数理解析研究所講究録
第779巻 1992年 93-96



# Schrödinger 作用素の関数の $L^p$-有界性について

東大教養　中村 周 ( Shu Nakamura )

$L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の Schrödinger 作用素を $H=-\Delta+V(x)$ として、$L^2$上の作用素: $f(H)$、あるいは $e^{-itH}f(H)$ の $L^p(\mathbf{R}^d), 1\le p\le\infty,$ への拡張について考える。最初の動機は、$f\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ の場合にあり、波動作用素の $L^p$-有界性への応用を目標としているが、それについてはここでは述べない。ここで述べる結果は、Ålborg 大学 ( Denmark ) の Arne Jensen との共同研究で、[JN2] の一部として発表の予定である。

ポテンシャル関数 $V(x)$ に対しては、次のような仮定をおく。

**仮定** $V(x)=V_+(x)+V_-(x)$, $V_\pm\ge 0$ であって、$V_+\in K_d^{loc}$ かつ、$V_-\in K_d$。ここで $K_d$ は、次で定義される Kato-class の関数族 : $V\in K_d$ とは、

$$d\ge 3 \text{ の時},\qquad \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbf{R}^d}\int_{|x-y|\le r}\frac{|V(y)|}{|x-y|^{d-2}}dy=0;$$

$$d=2 \text{ の時},\qquad \lim_{r\to 0}\sup_{x\in\mathbf{R}^d}\int_{|x-y|\le r}\log\{|x-y|^{-1}\}|V(y)|dy=0;$$

$$d=1 \text{ の時},\qquad \sup_{x\in\mathbf{R}^d}\int_{|x-y|\le 1}|V(y)|dy<\infty.$$

$V\in K_d^{loc}$ とは、任意の $R>0$ に対して $\chi_{\{|x|<R\}}(x)V(x)\in K_d$ であること。ここで、 $\chi_\Omega$ は $\Omega$ の定義関数。

この時、$H$ は Friedrichs 拡張を持ち、下に有界な自己共役作用素となる。したがって、有界関数 $f$ に対して、$f(H)$ 、$e^{-itH}f(H)$ がスペクトル分解定理を用いて、$L^2(\mathbf{R}^d)$ 上の作用素として定義できる。我々は、これらの作用素の $L^p(\mathbf{R}^d)$ 上への連続な拡張について考える。そのために、$f$ の属するシンボルの集合を次のように定義する。$\beta\in\mathbf{R}$ として、

**定義** $f\in S(\beta)$ とは、$f\in C^\infty(\mathbf{R})$ であって、$f(\lambda)$ が次のような意味で、$\lambda\to\infty$ の時 $\lambda^{-1}$ に関して漸近展開を持つこと : 任意の $N>0$ に対して、

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{N}a_k\lambda^{-\beta-k}+r_N(\lambda),\qquad \lambda\ge 1,$$

ここで、残余項 $r_N(\lambda)$ は、次を満たす：

$$\left|\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^k r_N(\lambda)\right| \leq C_{Nk}(1+|\lambda|)^{-N-1}, \quad \lambda \geq 1,\ k=0,1,2,\ldots.$$

$S(\infty)=\bigcap_{m=0}^{\infty} S(m)$ と書く事にすると、これは急減少関数の集合を含む。まず、$f(H)$ の $L^p$-有界性について次のような事が分かる。

**定理 1** もし $f \in S(0)$ ならば、$f(H)$ は、任意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して $L^p(\mathbf{R}^d)$ 上の有界作用素に拡張される。

このような結果は、$f(H)=(H+M)^{-s}$, $s>0$, $M$ は十分大、の場合については、既に知られている ( Simon [S] )。その証明は、Schrödinger 半群 : $e^{-tH}$, $t>0$, の $L^p$-有界性を用いて、Laplace 変換によって導く。後に簡単に説明するように、我々の証明は全く異なるアプローチを用いる。

これと、Simon [S: Theorem B.2.1] を組み合せると、次の系を得る。これは、[S] Section B.2 の中の open question に対する一つの解答になっている。

**系 2** $1 \leq p \leq q \leq \infty$ 、$\beta > \frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$とする。この時、$f \in S(\beta)$ ならば、$f(H)$ は $L^p(\mathbf{R}^d)$ から $L^q(\mathbf{R}^d)$ への有界な作用素に拡張される。

次に、$L^p(\mathbf{R}^d)$ 上で $e^{-itH}$ を考える。ところが、free の場合、つまり $H=H_0=-\triangle$ の場合でも $e^{-itH}$ は $L^p(\mathbf{R}^d)$ ( $p \neq 2$ ) で有界でないことが知られている (例えば、[BTW] を見よ)。そこで、$\lambda \to \infty$ の時十分早く減少するような $f(\lambda)$ を導入して、$e^{-itH}f(H)$ の $L^p$-有界性とそのノルムを考えることにする。すると次のような結果を得ることができる。

**定理 3** $1 \leq p \leq \infty$ 、 $f \in S(\infty)$ とすると、$e^{-itH}f(H)$ は $t \in \mathbf{R}$ に対して $L^p(\mathbf{R}^d)$ で有界で、$\beta > d\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$ ならば、

$$\left\|e^{-itH}f(H)\right\|_{B\left(L^p(\mathbf{R}^d)\right)} \leq C(1+|t|)^{\beta}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

上の不等式は、$t$ の次数に関してほとんど最適な評価になっている。つまり、$V=0$ の時、次のような上と下からの評価が知られている ( [BTW] ) : $0 \leq c \leq C$ が存在して、

$$c(1+|t|)^{d\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|} \leq \left\|e^{-itH_0}f(H_0)\right\|_{B\left(L^p(\mathbf{R}^d)\right)} \leq C(1+|t|)^{d\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}$$

が任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して成立する。一般に、$\beta = d\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|$ で上の優評価が成立すると予想されるが、少なくとも $d \leq 3$ の場合は証明できる。すなわち、

**定理 4** $d \leq 3$ 、$1 \leq p \leq \infty$ 、$\beta > 2 + d/4$ とする。このとき、$f \in S(\beta)$ ならば

$$\left\|e^{-itH} f(H)\right\|_{B(L^p(\mathbf{R}^d))} \leq C(1+|t|)^{d\left|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right|}, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

$d \geq 4$ の場合は、$V$ についてもう少し強い条件をおけば上の最適な評価が成立する。例えば、もし $V \in \mathcal{E}$、つまり $C^\infty$-級で微分までこめて有界ならば、任意の次元で成立することが証明できる。

**定理 1 の証明のアイデア** 結果は、$p = 1$ の時のみ証明すれば十分。なぜなら、$p = \infty$ の場合は duality で導かれ、他の場合は Riesz-Thorin の補完定理により従う。また先に述べたように、$f(H) = (H + M)^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots$ に対しては結果は既に知られているのだから、$f \in S(N)$ 、$N$ は十分大、の場合についてのみ考えれば十分である。

主要なアイデアのひとつは、$L^1(\mathbf{R}^d)$ で考える代わりに、次で定義される $l^1(L^2)$-空間の上で考えることにある：

$$l^1(L^2) = \left\{ \varphi \in L^2_{loc}(\mathbf{R}^d) \,\middle|\, \|\varphi\|_{l^1(L^2)} \equiv \sum_{n \in \mathbf{Z}^d} \|\varphi\|_{L^2(C(n))} < \infty \right\}.$$

ここで、$C(n)$ は $n \in \mathbf{Z}^d$ を中心とする立方体：

$$C(n) = \left\{ x \in \mathbf{R}^d \,\middle|\, \max_{i=1,\ldots,d} |x_i - n_i| \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

おおまかに言えば、$l^1(L^2)$ とは大域的には $L^1$ と同じ減衰をし、局所的には $L^2$ と同じ正則性を持つ空間となる。$H$ は楕円型だから、$H$ の resolvent のある巾が $L^1(\mathbf{R}^d)$ を $l^1(L^2)$ に写すことが期待できる。実際次のような結果が成立する。

**定理 5** $\beta > d/4$ とし、$M$ を十分大とすると、$(H + M)^{-\beta}$ は $L^1(\mathbf{R}^d)$ から $l^1(L^2)$ への有界な作用素に拡張される。

この定理は、$l^p(L^q)$-空間における Young の不等式と $e^{-tH}$ の積分核の評価、そして Laplace 変換を組み合せることによって証明される。

このようにして、問題は $f(H)$ の $l^1(L^2)$-空間での有界性に帰着される。$l^1(L^2)$ は、$f(H)$ のように本来 $L^2(\mathbf{R}^d)$ で定義された作用素を考えるには $L^1(\mathbf{R}^d)$ より取扱やすい空間である。実際、重みつき $L^2$-空間における作用素の評価の方法を拡張することによって、$l^1(L^2)$-空間での評価をすることができる。具体的には、次のような結果を用いる：

**定理 6** $A \in B(L^2)$ に対して、

$$|||A|||_\beta = \|A\| + \sup_{n \in \mathbf{Z}^d} \left\| \langle \cdot - n \rangle^\beta A \chi_{C(n)} \right\|$$

とおく。ここで $\langle x \rangle = (1+|x|)^2$、$\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbf{R}^d)$ での作用素ノルムを表す。このとき $\beta > d/2$ に対して $|||A|||_\beta < \infty$ ならば、$A \in B(l^1(L^2))$ であり、

$$\|A\|_{B(l^1(L^2))} \leq C\, |||A|||_\beta^{d/2\beta} \|A\|^{1-d/2\beta}.$$

この証明は、$l^1$ における Young の不等式の証明と Carleson-Beurling の不等式の証明を真似て、$l^1(L^2)$-空間のノルムの評価をすればよい。

$f(H)$ に定理 6 を応用して、$l^1(L^2)$-空間で $f(H)$ が有界な事が解れば、$l^1(L^2)$ は $L^1(\mathbf{R}^d)$ に連続に埋込まれているから定理 1 は証明できたことになる。それには、次のような commutator estimates を示せばよい。

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbf{Z}^d} \|[\cdot - n, f(H)]\| &< \infty, \\ \sup_{n \in \mathbf{Z}^d} \|[\cdot - n, [\cdot - n, f(H)]]\| &< \infty, \quad \ldots\ldots \end{aligned}$$

これらがわかれば、任意の $\beta$ に対して

$$\left\| \langle \cdot - n \rangle^\beta f(H) \langle \cdot - n \rangle^{-\beta} \right\| < C < \infty, \qquad n \in \mathbf{Z}^d$$

がわかり、定理 6 の仮定を $f(H)$ が満たすことが導かれる。上の commutator estimates は、$f(H)$ を $H$ の resolvent の関数として書きなおして、$f$ の変数について Fourier 変換して評価する。詳細は省略するが、作用素の重みつき $L^2$-空間での有界性の証明にしばしば用いられる計算に類似している（例えば [JN1] を参照）。

他の定理も同様の議論によって証明することができる。

[BTW] Brenner, P., Thomée, V., Wahlbin, L. B.: Besov Spaces and Applications to Difference Methods for Initial Value Problems. Springer Lecture Notes in Math. **434** (1975).

[JN1] Jensen, A., Nakamura, S.: Mapping properties of wave and scattering operators for two-body Schrödinger operators. Preprint, June 1991.

[JN2] Jensen, A., Nakamura, S.: $L^p$-mapping properties of functions of Schrödinger operators and their applications to scattering theory. In preparation.

[S] Simon, B.: Schrödinger semigroup, Bull. A. M. S. **7**, 447–526 (1982).