数理解析研究所講究録
第 779 巻 1992 年 61-75

The symbol calculus of pseudo-differential operators and the Gauss-Bonnet-Chern Theorem

姫工大・理 岩崎 千里 (Chisato Iwasaki)

§1. Gauss-Bonnet-Chern の定理と熱方程式の基本解.

Riemann manifold M ($\dim M = n$) に対する Gauss-Bonnet-Chern の定理 (以下, (G-B-C) と書く) を, 熱方程式の基本解の擬微分作用素としての表象計算によって証明することが, 本稿の目的である。結果を一言でいうと, 基本解の表象の主部に相当するところから, (G-B-C) が導かれる。ここではMの境界がない場合について, 説明するが, 境界のある場合も著者の [7] の方法をつかえば, 同様に示す事ができる。

さて, Gauss-Bonnet の定理は $n=2$ として

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M K\, dM ,$$

ただし, $\chi(M)$ は Euler 標数, K は Gauss 曲率である. これは, Chern [1] により, $n \geq 3$ の場合に次のように拡張さ

れた．

$$(\text{G-B-C}) \qquad \chi(M) = \int_M E(x)\,dM \quad ,$$

$E(x)\,dM$ は Euler n-form，具体的に書けば次の通りである．

$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi)^k k!\,2^k} \displaystyle\sum_{\pi,\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\pi \, R^{\pi(1)\pi(2)}{}_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots \\ \qquad \cdots R^{\pi(n-1)\pi(n)}{}_{\sigma(n-1)\sigma(n)} & (n = 2k) \\ 0 & (n = 2k+1) \end{cases} ,$$

さて，この $\chi(M)$ と M 上の熱方程式の関係は以下の様になる．p-form の smooth section の全体 $\Lambda^p(M)$ に対して，$\Delta = d\delta + \delta d$ を各 $\Lambda^p(M)$ 上で考えたものを Δ_p と書く．$E_p(t)$ をその Cauchy 問題の基本解とする．即ち，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d}{dt} + \Delta_p\right) E_p(t) = 0 \quad \text{in } (0,T) \times M , \\ \qquad\qquad E_p(0) = I \quad \text{in } M . \end{cases}$$

$E_p(t)$ の kernel を $e_p(t;x,y)$ とすると

$$\chi(M) = \int_M \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \{ \operatorname{tr} e_p(t;x,x) \}\, dM$$

がなりたつ．（境界のある場合は，境界条件をつけた混合問題の基本解とする．） $\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\{tr\, e_p(t;x,x)\} = str\, e(t;x,x)$ とおく．従って，$str\, e(t;x,x)$ の $t\downarrow 0$ での挙動が得られると（G-B-C）が示されることになる．

熱方程式の基本解をつかって，（G-B-C）を示す方法について，今までの結果を以下に述べる．

Mackean-Singer [8] は $e_p(t,x,x)$ の $t\downarrow 0$ での漸近展開を得ることにより，$n=2$ の場合に

$$str\, e(t,x,x) = E(x)$$

を示した．Patodi [10] は境界のない場合に一般の n についてこれを示している．それは非常に巧妙な方法であったが，Cycon-Froese-Kirsch-Simon [2] は Patodi の上記論文で使った方法を Th.2 で述べるような代数的な使いやすい形にして，やはり（G-B-C）の境界のない場合の証明をしている．解析的証明は，上記以外にも，Gilkey [3], [4] の invariant theory をつかったもの，及び確率論の手法では，Maliavin-Calculus 及び Th. 2 を使った Ikeda-Watanabe [5]，Shigekawa-Ueki-Watanabe [11] 等がある．

§2. Δ の表示．

g を M の Riemann metric とする．M の local patch U

上で，local orthonormal frame $\{X_1, \ldots, X_n\}$をとる．その dual を$\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$とする．このとき共変微分をつかって

$$d = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i} e(\omega^i), \quad \delta = \sum_{i=1}^{n} \nabla_{X_i} \iota(X_i) \quad (\text{村上}[9])$$

と書ける．

<u>記号</u>

$$e(\omega^i)\omega = \omega^i \wedge \omega$$

$$(\iota(X_i)\omega)(Y_1, \ldots, Y_{p-1}) = \omega(X_i, Y_1, \ldots, Y_{p-1})$$

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}$$

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{\ell=1}^{n} c_{ij}^{\ell} X_\ell$$

を使って，Δを書くと

<u>Th.1.</u>

$$\Delta = -\left\{ \sum_{j=1}^{n} \nabla_{X_j} \nabla_{X_j} - \sum_{i,j=1}^{n} c_{ii}^{j} \nabla_{X_j} + \sum_{i,j=1}^{n} e(\omega^i)\iota(X_j) R(X_i, X_j) \right\}$$

Curvature transformation の係数を

$$R(X_j, X_k)X_\ell = \sum_{m=1}^{n} R^m{}_{\ell j k} X_m \quad \text{とし，}$$

$e(\omega^\ell) = a_\ell^*$， $\iota(X_m) = a_m$ を使うと Th.1 より Δの表象は次の様になる．

Th. 1′ $\sigma(\Delta) = -\left\{\sum_{j=1}^{n}(\xi_j I - G_j)^2 - \sum_{i,j,m,\ell=1}^{n} R^{m}{}_{\ell ij}\, a_i^* a_j a_\ell^* a_m\right\} + r_1,$

但し、 $r_1 = \sum_{|\alpha|=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-i)\partial_\xi^\alpha \xi_j \partial_x \xi_j I + \sum_{i,j=1}^{n} C^j_{ii}(\xi_j I - G_j),$

$\sigma(X_j) = \xi_j \quad , \quad G_j = \sum_{m,\ell=1}^{n} C_j{}^m{}_\ell\, a_\ell^* a_m .$

a_i^*, a_j については次の Proposition が基本的である.

Prop. 1. $\begin{cases} a_i a_j + a_j a_i = 0 \\ a_i^* a_j^* + a_j^* a_i^* = 0 \\ a_i a_j^* + a_j^* a_i = \delta_{ij} \end{cases}$.

§3. Berezin-Patodi formula.

先に述べた Cycon-Froese-Kirsch-Simon [2] にある定理を述べる.

V を次元 n の内積のある vector space, $\Lambda^p(V)$ をその anti-symmetric p tensor とする. さらに $\Lambda^*(V) = \bigoplus_{p=0}^{n} \Lambda^p(V)$ とする.

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ を V の orthnormal base とし, a_i^* を $\Lambda^*(V)$ の次の様な変換

$a_i^* v = e_i \wedge v$ とし,

a_i を a_i^* の adjoint とする.

$I=\{i_1<i_2<\cdots<i_p\}$ に対し $a_I=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_p}$, さらに $(a_I)^*=a_I^*$ と書くと,

Th. 2 (Berezin-Patodi formula).
$A\in L(\Lambda^*(V))$ は $A=\sum_{I,J}\alpha_{IJ}\,a_I^*a_J$ と唯一つあらわせて,

$$\sum_{p=0}^{n}\operatorname{tr}\left[(-1)^pA_p\right]=(-1)^n\,\alpha_{\{1,\cdots,n\}\{1,\cdots,n\}}$$

である. 但し $A_p=A|_{\Lambda^p(V)}$.

§4. R^n での基本解の構成.

(1). A, B, は vector space (有限次元) 上の線形変換とする.

Def. 1. $C_0(B;A)=B$, $C_{j+1}(B;A)=[C_j(B;A),A]$ $(j\geq 0)$,

$$H_j(t,B;A)=\int_0^t\frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!}e^{-sA}Be^{sA}\,ds\quad(j\geq N).$$

Prop. 2. $f(t)=e^{-tA}Be^{tA}$ とすると, 任意の $J\in N$ に対し

$$f(t)=\sum_{j=0}^{J-1}\frac{C_j(B;A)t^j}{j!}+H_J(t,C_J(B;A);A).$$

<u>Cor.</u> $[e^{-tA}, B]e^{tA} = H_1(t, [B,A]; A)$

$$= \sum_{j=1}^{J-1} \frac{c_j(B;A)t^j}{j!} + H_J(t, c_J(B;A); A)$$

(2) $r_2(x,\xi)$ を各成分が $S^2_{1,0}(R^n)$ に入る行列として，斉次次数に分けて

$$(*) \qquad r_2 = p_2 I + p_1 + p_0$$

とする．但し $p_2 \in S^2_{1,0}(R^n)$ は関数，p_j $(j=0,1)$ は各成分が $S^j_{1,0}(R^n)$ に属するものとする． e^{-tr_2} について次がなりたつ．

<u>Prop. 3.</u> (i) 任意の α, β に対して正数 $C_{\alpha,\beta}$, $l_{\alpha,\beta}$ が存在して

$$\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tr_2}) \| \leq C_{\alpha,\beta} e^{-tp_2 + C\langle\xi\rangle|t|} (|t|\langle\xi\rangle^2 + 1)^{l_{\alpha,\beta}} \sqrt{|t|}^{|\alpha|},$$

(ii) ξ について多項式で $S^m_{1,0}(R^n)$ に入るものを成分にもつ行列 q に対し

$$\| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (H_k(t,q;r) e^{-tr_2}) \| \leq C_{\alpha,\beta} e^{-tp_2 + C\langle\xi\rangle t}$$

$$\times (t\langle\xi\rangle^2 + 1)^{l_{\alpha,\beta}} \sqrt{t}^{2k+|\alpha|-m} \qquad (t>0).$$

本稿では $S^m_{1,0}(R^n)$ の代りに，$S^m_{1,0}(R^n)$ の subclass として次の K^m を導入し，Tsutsumi [12] においておこなった放物型方程式の基本解の構成の手順を，$S^m_{1,0}(R^n)$ の代りに K^m で以下

に説明するようにおこなう。

$a_j * a_k = \mathcal{A}_{jk}$, $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_{jk})$ とし

<u>Def. 2.</u> $K^m = \{ p(x, \xi ; \mathcal{A})$; $\mathcal{B}(R^n)$ を係数とする ξ, $\mathcal{A}$ について高々 m 次の多項式 $\}$.

Prop. 1 より 次の Prop. 4 が導かれる。

<u>Prop. 4.</u> (i) $p \in K^m$ ならば, $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta p \in K^{m-|\alpha|}$

(ii) $p_j \in K^{m_j}$ $(j=1,2)$ ならば, $[p_1, p_2] \in K^{m_1+m_2-1}$,

$c_j(p_1; p_2) \in K^{m_1+j(m_2-1)}$ $(\forall j)$.

Pu は symbol $p(x, \xi : \mathcal{A})$ をもつ擬微分作用素とする。作用素の積の展開定理は $S^m_{1,0}(R^n)$ の場合と同様に次の形になる。

<u>Prop. 5.</u> (i) $\sigma(P \cdot Q) = p \circ q$ と書くと $(p \in K^{m_1}, q \in K^{m_2})$

$$p \circ q = \sum_{j=0}^{N-1} s_j(p, q) + r_N(p, q),$$

但し $s_j(p, q) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)} q_{(\alpha)}$ であって,

$s_j(p, q) \in K^{m_1+m_2-j}$, $r_N \in K^{m_1+m_2-N}$

(ii) $\sigma([P_1, P_2]) \in K^{m_1+m_2-1}$ $(p_j \in K^{m_j}$ $j=1,2)$.

以下 $H_k(t;B)=H_k(t,B;r_2)$, $C_k(B)=C_k(B;r_2)$ と略記する.

<u>Def. 3.</u> $m\in\mathbb{R}$ に対し,

$K_m=\{K^j$ を係数とする t の d 次多項式で $j-2d\leq m\}$.

$R_\ell=\{q(t,x,\xi):B(S^m_{1,0})$ を係数とする行列:

$$\left\|\partial_t^k q^{(\alpha)}_{(\beta)}(t,x,\xi)\right\|\leq C_{\alpha,\beta}e^{-tp_2}e^{tM\langle\xi\rangle}(t\langle\xi\rangle^2+1)^{\ell_{\alpha,\beta}}$$
$$\times\sqrt{t}^{\,|\alpha|-\ell-2k}\Big\}$$

このとき

<u>Prop. 6.</u> (i) $\partial_t^k\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta q\in K_{m+2k-|\alpha|}$ if $q\in K_m$,

$\partial_t^k\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta q\in R_{m+2k-|\alpha|}$ if $q\in R_m$.

(ii) $q_1q_2\in R_{\ell+m}$ if $q_1\in K_m$, $q_2\in R_\ell$.

(iii) $e^{-tr_2}\in R_0$

(iv) $H_k(t,q)e^{-tr_2}\in R_{m-2k}$ if q は $S^m_{1,0}$ を成分とする行列.

<u>Lemma 1.</u> $u_0=e^{-tr_2}$ とすると, 任意の $J\in\mathbb{N}$ に対し,

$$u_{0\,(\beta)}^{(\alpha)}=f_{0,\alpha,\beta}u_0 \mod R_{-|\alpha|-J},$$

但し $f_{0,\alpha,\beta}\in K_{-|\alpha|}$.

<u>Cor.</u> $v=fe^{-tr_2}$ $(f\in K_m)$ とすると, 任意の $J\in\mathbb{N}$ に対し,

$$v^{(\alpha)}_{(\beta)}=f_{\alpha,\beta}u_0 \mod R_{m-|\alpha|-J},$$

但し $f_{\alpha,\beta}\in K_{m-|\alpha|}$.

<u>Proof of Lemma 1.</u> $|\alpha|=1$ とすると

$$u_{0(\alpha)} = -H_1(t, r_{2(\alpha)})u_0$$
$$= -\left\{\sum_{j=1}^{J} \frac{c_{j-1}(r_{2(\alpha)})t^j}{j!} + H'_{J+1}(t, c_J(r_{2(\alpha)}))\right\}u_0 .$$

以下 $|\alpha|+|\beta|$ に対する帰納法を使う．

<u>Lemma 2.</u> 任意の $f \in K_m$, $v_0 \in K_{m-2}$, $J \in \mathbb{N}$ に対して

$v_J \in K_{m-2}$ を $u_J = v_J u_0$ が
$g_J \in K_{m-J}$

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r_2\right)u_J = (f+g)u_0 & (0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \\ u_J|_{t=0} = v_0 , & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \end{cases}$$

を満たす様にとれる．

<u>Proof.</u>
$$\begin{cases} \frac{dv_J}{dt} + [r_2, v_J] = f , & (0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \\ v_J|_{t=0} = v_0 & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n . \end{cases}$$

の近似解を

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = f & (0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n, \\ v|_{t=0} = v_0 & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \end{cases}$$

から出発して逐次とけばよい．

(3) 基本解の構成.

Th. 3. $r = r_2 + r_1 + r_0$, ($r_j \in K^j$) かつ r_2 は(※) の形であって $p_2 > c_0|\xi|^2$ ($c_0>0$) とする. このとき任意の N に対し,

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + r\right) \circ e_N \equiv 0 \quad \mathrm{mod} \quad R_{-N+1} \\ e_N \big|_{t=0} = I \end{cases}$$

の解 e_N が $e_N = \sum_{j=1}^{N} u_j$, $u_j = v_j u_0$ ($v_j \in K_{-j}$) で求められる.

Proof. N を任意に取る. $u_0, u_1, \ldots u_{k-1}$ までが $u_j = v_j u_0$ ($v_j \in K_{-j}$) として求められたとする.

$u_{j(\alpha)} \equiv v_{j,0,\alpha} u_0 \mod R_{-N}$ であるから

$$\sum_{\substack{j+m+l=k \\ 0 \leq j < m}} s_m(r_{2-l}, u_j) \equiv \sum_{\substack{j+|\alpha|+l=k \\ 0 \leqq j < m}} \frac{1}{\alpha!} r_{2-l}{}^{(\alpha)} v_{j,0,\alpha} u_0 \quad \mathrm{mod} \quad R_{-N+1}.$$

$g_k = \sum_{\substack{j+|\alpha|+l=k \\ 0 \leqq j < m}} \frac{1}{\alpha!} r_{2-l}{}^{(\alpha)} v_{j,0,\alpha}$ とおくと, $g_k \in K_{2-k}$ であり, u_k を 次の様に求める.

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}+r_2\right)u = -g_k u_0 & (0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \\ u\big|_{t=0} = 0 & \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \end{cases}$$

の近似解を Lemma 2 において $J=N-k+1$ とえらんで，それを $u_k = v_k u_0$ とする．$v_k \in K_{-k}$ である．このとき u_k は

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}+r_2\right)u_k \equiv -g_k u_0 & \mod R_{-N+1}, \\ u_k\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を満たす．従って $\sum_{j=0}^{N} u_j = e_N$ は

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}+r\right)\circ e_N \equiv 0 & \mod R_{-N+1} \\ e_N\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

を満たす．

R_{-N+1} の表象は r が strongly elliptic であるから．任意の $K \geqq 0$ に対し

$$\| q_{(\beta)}^{(\alpha)} \| \leqq C_{K,\alpha,\beta} \langle \xi \rangle^{-K} \sqrt{t}^{\,N-1-K}$$

の評価をもつから，基本解の表象 $e(t;x,\xi) \in B(S^0_{1,0})$ を積分方程式を解いて求めると，N が任意であるので，その kernel は

$$\sqrt{\det g}\; e(t,x,x) = \tilde{e}_N(t;x,x) + O(t^{-n/2+N/2})$$

となる．但し

$$\tilde{e}_N(t;x,y)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n} e^{i(x-y)\cdot\xi}\, e_N(t;x,\xi)\,d\xi .$$

§5．(G-B-C) の証明

$$r_2=-\sum_{j=1}^{n}(q_j I-G_j)^2+R\in K^2,\quad p_2=-\sum_{j=1}^{n}q_j^2\geqq c_0|\xi|^2,$$

但し $\displaystyle R=\sum_{i,j,m,\ell=1}^{n}R^m{}_{\ell ij}\,a_i^* a_j a_\ell^* a_m$

であるから，§4 の結果より $\tilde{u}_j(t;x,x)$ を求めると十分である．

$$\tilde{u}_0(t)=(2\pi)^{-n}\int_{R^n}u_0(t,x,\xi)\,d\xi$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\right)^n\sqrt{\det q}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}e^{\sum_{j=1}^{n}(i\eta_j-\sqrt{t}G_j)^2-Rt}\,d\eta\right\}$$

$v\in K_{-j}$ ならば $v(t,x,\frac{\eta}{\sqrt{t}},A)=O(\sqrt{t}^{\,j})\,v(1,x,\eta,\sqrt{t}A)$

であるから

$$(2\pi)^{-n}\int_{R^n}v(t,x,\xi,A)\,u_0(t,x,\xi)\,d\xi$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\right)^n\sqrt{\det q}\left\{\int_{R^n}\tilde{v}(t,x,\frac{\eta}{\sqrt{t}},A)\,e^{\sum_{j=1}^{n}(i\eta_j-\sqrt{t}G_j)^2-Rt}\,d\eta\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi\sqrt{t}}\right)^n\sqrt{\det q}\;O(\sqrt{t}^{\,j})\cdot\left\{\int_{R^n}\hat{v}(1,x,\eta,\sqrt{t}A)\,e^{\sum_{j=1}^{n}(i\eta_j-\sqrt{t}G_j)^2-Rt}\,d\eta\right\}$$

但し $\hat{v}\in K_{-j}$．

従って. Th. 2 より

$$\mathrm{str}\, \tilde{u}_0(t,x,x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \sqrt{\det g}\,\{1 + O(\sqrt{t})\}\,\mathrm{str}\,(e^{-Rt})$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n \sqrt{\det g}\ (-1)^m\, \mathrm{str}\left(\frac{R^m}{m!}\right) + O(\sqrt{t}) & n=2m, \\ O(\sqrt{t}) & n=2m+1, \end{cases}$$

$$\mathrm{str}\, \tilde{u}_j(t,x,x) = O(\sqrt{t}^{\,j}) \qquad (j \geqq 1).$$

一方 $\mathrm{str}\, e(t,x,x)$ は t に依存しないから,

$$\mathrm{str}\, e(t,x,x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\right)^n (-1)^m\, \mathrm{str}\left(\frac{R^m}{m!}\right) & n=2m, \\ 0 & n=2m+1, \end{cases}$$

を得る. よって R^m の $a^*_{\{1,\dots,n\}}\, a_{\{1,\dots,n\}}$ の係数を求めることにより $\mathrm{str}\, e(t,x,x) = E(x)$ が証明できる.

References

[1] S.Chern: A simple instrinsic proof of the Gauss Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. Ann.of Math.45(1944),747-752.

[2] H.L.Cycon,R.G.Froese,W.Kirsch and B.Simon: Schrodinger operators. Texts and Monographics in Physics,1987, Springer.

[3] P.B.Gilkey: The boundary integrand in the formula for the signature and Euler charactertistic of a Riemannian manifold with boundary. Adv.in Math.,15(1975),334-360.

[4] P.B.Gilkey: Invariance Theory,The Heat Equation,and the Atiyah-Singer Index Theorem.1984,Publish or Perish,Inc..

[5] N.Ikeda and S.Watanabe: Stochastic differential equations and diffusion process.Kodansha/North-Holland,Tokyo/Amsterdam,1981,Secnd Ed.1989.

[6] C.Iwasaki: The fundamental solution for pseudo-differential operators of parabolic type. Osaka J.Math.14(1977),569-592.

[7]C.Iwasaki: Parabolic intial-boundary value problems and the asymptotic expansion of the fundamental solutions. 「偏微分方程式の解の構造の研究」(数理解析研究所講究録 766) (1991), 83-103, (in Japanese).

[8] H.P.Mackean and I.M.Singer: Curvature and the eigenvalues of the Laplacian. J.Differential Geometry 1(1967),43-69.

[9] S.Murakami: Manifolds.1969,Kouritsussuppan,(in Japanese).

[10] V.K.Patodi: Curvature and the eigenforms of the Laplace operator. J.Differential Geometry 5(1971), 233-249.

[11] I.Shigekawa,N.Ueki and S.Watanabe: A probabilitic proof of the Gauss-Bonnet-Chern Theorem for manifolds with boundary. Osaka J. Math. 26(1989),897-930

[12] C.Tsutsumi: The Fundamenatl Solution for a Degenerate Parabolic Pseudo-Differential Operator. Proc.Japan Acad. 50(1974),11-15.