lambda(v), \theta, \omega)$ は

$$
\begin{aligned}
& T_{\alpha \to \beta}(\lambda(v), \theta, \omega) \\
(10) \quad & = C(v)\left([-I_a + v' I_b (L(v,\omega) - i0)^{-1} I_a] \psi_\alpha, e^{i n_b v' \theta \cdot y_b - i n_a v \omega \cdot y_a}\right), \\
& C(v) = i(2\pi)^{-N+1}(n_a n_b)^{\frac{N-1}{2}}(v v')^{\frac{N-2}{2}},
\end{aligned}
$$

となる。

$a \neq b$ より, $y_a = m x_a + n y_b$, $m \neq 0$。よって,

$$
e^{i n_b v' \theta \cdot y_b - i n_a v \omega \cdot y_a} = e^{-i n_a m v \omega \cdot x_b} \times e^{i \cdots y_b}。
$$

従って, (10) の右辺の積分を x_b で部分積分することによって (1) を得ることができる。ただし, ここで, Proposition 3 (i) を用いる。

3.2. (2) の証明について ($D(\alpha) = D(\beta)$)

$E_\beta := J_\beta J_\beta^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ とおく。このとき, $\sigma_{\alpha \to \beta}$ は次のように表現することができる。

$$\sigma_{\alpha\to\beta}(\lambda(v),\omega)$$

$$(11)\qquad = 2v^{-2}\,\mathrm{Im}\,(E_\beta(L(v,\omega)-i0)^{-1}I_a\psi_\alpha,\ I_a\psi_\alpha)$$
$$+2v^{-3}\,\mathrm{Im}\,(E_\beta I_b(L(v,\omega)-i0)^{-1}I_a\psi_\alpha,\ (L(v,\omega)-i0)^{-1}I_a\psi_\alpha)。$$

また,

$$(L(v,\omega)-i\varepsilon)^{-1}-(-i\omega\cdot\nabla_{y_a}-i\varepsilon)^{-1}$$
$$=-v^{-1}(L(v,\omega)-i\varepsilon)^{-1}(H-\lambda_\alpha)(-i\omega\cdot\nabla_{y_a}-i\varepsilon)^{-1},\quad \varepsilon>0$$

と Proposition 3 (i) ($k=0$) を用いると. $s>1/2$ のとき,

$$(12)\qquad \|((L(v,\omega)-i0)^{-1}-(-i\omega\cdot\nabla_{y_a}-i0)^{-1})I_a\psi_\alpha\|_{H^0_s}=o(1),\ v\to\infty,$$

を得る。 (2) は, (11) と (12) を使って示すことができる。

3.3. (4) の証明について.

仮定 $(V)_0$, (2) のもと. 各 h_c ($c\in\mathcal{A}_2$) は, 負の固有値以外の固有値を持たない. 従って. 漸近完全性 ([E]) は

$$\mathcal{H}_{ac}(H)=\sum_{\beta\in\Gamma}\oplus\,\mathrm{Range}\ W_\beta^{\pm}$$

を意味する。このことから, 光学定理と呼ばれる次の定理が示される。

<u>Theorem 4</u>　$\alpha \in P_2$, $(V)_0$, (Z) を仮定.

(13) $\Rightarrow$ $\sigma_\alpha(\lambda, \omega) = -2(2\pi)^{N-1} \mu_\alpha^{1-N} \operatorname{Re} T_{\alpha\to\alpha}(\lambda, \omega, \omega)$

for $\omega \in S^2$, $\lambda \gg 1$.

この定理と (12) を用いて. (4) が示される。

<u>3.4.</u>　(3) の証明について

仮定 $(V)_0$, (Z) のもと, $\sigma_{\alpha\to 0} = \sigma_\alpha - \sum_{\beta\neq 0} \sigma_{\alpha\to\beta}$ だから.
(1), (2), (4) を用いて, (3) が示される。

References

[Ag] S. Agmon, Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations, Princeton, Princeton University Press, 1982.

[ABG] W. O. Amrein, A. M. Berthier, V.Georgescu, On Mourre's approach to spectral theory, Helv. Phys. Acta., 62 (1989), 1-20.

[AJS] W. O. Amrein, J. M. Jauch, K. B. Sinha, Scattering theroy in quantum mechanics, Benjamin, Reading ,1977.

[APS] W. O. Amrein, D. B. Pearson, K. B. Sinha, Bounds on the total scattering cross-section for N-body systems, Nuovo Cimento, 52 (1979),115-131.

[AS] W. O. Amrein, K. B. Sinha, On three-body scattering cross sections, J. Phys. A: Math. Gen., 15 (1982), 1567-1586.

[CFKS] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, B. Simon, Schrödinger operators, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.

[E] V. Enss, "Quantum scattering theory of two-and three-body systems with potentials of short and long range" in Schrödinger operators, ed. S.Graffi, Lecture Notes in Mathematics, Vol.1159, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1985.

[ES] V. Enss, B. Simon, Finite total cross sections in non-relativistic quantum mechanics, Comm. Math. Phys., 76 (1980), 177-209.

[GM] J. Ginibre, M. Moulin, Hilbert space approach to the quantum mechanical three body problem, Ann. Inst. H. Poincaré, A 21

(1974), 97-145.

[Ha] G. A. Hagedorn, Born series for (2 cluster)→(2 cluster) Scattering of two, three, and four particle Schrödinger operators, Comm. Math. Phys., 66 (1979), 77-94.

[I1] H. T. Ito, Charge transfer model and (2 cluster)→(2 cluster) three-body scattering, J. Math. Kyoto Univ.,(to appear).

[I2] H. T. Ito, High-energy behavior of total scattering cross sections for 3-body quantum systems

[IT] H. T. Ito, H. Tamura, Semi-classical asymptotics for total scattering cross sections of 3-body systems, J.Math.Kyoto Univ., (to appear).

[J] A. Jensen, Propagation estimates for Schrödinger-type operators, Trans. AMS, 291 (1985),129-144.

[JMP] A. Jensen, E. Mourre, P. A. Perry, Multiple commutator estimates and resolvent smoothness in quantum scattering theory, Ann.Inst. H. Poincaré A, 41 (1984), 207-225.

[M] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators, Comm. Math. phys., 78 (1981), 391-408.

[PSS] P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, Spectral analysis of N-body Schrödinger operators, Ann. Math., 114 (1981), 519-567.

[RS] M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics. III, IV, Academic Press, 1978, 1979.

[T] H. Tamura, Principle of limiting absorption for N-body Schrödinger operators,-a remark on the commutator methods, Lett. in Math. Phys.,(1989), 17,31-36.